

Astérisque

P. PANSU

Effondrement des variétés riemanniennes

Astérisque, tome 121-122 (1985), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 618, p. 63-82

http://www.numdam.org/item?id=SB_1983-1984__26__63_0

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EFFONDREMENT DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES,
D'APRÈS J. CHEEGER, ET M. GROMOV.

par

P. PANSU

Cet exposé tourne autour d'une question posée par H. Hopf en 1948. Sachant qu'une variété riemannienne compacte, simplement connexe, à courbure sectionnelle constante égale à 1, est isométrique à la sphère, voir [H-R], H. Hopf demandait si, lorsqu'on suppose seulement que la courbure sectionnelle est proche de 1, la variété est encore homéomorphe à la sphère.

Dès 1951, une réponse a été apportée par H.E. Rauch.

THÉORÈME (H.E. Rauch [R]) Si une variété riemannienne (M, g) a une courbure sectionnelle K comprise entre 0,76 et 1, $0,76 < K \leq 1$, alors M est homéomorphe à une sphère.

Les réponses apportées à la question de H. Hopf, et les prolongements des méthodes de H.E. Rauch, constituent un courant important de la géométrie riemannienne, voir l'ouvrage de J. Cheeger et D.G. Ebin [C-E], la notice historique de M. Berger [B4] et l'inventaire récent de T. Sakai [Sa]. Nous allons développer un aspect de la théorie, celui des théorèmes de finitude, inauguré par A. Weinstein et J. Cheeger en 1967 : étant données des constantes $-\infty < a, b, d < +\infty$, $\varepsilon > 0$, les conditions $a \leq K \leq b$, diamètre $\leq d$, volume $\geq \varepsilon$ ne laissent qu'un nombre fini de possibilités pour le type topologique de la variété.

Après quelques préliminaires, nous expliquons au § B une nouvelle version du théorème de finitude. Cette version a l'avantage d'avoir suscité de nouvelles applications. Nous citons deux applications récentes, dues à M. Berger et D. Brittain.

On dit qu'une variété différentiable s'effondre si elle admet des métriques à courbure sectionnelle bornée, mais de rayon d'injectivité arbitrairement petit. J. Cheeger et M. Gromov ont réussi à situer la ligne de démarcation entre variétés qui s'effondrent et variétés qui ne s'effondrent pas. Avec ce résultat satisfaisant, ils apportent beaucoup d'exemples de chaque côté, et même, sur la ligne de démarcation. Ils sont présentés au paragraphe C.

Le théorème de finitude, et l'étude de l'effondrement, permettent de se faire une idée de l'espace des métriques à courbure et diamètre bornés, sur une variété donnée M . Si M ne s'effondre pas, par exemple, si M est une sphère paire S^{2n} , ou porte une métrique à courbure négative, cet espace est compact : il y a en gros une seule métrique sur M , à presque isométrie près. Si M s'effondre, par exemple, si M est un tore ou une sphère impaire S^{2n+1} , on a un espace non compact, et il y a lieu de le compactifier. Au paragraphe D, on tente de rassembler des éléments - exemples, résultats partiels - relatifs aux compactifications possibles.

Je tiens à remercier chaleureusement M. Berger, M. Gromov et J. Lafontaine pour leur aide irremplaçable lors de la rédaction de ce texte.

A. PRÉLIMINAIRES

Une métrique riemannienne, sur une variété M , est la donnée, sur chaque espace tangent, d'une forme quadratique définie positive g . On définit la longueur d'une courbe lisse γ par

$$\text{longueur}(\gamma) = \int \sqrt{g(\dot{\gamma}(t))} dt$$

et la distance entre m et m' par

$$d(m, m') = \inf \{ \text{longueur}(\gamma) \mid \gamma(0) = m, \gamma(1) = m' \}.$$

La boule de centre m , de rayon r , est

$$B_m(r) = \{ m' \mid d(m, m') \leq r \}$$

Z

Une boule n -a, en général, pas de raison d'être homéomorphe à une boule euclidienne. C'est particulièrement clair si M est compacte et $r > \text{diamètre de } g$. C'est pourtant vrai pour les boules assez petites.

FAIT 1 : Soit g une métrique de classe C^2 sur la variété compacte M . Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que toute boule dans M , de rayon $\leq \varepsilon$, soit difféomorphe à une boule euclidienne.

DÉFINITION. On appelle rayon d'injectivité de (M, g) en m le plus grand r tel que la fonction distance à m soit de classe C^1 sur $B_m(r)$. Alors, le plus grand ε tel que le Fait 1 soit vrai est le rayon d'injectivité de g , minimum du rayon d'injectivité sur M .

Le Fait 1 est qualitatif. Cherchant à mesurer cet écart entre boules, nous introduisons une distance en espaces métriques homéomorphes.

DÉFINITION. Soient X, Y deux espaces métriques, f un homéomorphisme de X sur Y . La dilatation de f est

$$\text{dil } f = \sup_{x \neq x' \in X} d(f(x), f(x')) / d(x, x').$$

La distance de Lipschitz de X à Y est

$$\text{dist}_L(X, Y) = \inf \{ |\log \text{dil } f| + |\log \text{dil } f^{-1}| : f \text{ homéomorphisme } X \rightarrow Y \}$$

C'est la courbure sectionnelle qui mesure quantitativement la déviation par rapport à une boule euclidienne. Pour la définition de cette grandeur, issue des dérivées secondes de la métrique g , nous renvoyons, par exemple, à [C-E]. La courbure sectionnelle est une fonction, notée K ; nous n'en avons besoin qu'à travers le fait suivant. C'est une conséquence d'un "théorème de comparaison" fameux, qui constitue une bonne part de l'apport de H.E. Rauch dans [R].

FAIT 2. On note $B^0(r)$ une boule de rayon r dans l'espace euclidien. Soit (M, g) une variété riemannienne complète, à courbure sectionnelle bornée $|K| \leq 1$. Si $r \leq$ rayon d'injectivité de g , alors, pour toute boule $B_m(r)$ dans M , on a

$$\text{dist}_L(B_m(r), B^0(r)) \leq \frac{r^2}{6}.$$

Ce fait est extrêmement rassurant; en courbure bornée, seul le rayon d'injectivité est source de complication, au moins localement.

B. THÉORÈMES DE FINITUDE.

Le Fait 2 est pleinement satisfaisant, sur le plan local, mais on voudrait des résultats globaux, comme le théorème de la sphère cité en introduction.

Pour démontrer le théorème de la sphère, on montre qu'une variété riemannienne compacte, à courbure sectionnelle $\geq \frac{1}{4}$, est recouverte par deux boules de rayon π (voir [K1] et [B1]). Pour conclure, il reste à montrer que ces boules sont

homéomorphes à des boules euclidiennes, ce qui résulte du théorème suivant.

THÉORÈME. (W. Klingenberg [K2]). Si (M, g) est simplement connexe, à courbure $\frac{1}{4} < K \leq 1$, alors le rayon d'injectivité en tout point est $\geq \pi$.

Cette démarche suggère un autre raisonnement, bien plus grossier. Supposons que la variété riemannienne (M, g) ait un rayon d'injectivité égal à ε . Alors, les boules de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ sont, non seulement difféomorphes à des disques, mais convexes, donc toute intersection de telles boules est contractile. Fixons un recouvrement de M par des boules de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$. Pour reconstituer M , il suffit de dire comment ces boules se recoupent ; cette information est contenue dans le nerf du recouvrement. C'est un complexe simplicial qui a même type d'homotopie que M . La complexité du nerf est bornée par le nombre de boules, qu'on peut majorer à l'aide du diamètre (si $K \geq -1$, ou, plus généralement, sous l'hypothèse d'une borne inférieure de la courbure de Ricci) ou du volume (si $K \leq 1$). En fait,

THÉORÈME. (A. Weinstein [W], J. Cheeger [C]). Fixons des constantes $\varepsilon > 0$, $D < +\infty$. Il n'y a, à homéomorphisme près, qu'un nombre fini de variétés lisses, de même dimension n , qui admettent une métrique riemannienne telle que

- (*) $|K| \leq 1$, rayon d'injectivité $\geq \varepsilon$, diamètre $\leq D$.
- (**) $|K| \leq 1$, rayon d'injectivité $\geq \varepsilon$, volume $\leq D$.
- (***) $|K| \leq 1$, volume $\geq \varepsilon$, diamètre $\leq D$.

L'équivalence de (***) avec les deux autres propriétés est due à J. Cheeger.

Par rapport au problème de H. Hopf, ce résultat reflète un changement de point de vue. Au lieu de tourner autour d'une seule variété riemannienne et ses déformations, on évolue dans l'ensemble des variétés. Pour cette raison, ce résultat est resté un peu en marge du développement de la théorie, jusqu'en 1978.

En vue des applications : cherchons à déduire un résultat dans le style de celui de Rauch du théorème de finitude de Cheeger. Supposons que, pour tout $\delta < 1$, il existe une variété riemannienne (M_δ, g_δ) à courbure sectionnelle $\delta < K \leq 1$, non homéomorphe à la sphère. Le théorème de finitude permet de supposer que $M_\delta = M$ est une variété topologique fixée. Pour conclure, il serait commode de savoir que les métriques g_δ "convergent" vers une métrique à courbure sectionnelle constante. D'où la nécessité du résultat suivant.

THÉORÈME (M. Gromov [G3], [G6]) L'espace des variétés riemanniennes (M, g) telles que

- (*) $|K| \leq 1$, rayon d'injectivité $\geq \varepsilon$, diamètre $\leq D$

est compact pour la distance de Lipschitz.

Principe de la démonstration. Recouvrons une variété riemannienne compacte (M,g) par des petits boules. Soit N l'ensemble (fini) des centres des boules. Grâce au Fait 2, pour reconstruire (M,g) à presque isométrie près, il suffit de connaître le système des distances entre les points de N , c'est-à-dire, l'espace métrique N . Techniquement, cette affirmation se traduit par la définition suivante.

DÉFINITION. Soit $\varepsilon > 0$. Un ε -réseau dans un espace métrique X est un ensemble N tel que les boules de rayon ε , centrées sur N , recouvrent X . On dit que deux espaces métriques compacts X et Y sont proches au sens de Hausdorff si, pour $\varepsilon > 0$ petit, ils admettent des ε -réseaux $N \subset X$ et $N' \subset Y$ tels que $\text{dist}_L(N, N')$ soit petit.

REMARQUE. Cette topologie s'avère être une généralisation de la distance de Hausdorff entre parties d'un espace métrique. En effet, rappelons que la distance de Hausdorff entre deux parties X, Y de Z est

$$\text{dist}_Z^Z(X, Y) = \inf\{\varepsilon/X \text{ et } Y \text{ sont des } \varepsilon\text{-réseaux de } X \cup Y\}$$

La distance de Hausdorff entre deux espaces métriques compacts est la borne inférieure

$$\text{dist}_H(X, Y) = \inf_Z \{\text{dist}_Z^Z(X, Y)\}$$

sur tous les plongements isométriques de X, Y dans un espace métrique Z .

Le théorème de compacité de M. Gromov se scinde en 3 étapes.

(i) Les distances de Hausdorff et de Lipschitz induisent la même topologie sur l'espace des variétés riemanniennes à $|K| \leq 1$, rayon d'injectivité $\geq \varepsilon$. C'est le point techniquement délicat, voir [P] pour une démonstration agréable.

(ii) Critère de compacité Hausdorff. Pour chaque ε , on définit le taux de remplissage $\tau_\varepsilon(X)$ d'un espace métrique X . C'est le nombre maximal de boules disjointes de rayon ε qu'on peut mettre dans X . Un ensemble d'espaces métriques est précompact pour la distance de Hausdorff si et seulement si les diamètres et, pour chaque ε , les taux de remplissage τ_ε sont uniformément bornés.

(iii) Inégalité de R. Bishop. On peut majorer le taux de remplissage d'une variété riemannienne au moyen du diamètre et de la borne inférieure de la courbure de Ricci (un invariant a priori plus faible que la courbure sectionnelle).

APPLICATION 1 (M. Gromov [G1]). Il existe une fonction positive ε_n telle que, toute variété compacte M admettant une métrique g telle que

$$-1 - \varepsilon_n(\text{diamètre de } g) \leq K \leq -1,$$

admette aussi une métrique à courbure sectionnelle constante $K = -1$.

(D'après [G1] - en dimension 3, il faut en plus les techniques de Thurston - on peut remplacer diamètre par volume).

Cela résulte du phénomène suivant, découvert indépendamment par E. Heintze [H] et G.A. Margulis [M] (une démonstration agréable se trouve dans [B-K] p.28).

THÉORÈME. (G.A. Margulis, E. Heintze) Il existe une constante ε_n telle que, pour toute variété riemannienne compacte (M, g) de dimension n à courbure sectionnelle $-1 \leq K < 0$, il existe un point où le rayon d'injectivité soit $\geq \varepsilon_n$.

APPLICATION 2. (M. Berger [B3]) Pour chaque dimension paire n , il existe une constante $\varepsilon_n > 0$ telle que, si une variété compacte, simplement connexe M , de dimension n , admet une métrique à courbure sectionnelle $\frac{1}{4} - \varepsilon_n \leq K \leq 1$, alors M est, ou bien homéomorphe à la sphère S^n , ou bien difféomorphe à un espace projectif (complexe, quaternionien, ou Cayley).

Ici, un élément crucial est le fait que, en dimension paire, le théorème de W. Klingenberg reste vrai sous l'hypothèse $0 < K \leq 1$.

APPLICATION 3. (D. Brittain [Br]) Il existe une fonction positive ε telle que, si une variété compacte M simplement connexe, de dimension paire n , admet une métrique telle que

$$\text{courbure de Ricci} \geq n-1, \text{ diamètre} \geq \pi - \varepsilon(n, \sup|K|),$$

alors M est difféomorphe à la sphère S^n .

Remarques sur la distance de Hausdorff.

La condition suffisante de compacité Hausdorff - courbure de Ricci bornée inférieurement - laisse supposer que la courbure très positive n'est pas une source de pathologies globales, seulement locales.

QUESTION. Dans le théorème de finitude, peut-on remplacer l'hypothèse ~~(***)~~ par $K \geq -1$, volume $\geq \varepsilon$, diamètre $\leq D$?

A l'appui de cette conjecture, il y a une méthode, inaugurée par M. Gromov dans [G7]. Dans cet article, on montre que, pour toute une variété compacte à courbure sectionnelle $K \geq 0$, la somme des nombres de Betti est inférieure à 2^{2^n} .

D'autre part l'intervention de la courbure de Ricci conduit à se demander si l'hypothèse $K \geq \text{constante}$ est vraiment plus restrictive que $\text{Ricci} \geq \text{constante}$. Sur ce problème, voir l'exemple récent - non compact, toutefois - de D. Gromoll et W. Meyer [G-M].

La distance de Hausdorff - et son critère de compacité - semblent devoir

s'appliquer dans des situations diverses. Elle permet, par exemple, de mettre en évidence un groupe de Lie, limite des homothétiques d'un groupe discret, de type fini, lorsque celui-ci est à croissance polynomiale. C'est la première étape de la démonstration du fait qu'un tel groupe est presque nilpotent, voir [G5] et [Ti] .

C. QUI S'EFFONDRE ?

Même en conservant une courbure et un diamètre borné, si on autorise des \ petits rayons d'injectivité, on ouvre la porte à une infinité d'animaux étranges. Bien sûr, il faut tenir compte des manifestations du groupe fondamental - une infinité d'espaces lenticulaires à courbure 1 , diamètre inférieur à π - mais il y a bien pire encore.

Nous allons construire, sur S^3 , des métriques à courbure et diamètre bornés, dont le comportement est sensiblement différent de celui de la métrique canonique. Par exemple, elles admettent des courbes, très petites, qui, pour être déformées en un point, doivent être allongées au point de remplir S^3 . C'est à tel point contraire à l'intuition qu'on en viendrait à douter que S^3 soit simplement connexe.

C'est précisément en oubliant que S^3 est simplement connexe qu'on arrive à comprendre ce phénomène.

DÉFINITION. On dit qu'une variété M s'effondre si elle admet une suite g_k de métriques riemanniennes, de courbure sectionnelle uniformément bornée, et dont le rayon d'injectivité en tout point tend uniformément vers 0 .

M s'effondre à diamètre borné si, de plus, les diamètres des g_k sont uniformément bornés.

REMARQUE. M s'effondre à diamètre borné si et seulement si les espaces (M, g_k) , à courbure bornée, convergent, au sens de Hausdorff, vers un espace métrique compact de dimension (de Hausdorff) $\leq \dim M - 1$ (voir [G6] p.133).

EXEMPLE 1. Tores plats et variétés plates.

Une variété plate est une variété riemannienne (M, g) à courbure nulle. On montre (Bieberbach, voir [B-K]) que (M, g) est isométrique au quotient de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ par un groupe discret de translations, étendu par un groupe fini de rotations.

Si (M, g) est compacte et plate, les métriques homothétiques $\varepsilon^2 g$ sont encore à courbure nulle, et leur diamètre tend vers 0 avec ε . C'est le plus simple des effondrements. Plus généralement, étant données deux variétés riemanniennes plates (M_1, g_1) , (M_2, g_2) , soit g_ε la métrique

$$g_\varepsilon = g_1 \oplus \varepsilon^2 g_2$$

sur $M_1 \times M_2$. Alors, lorsque ε tend vers 0, diamètre $(g_\varepsilon) \rightarrow$ diamètre (g_1) , et injectivité $(g_\varepsilon) \leq \varepsilon$ injectivité (g_2) . En fait, les espaces métriques $(M_1 \times M_2, g_\varepsilon)$ convergent au sens de Hausdorff vers (M_1, g_1) .

Le lemme suivant montre que la seule façon, pour une famille de tores plats, de dégénérer, est de se scinder en produit.

LEMME. Soit (T^n, g) un tore plat. On définit les longueurs extrémales de g comme suit. Fixons $m \in T^n$. Soit γ_1 la plus petite courbe fermée non homotope à zéro dans T^n . Soit γ_2 la plus petite courbe fermée non homotope à un multiple de γ_1 , γ_3 la plus petite courbe fermée telle que $[\gamma_3] \notin \mathbb{Z}[\gamma_1] \oplus \mathbb{Z}[\gamma_2] \subset \pi_1(T^n, m)$ etc... Les longueurs extrémales sont les

$$\ell_i = \frac{1}{2} \text{ longueur } (\gamma_i)$$

(Noter que $\ell_1 =$ rayon d'injectivité (g) , $\ell_n =$ diamètre (g)).

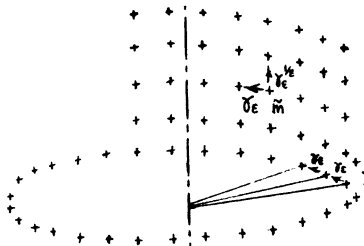
Il existe un sous-tore T^i qui contient $\gamma_1, \dots, \gamma_i$, un sous-tore T^{n-i} qui contient $\gamma_{i+1}, \dots, \gamma_n$, et

$$\text{dist}_L((T^n, g), T^i \times T^{n-i}) \leq \text{const}_n \frac{\ell_i}{\ell_{i+1}}.$$

COROLLAIRE. a) Une limite, au sens de Hausdorff, de tores plats, est un tore plat de dimension inférieure. Ce résultat, dû à Mahler [Ma], est bien antérieur aux théorèmes de finitude.

b) Si un tore plat T^n est à distance de Hausdorff $\leq \varepsilon$ d'un tore T^{n-i} , alors il existe une action du tore T^i sur T^n , dont les orbites ont un diamètre $\leq \varepsilon$. Cette action est "engendrée" par les petits lacets géodésiques $\gamma_1, \dots, \gamma_i$.

Dans une variété plate générale, la situation est compliquée par la présence de rotations. Voyons sur un exemple (non compact) $M_\varepsilon = \mathbb{R}^3 / \mathbb{Z} \gamma_\varepsilon$ où γ_ε est le vissage produit d'une rotation d'axe vertical, d'angle $2\pi\varepsilon$, et d'une translation verticale de ε^2 . A priori, l'orbite sous $\mathbb{Z} \gamma_\varepsilon$ d'un point $\tilde{m} \in \mathbb{R}^3$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, mais, géométriquement, elle ressemble plutôt à $\mathbb{Z}^2$.



L'étude de la façon dont se multiplient les petits lacets en m , représentés par les voisins de $\tilde{m}$ dans l'orbite, confirme qu'il faut deux générateurs γ_ε et $\gamma_\varepsilon^{1/\varepsilon}$ pour engendrer l'orbite au voisinage de $\tilde{m}$. L'action de $\mathbb{Z}^2$ s'étend en une action de $\mathbb{R}^2$:

$$(\theta, \tau) \longmapsto \text{rotation de } \theta, \text{ translation de } \tau + \frac{\varepsilon}{2\pi} \theta.$$

On obtient une action de $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ sur M_ε , dont les orbites ont un diamètre de l'ordre de πR (R = distance à l'axe). Les M_ε convergent, au sens de Hausdorff, vers une demi-droite.

EXEMPLE 2. Construction d'un effondrement à partir d'un flot d'isométries sans point fixe.

On part d'une métrique g_1 , qui admet un flot φ_t d'isométries. On suppose que le champ de vecteurs $X = \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}$ ne s'annule pas. On construit une métrique g_ε en multipliant la métrique g_1 par ε^2 dans la direction de X seulement, sans rien changer dans les directions orthogonales. Autrement dit,

$$g_\varepsilon = \varepsilon^2 g_1|_{\mathbb{R}X} \oplus g_1|_{X^\perp}$$

On vérifie que la courbure sectionnelle de g_ε reste bornée lorsque ε tend vers 0, voir [Ca]. En revanche, il y a convergence au sens de Hausdorff. En effet, si T désigne l'adhérence du flot φ_t dans le groupe d'isométries de g_1 , alors T est un tore, et chacune de ses orbites a un diamètre qui tend vers 0. L'espace limite est donc l'espace des orbites de T , muni de la distance quotient.

REMARQUE. Il ressort que s'effondre à diamètre borné toute variété qui admet une action localement libre de S^1 ; par exemple, les sphères impaires, les groupes de Lie compacts, les fibrés en cercles (nilvariétés, etc...). Mais aussi, leurs quotients finis.

EXEMPLE 3. Un cas particulier mérite d'être détaillé, celui de la sphère S^3 . Considérons S^3 plongée dans $\mathbb{C}^2$, $S^3 = \{(z_1, z_2) \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$, et la fonction distance au grand cercle $\{z_2 = 0\}$, $S^3 \longrightarrow [0, \frac{\pi}{2}]$. Ses surfaces de niveau sont deux cercles et des tores, orbites de l'action isométrique de T^2 :

$$(\theta, \varphi) \bmod \mathbb{Z}^2, (z_1, z_2) \longmapsto (e^{i2\pi\theta} z_1, e^{i2\pi\varphi} z_2).$$

Cette action a deux orbites singulières, $\{z_2 = 0\}$ et $\{z_1 = 0\}$.

A toute pente $\alpha \in \mathbb{R}$ correspond un champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial}{\partial \varphi}$ sur T^2 , donc un flot d'isométries de S^3 . Si $\alpha \neq 0$, il n'a pas de point fixe.

Si $\alpha = 1$, les métriques g_ε sont celles mises en évidence dès 1961 [B2]

par M. Berger, pour montrer que le théorème de W. Klingenberg sur le rayon d'injectivité en courbure positive ne s'étend pas aux dimensions impaires. Les orbites du flot sont les fibres de la fibration de Hopf, homogène sous $SU(2)$. La limite Hausdorff est donc la sphère S^2 de courbure constante 4.

Si α est rationnel, $\alpha = \frac{p}{q} \neq 1$, le flot se referme encore. La limite Hausdorff est une sphère S^2 , munie d'une métrique singulière. L'application $S^3 \rightarrow S^2$ est une fibration de Seifert avec (au plus) deux fibres singulières de multiplicités p et q . Ces fibres correspondent à des singularités coniques d'angles $\frac{2\pi}{p}$ et $\frac{2\pi}{q}$ sur S^2 .

Si α est irrationnel, l'adhérence du flot est T^2 entier, et il y a convergence, au sens de Hausdorff, vers l'espace des orbites, un intervalle de longueur $\frac{\pi}{2}$.

EXEMPLE 4. L'exemple des champs de pente irrationnelle sur S^3 suggère une généralisation de la construction 2.

Si une variété M admet une action du tore T^k , dont aucune orbite n'est réduite à un point, il existe un champ de vecteurs sans zéro sur M , induit par un champ invariant de T^k . Une métrique T^k -invariante (il y en a, car T^k est compact), est invariante par le flot, donc la construction 2 s'applique, et M s'effondre à diamètre borné.

Pour élargir encore cette classe d'exemples, J. Cheeger et M. Gromov généralisent la notion de variété avec action d'un tore.

DÉFINITION. Soit M une variété lisse. Une F-structure pure de rang k sur M est une partition de M en "feuilles" - des variétés de dimension variable - dont chacune porte une structure affine plate. On suppose de plus que M est recouverte par des ouverts U tels que la partition induite sur un revêtement fini

$$\tilde{U} \rightarrow U$$

coincide avec les orbites d'une action affine lisse d'un tore T^k sur $\tilde{U}$.

Soient F_1, F_2 deux F-structures pures sur M . On dit que F_1 est contenue dans F_2 si chaque "feuille" de F_1 est une sous-variété affine d'une "feuille" de F_2 .

Une F-structure sur M , c'est un recouvrement de M par des ouverts portant chacun une F-structure pure, de telle façon que, sur l'intersection de deux ouverts, une F-structure pure est contenue dans l'autre.

EXEMPLE a. Une action d'un tore définit une F-structure pure, mais aussi, une action sur un revêtement fini. Ainsi, les variétés plates portent des F-structures pures.

EXEMPLE b. Les fibrés en tores affines (i.e., dont le groupe structural est contenu dans le groupe affine du tore) sont des F-structures pures. C'est le cas des solvariétés, quotients d'un groupe de Lie résoluble par un sous-groupe discret cocompact.

Par exemple, soit φ un automorphisme de T^2 - une matrice inversible à coefficients entiers - et M_φ la variété obtenue en suspendant φ , i.e., en recollant, au moyen de φ , les deux bords de $T^2 \times [0,1]$. Cette variété porte un feuilletage en tores, qui définit une F-structure pure, mais aucune action globale de T^2 n'a ces tores pour orbites.

EXEMPLE c. Chirurgie. Soient M, N deux variétés orientées, munies de F-structures pures de même rang. On suppose qu'il existe deux ouverts saturés $U \subset M$, $U' \subset N$, isomorphes au sens des F-structures pures. On peut alors recoller $M \setminus U$ et $N \setminus U'$ le long de leur bord, et on obtient une nouvelle variété, porteuse d'une F-structure pure.

En prenant pour M une variété avec action d'un tore et pour N un fibré en tores affines, on obtient une F-structure pure qui n'est, ni une action d'un tore, ni un fibré en tores, voir [C-G2].

EXEMPLE d. En appliquant la chirurgie c à des structures pures de rang différent, on obtient des F-structures à rang variable.

Par exemple, sur S^3 recouverte par deux tores solides, on peut mettre d'un côté l'action de T^2 , de l'autre, oublier cette action pour ne garder que la fibration de Hopf.

EXEMPLE e. Soient Σ_1, Σ_2 des surfaces orientées, à bord, M_1, M_2 des fibrés en cercles sur Σ_1, Σ_2 . Soit N_i , $i = 1, 2$, une composante du bord de M_i , et φ un difféomorphisme de N_1 sur N_2 . Quitte à effectuer une isotopie, on peut supposer que les fibrations en cercles N_2 et $\varphi(N_1)$ sont compatibles avec une même structure affine sur N_2 . Le recollement $M = M_1 \cup_\varphi M_2$ a donc une F-structure - de rang variable - compatible avec les fibrations données. Cette construction fournit une F-structure sur les variétés de dimension 3 obtenues en recollant des fibrés en cercles. Ces variétés s'appellent des variétés graphes, voir [Wa].

EXEMPLE f. De même que la somme connexe de deux variétés graphes et une variété graphe (voir par exemple [So]), la somme connexe de deux variétés de dimension impaire, portant des F-structures, admet une F-structure.

THÉORÈME. (J. Cheeger, M. Gromov [C-G2]) Il existe une constante $\varepsilon_n > 0$ telle que, si M admet une métrique riemannienne à $|K| \leq 1$ telle que, en tout point, le rayon d'injectivité soit inférieur à ε_n , alors M admet une F-structure, dont aucune "feuille" n'est réduite à un point.

Inversement, si M admet une F-structure sans feuille réduite à un point, alors M s'effondre.

Origine de la F-structure. Essayons de décrire les petites boules dans une suite de variétés riemanniennes (M, g_k) à courbure bornée, dont le rayon d'injectivité ε_k tend vers 0. Considérons la variété "gonflée" $(M, \varepsilon_k^{-2} g_k)$; son rayon d'injectivité est égal à 1, sa courbure sectionnelle est bornée par ε_k^2 . D'après le théorème de compacité, on peut supposer que, pour tout R fixé, les boules de rayon R convergent, au sens de Lipschitz. La limite est une boule de rayon R dans une variété plate (i.e., à courbure nulle) complète. Revenant à la variété (M, g_k) , cela signifie que les boules de rayon $R \varepsilon_k$ ressemblent à des boules de même rayon dans une variété plate, lorsque ε_k est assez petit. On peut montrer, comme dans l'exemple 1, que les petits lacets géodésiques - de longueur $\leq R \varepsilon_k$ -, "engendrent" une action d'un tore sur un revêtement fini.

Z

Attention, le théorème ci-dessus fournit une suite de métriques dont le diamètre tend en général vers $+\infty$. Pour avoir un diamètre borné, il faut une donnée supplémentaire. C'est l'exemple 4 ci-dessus qui dicte la définition suivante.

DÉFINITION. Etant donnée une F-structure pure sur M , une polarisation pure est un feuilletage $\mathfrak{F}$ (sans singularité) tel que, si la F-structure est définie localement par une action de T^k sur un revêtement $\tilde{U} \rightarrow U$, le relèvement $\mathfrak{F}$ consiste en les orbites d'un sous-groupe de T^k .

La définition d'une F-structure polarisée suit les mêmes lignes que celle d'une F-structure.

EXEMPLES. Chaque champ de vecteurs de pente $\alpha \neq 0$ est une polarisation pure de l'action de T^2 sur S^3 , dans l'exemple 3.

Les solvariétés M_φ de l'exemple b possèdent plusieurs polarisations. La fibration en tores elle-même. Les droites propres de φ font apparaître des feuilletages de rang 1, une fibration en cercles si φ est unipotent (auquel cas M_φ est une nilvariété), deux polarisations pures sinon.

La construction de l'exemple e permet d'obtenir des polarisations pour les F-structures des variétés graphes.

Les résultats connus sont rassemblés dans le tableau suivant. On note

$\chi(M)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré

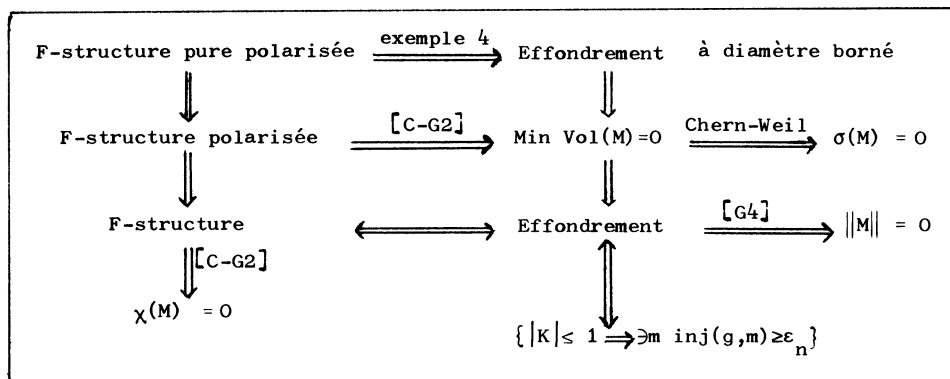
$\sigma(M)$ la signature

$\|M\|$ le volume simplicial de M , défini dans [G4] (voir aussi plus bas)

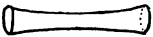
Min Vol(M) le volume minimal ; par définition, Min Vol(M) =

$\inf \{ \text{volume}(g)/g \mid |K| \leq 1 \text{ sur } M \}$

Les F -structures considérées n'ont jamais de "feuille" réduite à un point.



Nous terminons par une liste d'obstructions à l'effondrement.

α . Les surfaces autres que le tore T^2 et la bouteille de Klein. Pour la sphère S^2 , il y a un résultat optimal [Ba] = si la courbure est ≤ 1 , il existe un point où le rayon d'injectivité est au moins π . En général, on voit aisément que, si une surface à $|K| \leq 1$ a un rayon d'injectivité $\leq \frac{\pi}{8}$, elle se découpe en tubes , donc sa caractéristique d'Euler est nulle. C'est ce raisonnement qui se généralise aux dimensions supérieures.

β . Si $\chi(M) \neq 0$, alors M ne s'effondre pas.

γ . La caractéristique d'Euler, et, plus généralement, les nombres caractéristiques qui s'obtiennent en intégrant des formes dépendant de la courbure, sont nuls en dimension impaire. Pour obtenir des exemples de variétés de volume minimal non nul, en dimension impaire, M. Gromov a inventé un invariant topologique adhoc, le volume simplicial $\|M\|$. Il a les propriétés suivantes (voir [G4]) =

- il est additif dans les sommes connexes
- $\text{const}_n^{-1} \|M_1\| \|M_2\| \leq \|M_1 \times M_2\| \leq \text{const}_n \|M_1\| \|M_2\|$,
- $\|M\| \geq \text{const}_n \text{vol}(M, g)$ si g a une courbure sectionnelle $K \leq -1$,
- $\|M\| = 0$ si M admet une métrique à $|K| \leq 1$, dont le rayon d'injectivité en tout point est inférieur à ε_n ;

Par conséquent, une variété compacte, à volume simplicial non nul, $\|M\| \neq 0$, ne

s'effondre pas. On obtient de telles variétés à partir des produits de variétés à courbure négative, en faisant des sommes connexes.

En dimension 3, le volume simplicial caractérise l'effondrement. En effet, comme l'a montré T. Soma [So], il résulte du théorème d'hyperbolisation de Thurston, [T] p.359 que toute variété à volume simplicial nul est une variété graphique. Il vient

$$\text{Min Vol}(M^3) = 0 \iff M^3 \text{ s'effondre} \iff \|M^3\| = 0 \iff M^3 \text{ est une variété graphe.}$$

δ. Il est - pour l'instant - difficile de vérifier qu'une variété a un volume simplicial non nul. Il existe d'autres conditions, plus aisées à vérifier, sous lesquelles une variété ne s'effondre pas (voir [G8] p. 78). Ces conditions sont satisfaites par la plupart des variétés à courbure sectionnelle $K \leq 0$, par exemple.

En appendice, voici encore deux animaux destinés à illustrer les rapports entre F-structure, polarisation, etc...

- la somme connexe de deux tores T^3 admet une F-structure polarisée (c'est une variété graphe), mais pas de F-structure pure.

- il existe une variété de dimension 4, qui a une F-structure pure, mais une signature non nulle, donc pas de F-structure polarisée (T. Januskiewicz). On part du plan projectif complexe, et d'une action isométrique du tore T^2 qui fixe trois points. Soit U le complémentaire de trois boules centrées aux points fixes. On recolle deux exemplaires de U le long du bord, au moyen du difféomorphisme φ donné, en coordonnées homogènes, par $[z_0:z_1:z_2] \rightarrow [\bar{z}_0:z_1:z_2]$. Comme φ est affine sur les orbites de T^2 , la variété obtenue M porte une F-structure pure de rang 2. En revanche, comme φ renverse l'orientation, les signatures des deux moitiés, au lieu de se retrancher comme dans le double ordinaire, s'ajoutent, et $\sigma(M) = 2$.

D. L'ESPACE DES MÉTRIQUES A COURBURE ET DIAMÈTRE BORNÉS.

Soit M une variété compacte, et $D > 0$. On note $\mathcal{B}(M)$ l'espace des métriques riemanniennes sur M à courbure sectionnelle $|K| \leq 1$ et diamètre $\leq D$, muni de la distance de Lipschitz.

Si M ne s'effondre pas (par exemple, si $\chi(M) \neq 0$ ou $\|M\| \neq 0$), l'espace $\mathcal{B}(M)$ est compact. Cela signifie qu'il n'y a, à presque isométrie près, qu'une seule métrique sur M . Autrement dit, tous les invariants Lipschitz (volume, systoles, inégalités isopérimétriques et de Sobolev, valeurs propres du Laplacien) peuvent être bornés au moyen de la courbure sectionnelle et du diamètre. Mais cette borne est toute théorique. Il reste des quantités de problèmes passionnants.

- Calculer le volume minimal des variétés qui ne s'effondrent pas, par exemple S^4 , $\mathbb{CP}^2$, ou une variété qui admet une métrique à courbure négative.
- Calculer le pincement optimal sur $S^2 \times S^2$ (est-il positif ?).
- Calculer le diamètre minimal $\inf\{\text{diamètre}(g)/|K| \leq 1\}$ d'une surface de genre > 1 , de S^4 etc....

Si M s'effondre à diamètre borné, l'espace $\mathcal{B}(M)$ est non compact, pour D assez grand. La distance de Hausdorff en fournit une compactification. On peut donc considérer les limites Hausdorff, qui sont des espaces métriques de dimension $\leq \dim M - 1$, comme des "points idéaux" de $\mathcal{B}(M)$. Leur détermination est un problème presque totalement ouvert.

Un point peut-il être une telle limite Hausdorff ? Remarquer que des espaces métriques convergent vers un point si et seulement si leurs diamètres tendent vers 0. Alors la réponse est connue.

THÉOREME. (M. Gromov [G2], voir aussi [B-K]) Il existe une constante ε_n telle que, si une variété M , de dimension n , admet une métrique g à courbure sectionnelle $|K| \leq 1$ et diamètre $\leq \varepsilon_n$, alors M est difféomorphe à une infranilvariété, i.e., un espace localement homogène $F \times \Gamma \backslash N$, où N est un groupe de Lie nilpotent, Γ un sous-groupe discret cocompact, et F un groupe fini de difféomorphismes de $\Gamma \backslash N$ (E. Ruh [Ru] = F provient d'un groupe fini d'automorphismes de N qui normalise Γ).

Mieux, il existe une métrique g_0 sur $F \times \Gamma \backslash N$, provenant d'une métrique invariante à gauche sur N , telle que

$$\text{dist}_L(g, g_0) \leq \eta_n (\text{diamètre}(g))$$

où la fonction η_n tend vers 0 avec son argument.

En particulier, si M n'est pas une infranilvariété, alors son diamètre minimal est $\geq \varepsilon_n$, autrement dit, toutes les métriques sur M à $|K| \leq 1$, et donc, toutes leurs limites Hausdorff, ont un diamètre $\geq \varepsilon_n$.

QUESTION. Calculer le diamètre minimal de S^3 .

EXEMPLE. Les tores T^n .

Si M est une infranilvariété, pour décrire la convergence d'une suite de métriques vers un point, il suffit d'étudier les métriques localement homogènes. Or, même sur le tore T^2 , il y a plusieurs façons de converger vers un point. Par exemple, le rapport des longueurs extrémales $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ peut tendre vers 0, ou non. Alors qu'il n'y a qu'une façon de converger vers un cercle = en effet, d'après le lemme (C-exemple 1) ci-dessus, toute courbe $g(t)$ de tores T^2 plats, qui converge vers un cercle ℓT^1 de longueur ℓ est asymptote à la courbe des tores produits $\{mT^1 \times \ell T^1 : 0 < m \leq \ell\}$.

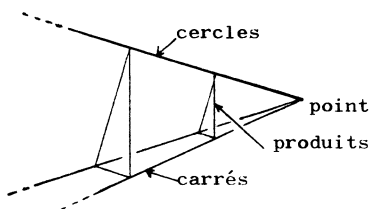
Si on veut retenir plus d'informations dans la limite (en l'occurrence, pour les métriques plates sur T^n , ce qu'il advient des rapports $\frac{\ell_i}{\ell_{i+1}}$), il faut une compactification plus fine que celle donnée par la distance de Hausdorff. Ici, on l'obtient en plongeant l'espace $\mathcal{P}$ des métriques plates sur T^n dans $\mathcal{P}^{n+1}$, muni de la distance de Hausdorff (pointée, voir [G6] p.40) par

$$g \longmapsto (g, \frac{g}{\ell_1}, \frac{g}{\ell_2}, \dots, \frac{g}{\ell_n}) .$$

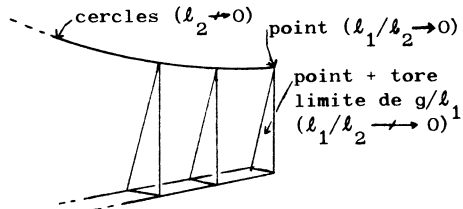
Si une suite $g(t) \in \mathcal{P}$ converge vers un point $(T_0, \dots, T_n)$ de $\mathcal{P}^{n+1}$, on peut extraire de la famille de tores plats (T_i) des tores $T_{k_1}, \dots, T_{k_p}$ dont la somme des dimensions est égale à n , et tels que $g(t)$ soit asymptote au sous-espace des tores produits

$$\{\lambda_1 T_{k_1} \times \dots \times \lambda_p T_{k_p} / 0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_p\} .$$

Cas où $n = 2$. L'espace des tores plats de diamètre 1 admet une structure d'espace localement symétrique, isomorphe à $Sl(2, \mathbb{Z}) \backslash Sl(2, \mathbb{R}) / SO(2)$, et la distance de Lipschitz est équivalente à la distance localement symétrique. La compactification de Hausdorff ajoute seulement un point à l'infini. L'espace $\mathcal{P}$ est un cône sur ce domaine modulaire compactifié. Il est homéomorphe à $\mathbb{R}^3$; on a tenté de décrire sa métrique par une figure.



distance de Hausdorff



compactification + fine

EXEMPLE. La sphère S^3 .

A chaque réel non nul α correspond un champ de Killing sur S^3 et une suite de métriques g_ϵ^α à courbure bornée, voir C, exemple 3. Si α est irrationnel, la suite g_ϵ^α converge au sens de Hausdorff vers un intervalle de longueur $\frac{\pi}{2}$. Or on pressent que, si $\alpha \neq \alpha'$, g_ϵ^α est très différente de $g_\epsilon^{\alpha'}$.

QUESTION. Estimer $\text{dist}_L(g_\epsilon^\alpha, g_\epsilon^{\alpha'})$.

En fait, on peut associer un invariant à chaque famille g_ϵ^α comme suit : si φ est une fonction $= [1, +\infty[\rightarrow]0, 1]$, on construit une métrique complète

$$g^\alpha = g_{\varphi(t)}^\alpha \oplus dt^2$$

sur $S^3 \times [1, +\infty[$. On écrit aisément les conditions sur φ pour que g^α ait une courbure sectionnelle $|K| \leq 1$ et un volume fini. Dans ce cas, l'intégrand de Chern-Weil - celui qui, intégré sur une variété riemannienne compacte, donne la signature de la variété - est intégrable, et on obtient un nombre réel $\sigma(\varphi, \alpha)$. J. Cheeger et M. Gromov ont observé que ce nombre ne dépend pas de la fonction particulière φ , seulement de α . En fait, $\sigma(\alpha) = \frac{1}{3}(\alpha + 1/\alpha)$ ([C-G1], exemple 1.7). On peut considérer ce nombre $\sigma(\alpha)$ comme le η -invariant d'un objet mystérieux - l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ muni d'une structure supplémentaire qui reste à définir. Cela indique qu'une partie de l'analyse sur les variétés riemanniennes de dimension n doit s'étendre à leurs limites effondrées (de dimension topologique inférieure, mais considérées tout de même comme objets de dimension n).

BIBLIOGRAPHIE

- [Ba] Ch. BAVARD, - Rayon d'injectivité et courbure des surfaces, à paraître.
- [B1] M. BERGER - Sur quelques variétés riemanniennes suffisamment pincées, Bull. Soc. Math. France 88 (1960) 57-71
- [B2] M. BERGER - On the diameter of some riemannian manifolds, preprint Univ. California at Berkeley (1961).
- [B3] M. BERGER - Sur les variétés riemanniennes pincées juste en dessous de $1/4$, Ann. Inst. Fourier 33 (1983) 135-150 .
- [B4] M. BERGER - H.E. Rauch, géomètre différentiel, à paraître.
- [Br] D. BRITTAIN - à paraître
- [B-K] P. BUSER, H. KARCHER - Gromov's almost flat manifolds, Astérisque n°81 , Soc. Math. France (1981).
- [Ca] Y. CARRIERE - Les propriétés topologiques des flots riemanniens retrouvées à l'aide du théorème des variétés presque plates, preprint univ. Lille (1983).
- [C] J. CHEEGER - Finiteness theorems for Riemannian manifolds, Amer. J. Math. 92 (1970) 61-74.
- [C-E] J. CHEEGER, D.G. EBIN - Comparison theorems in Riemannian geometry, North Holland, New-York (1975).
- [C-G1] J. CHEEGER, M. GROMOV - On the Characteristic numbers of complete manifolds of bounded curvature and finite volume, à paraître
- [C-G2] J. CHEEGER, M. GROMOV - Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded, en préparation.
- [G-M] D. GROMOLL, W. MEYER - à paraître.

- [G1] M. GROMOV - Manifolds of negative curvature, J. Diff. Geometry 13 (1978), 223-230 .
- [G2] M. GROMOV - Almost flat manifolds, J. Diff. Geometry 13 (1978). 231-241.
- [G3] M. GROMOV - Synthetic Riemannian Geometry, Proc. of the International Congress of Mathematicians at Helsinki (1978), volume 1 , p 415-419.
- [G4] M. GROMOV - Volume and bounded cohomology, Publ. Math. I.H.E.S. 56 (1983), 213-307.
- [G5] M. GROMOV - - Groups of polynomial growth and expanding maps, Publ. Math. I.H.E.S. 53 (1981), 53-78.
- [G6] M. GROMOV - Structures métriques pour les variétés riemanniennes, notes de cours rédigées par J. Lafontaine et P. Pansu, Cédic-Fernand-Nathan, Paris (1981).
- [G7] M. GROMOV - Curvature, diameter and Betti numbers, Comment. Math. Helv.56 (1981), 179-195 .
- [G8] M. GROMOV - Filling Riemannian Manifolds, J. Diff. Geom. 18 (1983), 1-148.
- [H] E. HEINTZE - Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung, preprint Univ. Bonn1976.
- [H-R] H. HOPF, W. RINOW - "Über den Begriff der vollständigen differential geometrischen Flächen, Comment. Math. Helv. 3 (1931) , 209-225.
- [K1] W. KLINGENBERG - Contributions to Riemannian geometry in the large, Ann. Math. 69 (1959) 654-666.
- [K2] W. KLINGENBERG - "Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positive Krümmung, Comment. Math. Helv.35 (1961), 47-54.
- [Ma] J.W.S. CASSELS - An introduction to the geometry of numbers, Springer (1959), p.137 .
- [M] G.A. MARGULIS - Groupes discrets d'isométries des variétés à courbure négative , Proc. International Congress of Mathematicians at Vancouver, volume 2, p.21-34. Can. Math. Congress (1974)(en russe).

- [P] S. PETERS - à paraître.
- [R] H.E. RAUCH - A contribution to differential geometry in the large, Ann. Math.54 (1951), 38-55.
- [Ru] E.A. RUH - Almost flat manifolds, J. Diff. Geom. 17 (1982), 1-14.
- [Sa] T. SAKAI - Comparison and finiteness theorems in Riemannian geometry, pre-print univ. Okayama (1983).
- [So] T. SOMA - The Gromov invariant for links, Inv. Math. 64 (1981), 445-454.
- [T] W. THURSTON - Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 357-382.
- [Ti] J. TITS - Groupes à croissance polynomiale, d'après M. Gromov, et al. Séminaire Bourbaki, exposé n°572 p.176-188, Lecture Notes n°901, Springer (1981).
- [Wa] F. WALDHAUSEN - Eine klasse von 3 - dimensionalen Mannigfaltigkeiten II, Inv. Math. 4 (1967), 87-117.
- [W] A. WEINSTEIN - On the homotopy type of positively pinched manifolds, Arch. Math. 18 (1967) 523-524.

Pierre PANSU
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau
F - 91128 PALAISEAU CEDEX