Astérisque

MYRIAM DÉCHAMPS-GONDIM

Analyse harmonique, analyse complexe et géométrie des espaces de Banach

Astérisque, tome 121-122 (1985), Séminaire Bourbaki, exp. nº 623, p. 171-195

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1983-1984__26__171_0>

Séminaire BOURBAKI
36e année, 1983/84, n° 623

Février 1984

ANALYSE HARMONIQUE, ANALYSE COMPLEXE ET GÉOMÉTRIE DES ESPACES DE BANACH

(d'après Jean Bourgain)

par Myriam DÉCHAMPS-GONDIM

Introduction

Au cours de la dernière décennie la géométrie des espaces de Banach a développé un certain nombre de techniques en théorie des opérateurs - méthode d'extrapolation, opérateurs p-sommants - qui permettent de reformuler des théorèmes classiques d'analyse ou des questions ouvertes, et parfois d'y apporter des solutions. En voici un exemple : soit $A(D)$ l'algèbre du disque et $C(T)$ l'espace de fonctions continues sur le cercle ; N. Th. Varopoulos vers 1970 avait demandé si le produit tensoriel projectif $A(D)\hat{\otimes} A(D)$ était une sous-algèbre fermée de $C(T)\hat{\otimes}C(T)$. Cette question équivaut à la suivante : tout opérateur du dual de $A(D)$ dans un espace de Hilbert est-il absolument sommant ?

J. Bourgain [9] résout positivement cette question en utilisant des méthodes d'espaces de Banach et la logmodularité de l'algèbre du disque. Nous en parlerons à la section 1.

A la section 2 nous regroupons des résultats où les techniques probabilistes - travaux de D. Burkholder, R. F. Gundy, B. Maurey - interviennent fortement, notamment pour la classification isomorphique des espaces de fonctions analytiques en plusieurs variables.

La plupart des résultats des sections 1 et 2 répondent à des questions posées par A. Pelczynski [65] dans un article fondamental de 1976.

La section 3 contient des résultats d'analyse harmonique. Dans 3A une étude des sous-espaces invariants par translation de $L^p(G)$, G groupe abélien compact, permet de caractériser certains multiplicateurs idempotents de $L^p(G)$ par les propriétés arithmétiques de leur spectre.

G. Pisier, en reliant les résultats de X. Fernique sur les processus gaussiens stationnaires aux méthodes de la géométrie des espaces de Banach a fait évoluer la théorie des ensembles de Sidon ([73], [74], [75]). Dans 3.B. nous présentons les progrès récents de cette théorie dus à J. Bourgain qui ajoute aux techniques précédentes des outils combinatoires.

Nous avons voulu donner un aperçu d'ensemble des résultats d'analyse dus à J. Bourgain. Etant donné leur diversité l'aventure n'était pas sans risques : nous avons dû réduire les sections 2 et 3 à l'énoncé des théorèmes et nous n'avons pas pu inclure les résultats propres à la géométrie des espaces de Banach ou à la théorie des idéaux d'opérateurs.

La seule esquisse de démonstration se trouve à la section 1, elle concerne la propriété de Grothendieck et de cotype 2 de L^1/H^1_o, sous une forme un peu plus générale, dans une version extrêmement récente.

Nous rappelons quelques notations et définitions usuelles.

Si X et Y sont deux espaces de Banach, le produit tensoriel projectif $X \hat{\otimes} Y$ (noté aussi $X \hat{\otimes}_\pi Y$) est le complété de $X \otimes Y$ pour la norme

$$\|z\|_{X \hat{\otimes} Y} = \inf\Big\{ \sum_{1\le i\le n} \|x_i\|\|y_i\| \;;\; z = \sum_{1\le i\le n} x_i \otimes y_i \Big\}.$$

Soient (Ω,Σ,ν) un espace de probabilité et X un espace de Banach. Pour $1\le p\le\infty$, $L^p(X) = L^p(\Omega,X) = L^p(\nu,X)$ est l'espace des (classes de) fonctions mesurables f de Ω dans X qui sont limites presque partout de fonctions étagées et qui vérifient $\|f\|_p^p = \int_\Omega \|f(y)\|^p \, d\nu(y) < \infty$, $p\ge 1$ $\big(\|f\|_\infty = \sup\text{ess}_{y\in Y} \|f(y)\|\big)$. On pose $\ell^p(X) = L^p(N,X)$, $\ell^p = L^p(N,\mathbb{C})$, $\ell^p_n = L^p(\{1,\dots n\},\mathbb{C})$, $1\le p\le\infty$.

Un espace de Banach X est un espace $\mathcal{L}^p$, $1\le p\le\infty$, s'il existe $\lambda\ge 1$ tel que pour tout sous-espace de dimension finie E de X il existe un sous-espace F de X de dimension finie (notée n) contenant E et tel que $\lambda \ge d(F,\ell^p_n) = \inf\{\|T\|\|T^{-1}\|,\ T : F \to \ell^p_n \text{ isomorphisme}\}$. En abrégé, $\mathcal{L}^p$ a même structure locale que ℓ^p.

Dans toute la suite on note $\Omega_o = \{-1,1\}^N$, μ est la mesure de Haar de Ω_o et $\varepsilon_n : \Omega \to \{-1,1\}$ la projection sur la $n^{\text{ième}}$ coordonnée (ou $n^{\text{ième}}$ fonction de Rademacher).

1. ANALYSE COMPLEXE EN UNE VARIABLE

Soient D le disque ouvert $\{z\in\mathbb{C} \;;\; |z|<1\}$ et T le cercle unité $\{z\in\mathbb{C} \;;\; |z|=1\}$. L^p, $1\le p\le\infty$, désigne $L^p(T,m)$, où m est la mesure de Haar normalisée de T. $C(T)$ est l'espace des fonctions continues sur T, muni de la norme uniforme. $A(D)$ (resp. H^p, $p\ge 1$, H^∞) est le sous-espace fermé (resp. $\sigma(L^\infty,L^1)$ fermé si $p=\infty$) de $C(T)$ (resp. L^p, L^∞) engendré par $\{e^{int},\ n\ge 0\}$. $A(D)$ et H^p, $1\le p\le\infty$, s'identifient à des espaces de fonctions holomorphes dans D. H^1_o est le sous-espace de H^1 des fonctions f telles que $\hat{f}(0) = 0$.

La projection de Riesz $\mathcal{R}$ est la projection orthogonale de L^2 sur H^2.

1.A. L^1/H^1_o <u>est-il de cotype</u> 2 ?

A. Pelczynski pose cette question dans [65], dans une étude qui met en évidence les connexions entre des résultats d'analyse classique et la théorie générale des espaces de Banach, par exemple : théorème de Riesz et opérateurs p-sommants sur $A(D)$, projection de Paley de H^1 sur ℓ^2 et théorème de Grothendieck. Cette étude cherche aussi à comparer le comportement des espaces $A(D)$, H^1 et H^∞ (qui ne sont pas des espaces $\mathcal{L}^\infty$ ou $\mathcal{L}^1$) à celui de $C(T)$, L^1 ou L^∞, en tant qu'espaces de Banach. La question posée est liée à des problèmes de factorisation et extension d'opérateurs : est-ce que tout opérateur de $A(D)$ dans son dual $A(D)'$ se factorise par un espace de Hilbert ? Est-ce que tout opérateur d'un sous-espace réflexif de L^1 dans H^∞ admet une extension à L^1 ? $A(D)\hat{\otimes}A(D)$ est-elle une sous-algèbre fermée de $C(T)\hat{\otimes}\, C(T)$? Examinons les relations entre ces questions et comment J. Bourgain ([11] [13]) y répond positivement.

DÉFINITION 1. Un espace de Banach X est de cotype q $(2\leq q<\infty)$ s'il existe une constante C telle que pour toute suite finie $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments de X,

$$\Big(\sum_{1\leq i\leq n} \|x_i\|^q\Big)^{1/q} \leq C \int_{\Omega_o} \Big\| \sum_{1\leq i\leq n} \varepsilon_i(\omega)\, x_i \Big\| \, d\omega$$

($(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ est la suite de fonctions de Rademacher). L^p est de cotype 2 pour $1\leq p\leq 2$ et le cotype ne "passe" pas en général aux quotients ([61]).

DÉFINITION 2. Soient X et Y deux espaces de Banach et $0<p<\infty$. Un opérateur $u : X \to Y$ est p sommant s'il existe une constante λ telle que pour toute suite finie $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments de X,

$$\Big(\sum_{1\leq i\leq n} \|u(x_i)\|^p\Big)^{1/p} \leq \lambda \sup\Big\{ \sum_{1\leq i\leq n} |\xi(x_i)|^p,\ \xi\in X',\ \|\xi\|\leq 1\Big\}^{1/p}.$$

La plus petite de ces constantes λ est notée $\pi_p(u)$; l'espace des opérateurs p-sommants de X dans Y est noté $\Pi_p(X,Y)$, celui de tous les opérateurs (linéaires bornés) de X dans Y, $B(X,Y)$.

DÉFINITION 3. Nous dirons qu'un espace de Banach X vérifie le théorème de Grothendieck si

(1.1) $\quad B(X, \ell^2) = \Pi_1(X, \ell^2)$.

La condition (1.1) est équivalente aux conditions suivantes [66] :

(1.2) $\quad B(X'', \ell^2) = \Pi_1(X'', \ell^2)$

(1.3) $\quad B(X', \ell^1) = \Pi_2(X', \ell^1)$.

Ces conditions sont vérifiées si $X = L^1$ (A. Grothendieck [48]), si X est un espace $\mathcal{L}^1$ ([55]), et si X est le quotient d'un espace $\mathcal{L}^1$ par un sous-espace réflexif (G. Pisier [66] et S. V. Kisliakov [52], indépendamment). B. Maurey [60] montre que si E est un espace $\mathcal{L}^\infty$ et Y un espace de cotype 2, $B(E,Y) = \Pi_2(E,Y)$, ce qui implique que tout opérateur u de E dans Y se factorise par un Hilbert. Plus généralement, G. Pisier [68] montre que si E' et F sont de cotype 2 et si E ou F a la propriété d'approximation bornée alors tout opérateur de E dans F se factorise par un Hilbert. G. Pisier [67] et U. Haagerup [49] généralisent le résultat de B. Maurey au cas des C^*-algèbres.

Revenons à l'espace L^1/H^1_0, qui échappe à toutes ces généralisations. On a $A(D)' = L^1/H^1_0 \oplus M_s(T)$, où $M_s(T)$ est l'espace des mesures singulières sur T (c'est un espace $\mathcal{L}^1$, [65]). Il est donc équivalent de dire que $A(D)'$, ou L^1/H^1_0, est de cotype 2 et vérifie le théorème de Grothendieck, et ces propriétés ont plusieurs formulations.

PROPOSITION FONDAMENTALE. Notons R le sous-espace de $L^1(\Omega_0,\mu)$ engendré par la suite $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ des fonctions de Rademacher. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1.4) $A(D)'$ est de cotype 2 et $B(A(D)', \ell^2) = \Pi_1(A(D)', \ell^2)$

(1.5) $A(D)'$ est de cotype 2 et $B(A(D), \ell^1) = \Pi_2(A(D), \ell^1)$

(1.6) Il existe une constante C telle que tout opérateur $u : R \to H^\infty$ admet une extension $\tilde{u} : L^1(\Omega,\mu) \to H^\infty$ telle que $\|\tilde{u}\| \leq C\|u\|$

(1.7) Le produit tensoriel projectif $R \hat{\otimes} L^1/H^1_0$ est fermé dans $L^1 \hat{\otimes} L^1/H^1_0$

(1.8) Il existe une constante C telle que pour toute suite finie $x_1, \dots, x_n$ dans L^1/H^1_0 il existe une suite $f_1, \dots, f_n$ telle que $q(f_i) = x_i$ pour $1 \leq i \leq n$ ($q : L^1 \to L^1/H^1_0$ est l'application quotient) et

$$\int_{\Omega_0} \Big\| \sum_{1\leq i\leq n} \varepsilon_i(\omega) f_i \Big\|_{L^1(T)} d\omega \leq C \int_{\Omega_0} \Big\| \sum_{1\leq i\leq n} \varepsilon_i(\omega) x_i \Big\|_{L^1/H^1_0} d\omega.$$

(1.9) $A(D) \hat{\otimes} A(D)$ est une sous-algèbre fermée de $C(T) \hat{\otimes} C(T)$.

Les preuves de ces équivalences sont, sous forme explicite ou implicite, dans [66], [71], [11], [13]. Elles expliquent l'intérêt porté au problème du cotype 2 de L^1/H^1_0. Dans [65] on montre que L^1/H^1_0 est de cotype q pour un $q > 8$, ensuite S. V. Kisliakov d'une part, G. Pisier et J. Bourgain d'autre part, s'aperçoivent que L^1/H^1_0 est de cotype q pour tout $q > 2$. J. Bourgain, dans des travaux successifs, fournit trois approches, que nous allons esquisser, pour montrer que

L^1/H^1_o est de cotype 2.

Première approche. En établissant un lemme de décomposition (lemme 1.3) basé sur la logmodularité de H^∞, et la méthode d'extrapolation introduite par B. Maurey [60], J. Bourgain obtient le résultat suivant.

THEOREME 1.1 [11]. L^1/H^1_o et $A(D)'$ vérifient le théorème de Grothendieck.

On ne sait pas si un espace de Banach X vérifiant le théorème de Grothendieck est de cotype 2. Mais c'est bien le cas si X est isomorphe à $\ell^1(X)$ [63], et L^1/H^1_o a cette dernière propriété (P. Wojtaszczyk [83]). Les conditions équivalentes de la proposition fondamentale sont donc vérifiées. Cette approche permet aussi de répondre à des questions sur la structure locale de $A(D)$, posées dans [65].

1.B. Deuxième approche : projections analytiques.

Dans [13], J. Bourgain obtient la généralisation de la propriété d'extension (1.6) aux sous-espaces réflexifs de L^1 et de L^1/H^1_o. Il retrouve donc que L^1/H^1_o est de cotype 2, sans utiliser le travail de P. Wojtaszczyk. Les ingrédients de départ sont ici les mêmes que dans [11] (lemme de décomposition et méthode d'extrapolation) mais la preuve est conceptuellement plus claire. Tout d'abord J. Bourgain établit un résultat frappant d'analyse.

THÉORÈME 1.2 [13]. Il existe une constante C telle que pour toute fonction Δ dans L^1, $\Delta \geq 0$, il existe une fonction Δ_1 dans L^1 satisfaisant $\Delta_1 \geq \Delta$, $\int_T \Delta_1 dm \leq C \int_T \Delta\, dm$, et une projection P de $L^2(\Delta_1)$ dans $H^2(\Delta_1)$ (non nécessairement orthogonale) qui est un opérateur borné sur $L^p(\Delta_1)$ pour $1<p<\infty$ et un opérateur borné de $L^1(\Delta_1)$ dans $L^{1,\infty}(\Delta_1)$.

Nous dirons que P est une projection analytique. On ne peut prendre pour P la projection de Riesz usuelle que si Δ_1 satisfait à la condition (A_1) de Muckenhoupt [47]. Sinon, 1.2 fournit un substitut adéquat à la projection de Riesz $\mathcal{R}$, d'où son intérêt. B. Mitjagin et A. Pelczynski [65] ont donné le premier exemple d'une projection bornée de $L^p(\Delta_1)$ dans $H^p(\Delta_1)$, lorsque $\log \Delta_1 \in L^1$, pour un p fixé. S. V. Kisliakov [53] a étendu le résultat à $1 < p \leq 2$. La preuve de 1.2 dépend du lemme suivant, où la logmodularité de H^∞ intervient crucialement.

LEMME DE DÉCOMPOSITION 1.3. Il existe une constante C telle que pour toute fonction f dans L^1, $f \geq 0$, il existe une suite $(c_i)_{i\geq 0}$ de nombres positifs et deux suites $(\theta_i)_{i\geq 0}$ et $(\tau_i)_{i\geq 0}$ de fonctions de H^∞ satisfaisant aux conditions suivantes :

1. $\|\theta_i\|_\infty \le 1$, $i \ge 0$, 2. $\|\sum_{i\ge 0} |\tau_i|\|_\infty \le C$, 3. $\sum_{i\ge 0} \theta_i \tau_i^5 = 1$ p. s.

Si on pose $F = \sum_{i\ge 0} c_i |\tau_i|$, on a

4. $f \le F$, 5. $|\tau_i| F \le C c_i$ pour $i \ge 0$, 6. $\|F\|_1 \le C\|f\|$.

La suite $(\tau_i)_{i\ge 0}$ joue le rôle d'une partition de l'unité par rapport aux ensembles de niveau de f et les fonctions θ_i ont un rôle technique. Pour la preuve de 1.2, on considère $f = 1 + \Delta$ dans 1.3, on pose $\Delta_1 = F$ et on montre que P définie par $P(\varphi) = \sum_{i\ge 0} \theta_i \tau_i^4 \mathcal{R}(\tau_i \varphi)$ pour φ dans $L^2(\Delta_1)$ a les propriétés voulues.

THÉORÈME 1.4. Soient (Ω, Σ, ν) un espace de probabilité et Y un sous-espace de $L^1(\nu)$. Supposons qu'il existe $r > 1$ et une constante C tels que pour tout y dans Y, $\|y\|_{L^r(\nu)} \le C\|y\|_{L^1(\nu)}$. Alors tout opérateur linéaire borné $u : Y \to H^\infty$ a une extension $\tilde{u} : L^1(\nu) \to H^\infty$ telle que $\|\tilde{u}\| \le K\|u\|$, où K ne dépend que de r et C.

REMARQUE. D'après un résultat de H. P. Rosenthal [77], tout sous-espace réflexif de $L^1(\nu)$ satisfait à l'hypothèse précédente sur Y (quitte à changer ν en une probabilité $f\nu$, $f \in L^1(\nu)$). Il est aussi équivalent de dire que Y est de type p pour un $p > 1$ (voir [61] pour cette notion). Cette hypothèse de réflexivité est essentielle ($Y = H^1$ fournit un contre-exemple [13]).

Dans [13], pour établir 1.4 on démontre la propriété de relèvement 1.8 (où les ε_i sont remplacés par des éléments y_i dans Y) ; une projection analytique adéquate permet d'exhiber un relèvement et la méthode d'extrapolation, de conclure. Les conditions équivalentes de la proposition fondamentale sont donc satisfaites. Le théorème 1.4 a des retombées en théorie des opérateurs [13] et entraîne :

COROLLAIRE 1.5 [13]. Soient (Ω, Σ, ν) un espace de probabilité et $(\gamma_i)_{i\ge 1}$ une suite de variables indépendantes p-stables ($1<p\le 2$). Il existe $C_p>0$ telle que pour toute suite finie $(x_i)_{1\le i\le n}$ d'éléments de L^1/H^1_0

$$C_p \sup \Big|\sum_{1\le i\le n} \langle x_i, \varphi_i\rangle\Big| \le \int_\Omega \Big\|\sum_{1\le i\le n} \gamma_i(\omega) x_i\Big\|_{L^1/H^1_0} d\omega \le \sup \Big|\sum_{1\le i\le n} \langle x_i, \varphi_i\rangle\Big|$$

où le supremum est pris par rapport à toutes les suites $(\varphi_i)_{1\le i\le n}$ de H^∞ satisfaisant $\sum_{1\le i\le n} |\varphi_i|^{p'} \le 1$, $p' = p/p-1$ (ce résultat ne subsiste pas en deux variables [36]).

THÉORÈME 1.6 [13]. Soient Y un sous-espace réflexif de L^1/H^1_0 et $u : Y \to H^\infty$

un opérateur linéaire borné. Alors u a une extension $\tilde{u} : L^1/H^1_o \to H^\infty$.

La preuve de 1.6 suit les mêmes lignes que celle de 1.4, mais la propriété de relèvement correspondante dépend ici d'une inégalité d'interpolation à poids en deux variables ([13], prop. 4.4) qui généralise une inégalité de S. V. Kisliakov [54] pour $\mathcal{R} \otimes \mathcal{R}$.

Les opérateurs continus de L^1/H^1_o dans H^∞ correspondent aux fonctions bianalytiques bornées sur D^2, donc 1.6 permet d'obtenir des résultats d'interpolation en deux variables qui généralisent des résultats scalaires, par exemple :

COROLLAIRE 1.7 [13]. Soit $\Lambda = \{\lambda_k, k\geq 1\} \subset \mathbf{Z}$ un ensemble $\Lambda(2)$ [78]. Soit $(\varphi_k)_{k\geq 1}$ une suite de fonctions de H^∞ faiblement 2-sommable ($\sup_{z\in D} \sum_{k\geq 1} |\varphi_k(z)|^2<\infty$). Alors il existe Φ dans $H^\infty(D \times D)$ telle que pour $k\geq 1$, $\int_T \Phi(x,t)e^{-i\lambda_k x}\, dx = \varphi_k(t)$ $(t\in T)$.

Ces résultats sont liés au problème de la caractérisation des multiplicateurs de $A(D^m)$ dans $\ell^1(N^m)$: si $a = (a_k)_{k\in\mathbf{N}^m}$ est une suite de nombres réels positifs telle que pour toute fonction f de $A(D^m)$, $\sum_{k\in\mathbf{N}^m} a_k |\hat{f}(k)| < \infty$, est-ce que $\sum_{k\in\mathbf{N}^m} |a_k|^2 < \infty$? La réponse positive à cette question a été donnée par Paley [64] lorsque $n = 1$ et par S. V. Kisliakov [54], sous une forme plus forte, lorsque $n = 2$. La réponse n'est pas connue pour $n \geq 3$. Pour $n = 2$ la réponse peut être retrouvée comme conséquence du résultat plus général suivant.

COROLLAIRE 1.8 [13]. Si $(f_j)_{j\geq 1}$ est une suite de fonctions de L^1, l'application définie dans $H^\infty(D^2)$ par $\Phi \longmapsto (\langle \Phi(e^{-ijx}), f_j\rangle)_{j\geq 1}$ est une application linéaire continue de $H^\infty(D^2)$ dans ℓ^1 si et seulement si $\inf_{h_j\in H^1_o} \int_T \left(\sum_{j\geq 1} |f_j+h_j|^2\right)^{1/2} dm < \infty$.

1.C. <u>Troisième approche</u> : <u>Esquisse d'une démonstration</u>.

Tout récemment, J. Bourgain [37] a obtenu une propriété d'extension vectorielle de la projection de Riesz (théorème 1.9) qui permet de démontrer le théorème 1.4 sans faire appel au théorème 1.2. Apparemment cette méthode ne permet pas de démontrer le théorème 1.5. Signalons qu'en dimension supérieure à un, ces approches ne peuvent pas aboutir [36] et on ne sait pas si $A(D^n)'$, lorsque $n > 1$, est de cotype 2 ou vérifie le théorème de Grothendieck.

THÉORÈME 1.9 [37]. Soient p et α satisfaisant $1<p<\infty$ et $0<\alpha<1$, (Ω, Σ, P) un espace de probabilité, $J : L^1(\Omega) \to L^\alpha(\Omega)$ l'inclusion canonique. Alors l'application

$\mathcal{R}' = \mathcal{R} \otimes J$ s'étend en un opérateur borné de $L^p(L^1) = L^p(T, L^1(\Omega))$ dans $L^p(L^\alpha) = L^p(T, L^\alpha(\Omega))$.

Démonstration. Supposons Ω discret afin d'éviter des problèmes de mesurabilité (on pourra s'y ramener dans la suite). D'après les théorèmes d'interpolation entre espaces de Lorentz ([3] , l'extension au cas de L^α, qui est quasi-normé, n'offre pas de difficultés) il nous suffit de montrer que $\mathcal{R}'$ s'étend en un opérateur borné

(i) de $L^1(L^1)$ dans $L^{1,\infty}(L^\alpha)$ (ii) de $L^{q,1}(L^1)$ dans $L^{q,\infty}(L^\alpha)$ $(q>p)$.

Vérifions (i). Soit $f \in L^1(T) \otimes L^1(\Omega)$, $f(t,\omega) = \sum_{1\le i\le n} f_i(t) \otimes g_i(\omega)$, $(t,\omega) \in T \times \Omega$. Alors $\mathcal{R}'f = \sum_{1\le i\le n} (\mathcal{R}f_i) \otimes g_i \in L^{1,\infty}(T) \otimes L^\alpha(\Omega)$ et $\|\mathcal{R}'f\|_{L^{1,\infty}(L^\alpha)} = \sup_{\lambda>0} \lambda(\int_T \chi_\lambda(t)\, dt)$, où χ_λ est la fonction caractéristique de l'ensemble $\left\{\|\mathcal{R}'f\|_{L^\alpha(\Omega)} > \lambda\right\}$. Pour tout $\lambda > 0$,

$$\lambda^\alpha(\int_T \chi_\lambda(t)\, dt) \le \int_T\int_\Omega |\mathcal{R}'f(t,\omega)|^\alpha \chi_\lambda(t)\, d\omega dt \le C_\alpha \int_\Omega \|\mathcal{R}'f(t,\omega)\|^\alpha_{L^{1,\infty}(T)} (\int_T \chi_\lambda(t) dt)^{1-\alpha} d\omega \le$$

$$\le C'_\alpha (\int_T \chi_\lambda(t)\, dt)^{1-\alpha} \|f\|^\alpha_{L^1(L^1)}$$

(on a la dernière inégalité car $\mathcal{R}$ est un opérateur borné de L^1 dans $L^{1,\infty}$, l'avant dernière résulte de l'estimation suivante : si $u \in L^1$, $v \in L^\infty$ et $0 < \alpha < 1$, $\int_T |u|^\alpha |v|\, dm \le C \|u\|^\alpha_{L^{1,\infty}} \|v\|^{1-\alpha}_{L^1} \|v\|^\alpha_{L^\infty}$). On a donc $\lambda \int \chi_\lambda(t) dt \le C''(\alpha) \|f\|_{L^1(L^1)}$, ce qui établit (i).

Pour démontrer (ii) nous aurons besoin d'une version à poids de (i), qui se démontre de façon analogue :

(i') Soit Δ une fonction positive de L^1 satisfaisant à la condition (A_1) de Muckenhoupt $(\sup_I (\frac{1}{I}\int_I \Delta\, dm)(\sup_{x\in I} \mathrm{ess} \frac{1}{\Delta(x)}) < \infty$, $I \subset T$ intervalle). Alors $\mathcal{R}'$ s'étend en un opérateur continu de $L^1(\Delta m, L^1(\Omega))$ dans $L^{1,\infty}(\Delta m, L^\alpha(\Omega))$, $0<\alpha<1$.

Vérifions (ii). Soit $f \in L^{q,1}(T) \otimes L^\alpha(\Omega)$, alors $\mathcal{R}'f \in L^{q,\infty}(T) \otimes L^\alpha(\Omega)$ et $\|\mathcal{R}'f\|_{L^{q,\infty}(L^\alpha)} = \sup_{\lambda>0} \lambda (\int_T \chi_\lambda(t)\, dt)^{1/q}$ (χ_λ comme dans (i)). Pour tout $\lambda > 0$,

$$\lambda^q \int_T \chi_\lambda(t)\, dt \le \lambda \int_T \|\mathcal{R}'f\|^{q-1}_{L^\alpha} \chi_\lambda(t)\, dt \le \|\mathcal{R}'f\|_{L^{1,\infty}(\eta_o m, L^\alpha(\Omega))} \quad \text{où } \eta_o = \|\mathcal{R}'f\|^{q-1}_{L^\alpha(\Omega)}.$$

Appliquons à η_o le procédé utilisé par S. V. Kisliakov dans [53] : soit $\eta = \sum_{j\ge 0} \delta^j M^j(\eta_o)$, où δ est assez petit pour que $\|\eta\|_{L^{q',\infty}} \le 2\|\eta_o\|_{L^{q',\infty}}$, $q' = q/(q-1)$ (M désigne l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood [47], $M^j = M \circ M^{j-1}$).

Alors $\eta \geq n_o$ et η est un poids (A_1) (car $M\eta \leq \delta^{-1}\eta$ [47]). D'après (i'),

$$\|\mathcal{R}'f\|_{L^{1,\infty}(\eta_o m,L^\alpha)} \leq \|\mathcal{R}'f\|_{L^{1,\infty}(\eta m,L^\alpha)} \leq C\|f\|_{L^1(\eta m,L^1)}$$

$$\leq C\|\eta\|_{L^{q',\infty}} \big\| \|f(t,\omega)\|_{L^1(\Omega)} \big\|_{L^{q,1}(T)} \leq 2C\|\eta_o\|_{L^{q',\infty}} \|f\|_{L^{q,1}(L^1)}.$$

Or, $\|\eta_o\|^{q'}_{L^{q',\infty}} = \|\mathcal{R}' f\|^q_{L^{q,\infty}}$, donc pour tout $\lambda > 0$,

$$\lambda^q \int_T \chi_\lambda(t)\, dt \leq 2C \|f\|_{L^{q,1}(L^1)} \|\mathcal{R}' f\|^{q/q'}_{L^{q,\infty}}.$$

En prenant le supremum en λ on obtient (ii).

REMARQUE. Le théorème 1.9 a des versions dans le cadre des espaces invariants par réarrangement sur Ω, et on peut remplacer la projection de Riesz par une transformation de martingales ou une intégrale singulière de type Calderón-Zygmund [37] ; 1.9 a des applications à l'étude de l'uniforme convexité complexe [37].

Démonstration du théorème 1.4. Nous allons montrer que $Y \hat{\otimes} L^1/H^1_o$ est fermé dans $L^1 \hat{\otimes} L^1/H^1_o$; il nous suffit de montrer qu'il existe une constante C telle que étant donnés $y_1, \ldots, y_n$ linéairement indépendants dans Y et $x_1, \ldots, x_n$ dans L^1/H^1_o,

$$\Big\| \sum_{1\leq i\leq n} y_i \otimes x_i \Big\|_{Y\hat{\otimes} L^1/H^1_o} \leq C \Big\| \sum_{1\leq i\leq n} y_i \otimes x_i \Big\|_{L^1\hat{\otimes} L^1/H^1_o}.$$

Soit q l'application quotient de L^1 dans L^1/H^1_o et $\sigma : L^1/H^1_o \rightsquigarrow L^1$ le relèvement de norme minimum de L^1/H^1_o dans L^1 (si $x \in L^1/H^1_o$, $\sigma(x)$ est l'unique f dans L^1 telle que $g(f) = x$ et $\|f\|_1 = \|x\|_{L^1/H^1_o}$; σ n'est pas linéaire mais elle est continue [51]). Pour chaque $\omega \in \Omega$ fixé, posons $f(t,\omega) = \sigma(\sum_{1\leq i\leq n} y_i(\omega)x_i)(t)$; alors $f(.,\omega) - \sum_{1\leq i\leq n} y_i(\omega)\,\sigma(x_i) \in H^1_o$ et

$$\|f\|_{L^1(T\times\Omega)} = \int_\Omega \Big\|\sum_{1\leq i\leq n} y_i(\omega)x_i\Big\|_{L^1/H^1_o} d\omega = \Big\| \sum_{1\leq i\leq n} y_i \otimes x_i \Big\|_{L^1\hat{\otimes} L^1/H^1_o}.$$

Posons $g(t) = \int_\Omega |f(t,\omega)|\, d\omega + \tau \sum_{1\leq i\leq n} |\sigma(x_i)(t)|$ $(t\in T,\ \tau>0$ arbitraire). Alors $\log(g+\tau) \in L^1$ et il existe une fonction Φ extérieure telle que $|\Phi(t)| = g(t) + \tau$, $t \in T$ [46]. On a alors

$$\|f\|_{L^1(T\times\Omega)} + \tau \sum_{1\leq i\leq n} \|x_i\|_{L^1/H^1_o} = \|g\|_{L^1(T)} \geq \int_T g^2 |\Phi^{-1}|\, dm = \|\Phi^{-1/2} f\|^2_{L^2(L^1)}.$$

Notons $\mathcal{R}^-$ la projection de Riesz négative (projection orthogonale de L^2 sur $\overline{H^2}$). Puisque $|\Phi^{-1/2}\sigma_i(x)| \leq \tau^{-1} g^{1/2}$, $\Phi^{-1/2}\sigma_i(x) \in L^2$; posons $f_i = \Phi^{1/2}\mathcal{R}^-(\Phi^{-1/2}\sigma(x_i))$, alors $f_i - \sigma(x_i) = \Phi^{1/2}(\mathcal{R}^- - \mathrm{Id})(\Phi^{-1/2}\sigma(x_i)) \in H^1_o$, donc $q(f_i) = x_i$ $(1 \leq i \leq n)$. On a

$$\Big\| \sum_{1\leq i\leq n} y_i \otimes x_i \Big\|_{Y \hat{\otimes} L^1/H^1_o} \leq \Big\| \sum_{1\leq i\leq n} y_i \otimes f_i \Big\|_{L^1(T\times\Omega)} \leq$$

$$\leq \|\Phi^{1/2}\|_{L^2(T)} \Big\| \sum_{1\leq i\leq n} y_i \otimes \mathcal{R}^-(\Phi^{-1/2}\sigma(x_i)) \Big\|_{L^2(L^1)} \overset{(1)}{\leq} C_\alpha \|\Phi^{1/2}\|_{L^2(T)} \Big\| \sum_{1\leq i\leq n} y_i \otimes \mathcal{R}^-(\Phi^{-1/2}\sigma(x_i)) \Big\|_{L^2(L^\alpha)}$$

$$\overset{(2)}{\leq} C \|\Phi^{1/2}\|_{L^2(T)} \|\Phi^{-1/2} f\|_{L^2(L^1)} \overset{(3)}{\leq} C\Big(\|f\|_{L^1(T\times\Omega)} + \tau \sum_{1\leq i\leq n} \|x_i\|_{L^1/H^1_o} + \tau\Big)$$

((1) découle de l'hypothèse faite sur Y $(0<\alpha<1)$, (2) du théorème 1.9 pour $p=2$ et (3) du choix de Φ). Ceci conclut la preuve, τ étant arbitraire.

1.D. Sur les espaces H^∞ et $\mathcal{U}$

On ne sait pas si H^∞ a la propriété d'approximation métrique, ce qui empêche de transférer certaines démonstrations concernant $A(D)$ à H^∞. Par contre, par réflexité locale, le théorème 1.4 entraîne :

COROLLAIRE 1.10 [11]. $(H^\infty)'$ est de cotype 2 et vérifie le théorème de Grothendieck.

Le résultat suivant est bien plus difficile (il dépend d'inégalités d'interpolation pour les opérateurs (p,q) sommants sur H^∞, du lemme de décomposition 1.3 et de résultats sur les suites d'interpolation pour H^∞).

THÉORÈME 1.11 [13]. $H^\infty \hat{\otimes} H^\infty$ est une sous-algèbre fermée de $L^\infty \hat{\otimes} L^\infty$.

Signalons d'autres propriétés banachiques de H^∞ :

PROPOSITION 1.12 [11]. H^∞ et ses duaux ont la propriété de Dunford-Pettis. Les duaux d'ordre impair de H^∞ sont faiblement séquentiellement complets.

THÉORÈME 1.13 [24]. L'espace H^∞ est primaire, c'est-à-dire, si $H^\infty = X \oplus Y$, alors soit X, soit Y est isomorphe à H^∞.

THÉORÈME 1.14 [7]. H^∞ est un espace de Grothendieck (tout opérateur $T : H^\infty \to c_o$ est faiblement compact).

THÉORÈME 1.15 ([25], [26]). Pour $p > 0$, $p \neq 1$, H^∞ a la propriété d'approximation AP_p (l'application canonique $Y' \hat{\otimes}_p H^\infty \to N_p(Y,X)$ est injective, pour tout espace de Banach Y).

Notons $\mathcal{U}$ l'espace des fonctions f de $A(D)$ dont la série de Fourier est uniformément convergente, muni de la norme $\|f\|_{\mathcal{U}} = \sup_{m\geq 0} \| \sum_{0\leq j\leq m} \hat{f}(j)\, e^{ijt}\|_\infty$.

THÉORÈME 1.16 [14]. $A(D)$ n'a pas de base besselienne. Par conséquent, il n'existe pas d'isomorphisme entre les espaces $A(D)$ et $\mathcal{U}$.

Ce résultat est conséquence d'une minoration concernant des systèmes biorthogonaux dans $A(D)$, qui dépend essentiellement du lemme de décomposition 1.3 et d'estimations liées à des martingales à valeurs dans H^∞.

THÉORÈME 1.17 [18]. L'espace dual $\mathcal{U}'$ est faiblement séquentiellement complet. Tout sous-espace réflexif de $\mathcal{U}'$ se plonge dans L^p pour un p satisfaisant $1<p\leq 2$.

L'intérêt principal de 1.17 réside dans un lemme de "type Havin" lié aux théorèmes de Carleson [40] et à l'inégalité de S. A. Vinogradov [81].

2. PROBABILITÉS ET ANALYSE RÉELLE OU COMPLEXE

2.A. Isomorphismes d'espaces de fonctions analytiques de plusieurs variables

Soit $U \subset \mathbb{C}^n$ un domaine d'holomorphie borné et ∂U sa frontière de Shilov. $A(U)$ est l'espace de Banach des fonctions continues sur U qui sont holomorphes à l'intérieur de U, muni de la norme $\|f\| = \sup_{z\in U} |f(z)| = \sup_{z\in\partial U} |f(z)|$. $A(U)$ s'identifie donc à un sous-espace fermé de $C(\partial U)$. Notons B^n la boule unité euclidienne de $\mathbb{C}^n$.

Les premiers résultats sur la classification linéaire topologique des espaces $A(U)$ sont exposés dans [65] (les références originelles s'y trouvent) :

(a) (G. M. Henkin) Si $m\geq 2$ et $n\geq 1$ les espaces de Banach $A(D^m)$ et $A(B^n)$ ne sont pas isomorphes.

(b) (B. S. Mitjagin et A. Pelczynski) $A(D)$ n'est pas isomorphe à $A(D^n)$ pour $n\geq 2$.

Les invariants topologiques qui permettent de démontrer ces résultats s'expriment en termes d'espaces duaux et utilisent la théorie de Henkin des mesures analytiques. J. Bourgain [29] montre d'abord que $A(D^2)$ n'est pas isomorphe à $A(D^3)$

et établit ensuite le cas général.

THÉORÈME 2.1 [35]. Si $m<n$, $A(D^n)'$ n'est pas isomorphe à un sous-espace fermé de $A(D^m)'$ et par conséquent $A(D^n)$ n'est pas isomorphe à un quotient de $A(D^m)$.

Voici le schéma de la preuve. Soient $X_1 = L^1/H^1_o$, $X_{m+1} = X_m \hat{\otimes} X_1$ pour $m\geq 2$. D'après [1] il est possible de montrer que X_m est isométriquement isomorphe à un sous-espace fermé de $A(D^m)'$. Des techniques liées aux martingales complexes multi-indexées permettent de montrer que X_{m+1} n'est pas isomorphe à un sous-espace fermé de $A(D^m)'$, d'où la conclusion. Plus généralement :

THÉORÈME 2.2 [35]. Soient U et V deux domaines d'holomorphie de la forme $U = U_1 \times \ldots \times U_m$ et $V = V_1 \times \ldots \times V_n$, où U_i et V_j sont des domaines strictement pseudo-convexes $(1\leq i,j\leq n)$. Si $m \neq n$, les espaces $A(U)$ et $A(V)$ ne sont pas isomorphes.

Si de plus les domaines U_i et V_j prédédents ont des frontières lisses $(1\leq i,j\leq n)$ et $m\neq n$, alors U et V ne sont pas biholomorphiquement équivalents (conséquence de 2.5 et [2] ; voir l'article de synthèse [34]).

Pour d'autres propriétés fonctionnelles des espaces $A(D^n)$ et $A(B^n)$, voir [18] et [19].

Le théorème 2.1 ne donne pas d'informations de nature locale et ne permet pas, en particulier, de montrer que $H^\infty(D^2)$ et $H^\infty(D^3)$ ne sont pas isomorphes. A. Pelczynski [65] montre que $H^\infty(D)$ n'est pas isomorphe à $H^\infty(D^n)$, pour $n\geq 2$, par la considération des normes p-sommantes et p-strictement intégrales d'un opérateur de $A(D^n)$ dans un espace de Banach quelconque. Tout récemment J. Bourgain [36] a montré que l'identité entre opérateurs p-sommants et p-intégraux valable pour l'algèbre du disque ne s'étend pas au cas de plusieurs variables. Par conséquent

THÉORÈME 2.3 [36]. $H^\infty(D)$ n'est pas isomorphe à $H^\infty(B^n)$ pour $n \geq 2$.

Le point de départ pour l'étude isomorphique des espaces $H^1(T^n)$ est l'isomorphisme entre $H^1(T^n)$ et l'espace $H^1(\delta^n)$ des martingales dyadiques m-indexées établit par B. Maurey [62]. Utilisant ce résultat et la dualité entre $H^1(\delta^n)$ et $BMO(\delta^n)$ (théorèmes de John Nirenberg et Ch. Fefferman) J. Bourgain réduit l'étude des isomorphismes des espaces $H^1(T^n)$ à un problème probabiliste, qu'il résout à l'aide des inégalités de martingales et des techniques d'espaces de Banach réticulés.

THÉORÈME 2.4 [8]. $H^1(T^m)$ et $H^1(T^n)$ ne sont pas isomorphes si $m \neq n$.

2.B. Sur le problème des trois espaces pour L^1

Soient X un espace de Banach et Y un sous-espace fermé de X ; si L^1 est isomorphe à un sous-espace fermé de X, est-ce que L^1 est isomorphe à un sous-espace fermé de Y ou de X/Y ?

C'est un problème ouvert, même pour $X = L^1$ (voir [5]). H_o^1 est un dual séparable, il ne contient pas de sous-espace fermé isomorphe à L^1. Dans [65] on démontre que L^1 n'est pas isomorphe à un sous-espace complémenté de L^1/H_o^1. Par contre :

THÉORÈME 2.5 [10]. L^1 est isomorphe à un sous-espace fermé de L^1/H_o^1. Plus précisément, il existe une suite croissante $(n_k)_{k\geq 1}$ d'entiers telle que si $\mathcal{G}$ est la tribu sur T engendrée par les fonctions $\sigma_k(\theta) = \text{sign} \cos n_k\theta$, $k \geq 1$, alors la restriction de l'application quotient $q : L^1 \to L^1/H_o^1$ à $L^1(\mathcal{G})$ est un isomorphisme. Par conséquent, toute fonction sur T bornée et $\mathcal{G}$ mesurable peut être obtenue comme l'espérance conditionnelle d'une fonction de H^∞.

La démonstration est délicate et fait appel à des techniques probabilistes, d'analyse harmonique et d'analyse complexe.

2.C. Extensions vectorielles d'opérateurs

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, S un opérateur linéaire continu de $L^p(\Omega)$ dans lui-même $(1 \leq p \leq \infty)$. Pour quels espaces de Banach E l'application linéaire $S \otimes Id_E$ (définie a priori seulement sur $L^p(\Omega) \otimes E$) s'étend-elle en un opérateur borné de $L^p(\Omega, E)$ dans lui-même ? (problème 1). Quelle est l'estimation précise, en fonction de n, de la norme des opérateurs $S \otimes Id_E$, où E est un espace de Banach quelconque de dimension finie n ? (problème 2).

D. L. Burkholder [38] a étudié le problème 1 lorsque S est une "transformation de martingales" T définie sur L^p, $1<p<\infty$, par $T(f) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n (E^{\mathcal{A}_n} - E^{\mathcal{A}_{n-1}})(f)$ ($(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$, $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0}$ suite de variables aléatoires uniformément bornée et prévisible). Tous ces opérateurs $T \otimes Id_E$ s'étendent à $L^p(\Omega, E)$ (suivant D. L. Burkholder, E a la propriété (UMD) "d'inconditionalité des différences de martingales") si et seulement si E satisfait une propriété que nous appellerons "ζ-convexité".

Lorsque S est la transformation de Hilbert H (définie sur L^2 par

$H(f)(t) = -i \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sign}(n)\hat{f}(n)e^{int})$, D. L. Burkholder [39] montre que le problème 1 a une réponse positive si E a la propriété (UMD), J. Bourgain montre la réciproque.

PROPOSITION 2.6 [15]. Soient E un espace de Banach, p tel que $1 < p < \infty$. Si $H \oplus Id_E$ s'étend en un opérateur borné sur $L^p(T,E)$ alors E a la propriété (UMD).

Soit E un espace de Banach de dimension finie, notons $h_p(\Omega,E)$ la norme de $H \oplus Id_E$ comme opérateur sur $L^p(\Omega,E)$, $1<p<\infty$. B. Virot [82] vérifie que $h_2(T,E) \leq C \log(\dim E)$ pour $E = \ell_n^1$ ou ℓ_n^∞. J. Bourgain montre que ce n'est pas le cas pour tout espace E de dimension finie, par une construction aléatoire permettant d'établir :

PROPOSITION 2.7 [23]. Pour tout entier $n \geq 1$, il existe $\Lambda \subset Z_+$ de cardinal n tel que $\left\| \sum_{k\in\Lambda} \sin k\theta \right\|_\infty \leq C\, n^{2/3}$ (C constante numérique).

En prenant $E = C_{\Lambda\cup(-\Lambda)}(T)$ (voir section 3) et $f \in L^2(T,E)$ définie par $f(t) = \varphi_t$, où $\varphi(\theta) = \sum_{k\in\Lambda} \sin k\theta$ ($\varphi_t(\theta) = \varphi(\theta+t)$, $\theta, t \in T$) on obtient $\|H_E f\|_{L^2(T,E)} = \|H(\varphi)\|_\infty \geq C'\, n^{1/3} \|f\|_{L^2(T,E)}$, d'où $h_2(T,E) \geq C'(\dim n)^{1/3}$. On ne connait pas l'ordre exact de grandeur de $h_2(T,E)$ (on a $h_2(T,E) \leq C\sqrt{\dim E}$, E de dimension finie ; par une extraction aléatoire on ne peut pas faire "mieux" que $n^{2/3}$ dans 2.7 [23]).

Dans [28], J. Bourgain estime $h_p(\Omega,E)$ lorsque E est un espace de Banach réticulé de dimension finie et montre que si E est symétrique l'ordre de grandeur de $h_p(\Omega,E)$ est logarithmique ; on y trouve aussi des propriétés de stabilité des espaces de Banach satisfaisant (UMD).

G. Pisier [70] résout entièrement le problème 1 dans le cas où S est la projection orthogonale P de $L^2(\{-1,1\}^{\mathbb{N}})$ sur le sous-espace fermé R engendré par la suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ des fonctions de Rademacher : $P \oplus Id_E$ s'étend à $L^2(\{-1,1\}^{\mathbb{N}},E)$ (par définition E est K-convexe) si et seulement si E ne contient pas des ℓ_n^1 uniformément.

Notons $K(E)$ la norme de $P \otimes Id_E$ comme opérateur sur $L^2(\{-1,1\}^{\mathbb{N}},E)$, E de dimension finie. Alors $K(E) \leq C\sqrt{\log(\dim E)}$ si E a une base inconditionnelle et $K(E) \leq C \log(\dim E)$ en général [69]. J. Bourgain montre que cette dernière estimation est la meilleure possible (comme conséquence de la construction aléatoire de certains sous-ensembles de $\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$) :

PROPOSITION 2.8 [14]. Il existe une suite $(E_n)_{n\geq 1}$ d'espaces de Banach de dimension finie telle que $\lim_{n\to\infty} \dim E_n = +\infty$ et $\lim_{n\to\infty} K(E_n)(\log \dim E_n)^{-1} > 0$.

3. ANALYSE HARMONIQUE

Dans toute la suite G désigne un groupe abélien compact, Γ son dual et Λ une partie de Γ. $L^p(G) = L^p(G,m)$, où m est la mesure de Haar de G, normalisée par $m(G) = 1$ $(1 \leq p \leq \infty)$. On note $M(G)$ l'espace des mesures complexes, régulières et bornées sur G. Pour $\mu \in M(G)$, le spectre de μ est l'ensemble $sp(\mu) = \left\{\gamma \in \Gamma ,\ \hat{f}(\gamma) = \int_G (-x,\gamma)\, d\mu(x) \neq 0\right\}$. Pour $B \subset M(G)$ et $\Lambda \subset \Gamma$ on note $B_\Lambda = \left\{f \in B ,\ sp(f) \subset \Lambda\right\}$.

Les deux paragraphes de cette section ont une préoccupation commune : quelles relations y a-t-il entre les propriétés fonctionnelles de l'espace B_Λ et les propriétés arithmétiques de Λ ?

3.A. Sous-espaces invariants par translation de $L^p(G)$, $1<p<\infty$

Le point de départ est le résultat suivant [50] :

Soit $1 < p < \infty$ et X un sous-espace de L^p tel que $L^p \hookrightarrow X$ (c'est-à-dire, L^p est isomorphe à un sous-espace fermé de X). Alors X contient un sous-espace fermé isomorphe à L^p et complémenté dans L^p.

Si X est un sous-espace invariant par translation de $L^p(G)$, G groupe abélien compact, il est de la forme $L^p_\Lambda(G)$ pour une partie Λ de Γ ; s'il est complémenté, alors $L^p(G) = L^p_\Lambda(G) \oplus L^p{}_{\Lambda}(G)$. D'où la question suivante :

Soient $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, et $\Lambda \subset \Gamma$. Si $L^p(G) \hookrightarrow L^p_\Lambda(G)$, existe-t-il $\Lambda' \subset \Lambda$ tel que $L^p_{\Lambda'}(G)$ soit isomorphe à $L^p(G)$ et complémenté dans $L^p(G)$?

J. Bourgain montre que c'est vrai, lorsque $2 < p < \infty$ et $G = \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, en caractérisant dans ce cas les parties Λ de Γ telles que $L^p(G) \hookrightarrow L^p_\Lambda(G)$:

THÉORÈME 3.1 [4]. Soient $G = \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, Γ son dual, $\Lambda \subset \Gamma$ et $2 < p < \infty$. Alors $L^p(G) \hookrightarrow L^p_\Lambda(G)$ si et seulement s'il existe une suite $(\delta_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de Λ et une suite $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de Γ telles que :

1. $\gamma_k = \prod_{n\in A_k} \varepsilon_n$, où $(A_k)_{k\geq 1}$ est une suite de parties finies de $\mathbb{N}$ deux à deux

disjointes $((\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ désigne la suite de fonctions de Rademacher).

2. $\bigcup_{k\geq 1} \delta_k \Theta_k \subset \Lambda$, où Θ_k désigne le sous-groupe de Γ engendré par $\{\gamma_1,\dots,\gamma_k\}$, pour $k \geq 1$.

Si ces conditions sont satisfaites, il existe $\Lambda^1 \subset \Lambda$ tel que $L^p_{\Lambda^1}(G)$ est isomorphe à $L^p(G)$ et complémenté dans $L^p(G)$.

La démonstration de la condition suffisante utilise des techniques probabilistes et d'analyse harmonique. Elle est valable pour $1 < p < \infty$ et produit l'ensemble Λ^1 de la dernière assertion. La preuve de la condition nécessaire est plus délicate, elle utilise des arguments combinatoires et de géométrie des espaces de Banach (voir [42] pour une rédaction détaillée).

Ensuite J. Bourgain [6] obtient une caractérisation arithmétique du spectre des multiplicateurs idempotents de $L^p(G)$ dont l'image est isomorphe à $L^p(G)$:

THÉORÈME 3.2 [6]. Soient G un groupe abélien compact et métrisable, $\Lambda \subset \Gamma$ et $1 < p < \infty$, $p \neq 2$.

(α) Si $L^p_\Lambda(G)$ est complémenté dans $L^p(G)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $L^p_\Lambda(G)$ est isomorphe à $L^p(G)$

(ii) Il existe deux suites $(\delta_k)_{k\geq 1}$ et $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de Γ telles que

1. $\gamma_k \neq 1$ et $\gamma_k \neq \gamma_{k'}$, $k,k' \geq 1$, $k \neq k'$

2. Si $\Phi_k = \left\{\prod_{n\in B} \gamma_n \ , \ B \subset \{1,2,\dots k\}\right\}$, alors $\bigcup_{k\geq 1} \delta_k \Phi_k \subset \Lambda$.

(iii) Il existe $(\delta_k)_{k\geq 1}$ et $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ comme dans (ii), 1. et satisfaisant

2'. Si $\Psi_k = \left\{\gamma_1^{n_1}\gamma_2^{n_2} \dots \gamma_k^{n_k},\ (n_1,\dots n_k) \in \prod_{1\leq s\leq k} \{0,1,\dots,s\}\right\}$, alors $\bigcup_{k\geq 1} \delta_k \Psi_k \subset \Lambda$.

(β) Si Λ vérifie (iii), $L^p(G) \hookrightarrow L^p_\Lambda(G)$.

La preuve de 3.2 utilise des résultats de [4], contient d'autres éléments d'analyse harmonique (notamment on estime des normes de projections invariantes par translation concernant des suites de "mailles") et de combinatoire. En particulier, on utilise le fait que la propriété (ii) est primaire (si $\Lambda \subset \Gamma$ satisfait (ii) et $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, alors soit Λ_1, soit Λ_2 satisfait (ii)). La propriété (iii) est aussi une propriété primaire [44].

Remarquons que si Γ n'a pas d'éléments d'ordre fini, la condition 2' entraîne que Λ contient des translatées de progressions arithmétiques arbitrairement longues. Sans l'hypothèse que $L^p_\Lambda(G)$ est complémenté dans $L^p(G)$ on ne sait pas montrer ce dernier résultat ni que (ii) entraîne $L^p(G) \hookrightarrow L^p_\Lambda(G)$ même dans les cas les plus simples (par exemple, $\Gamma = Z$, $\delta_k = 0$ et $\gamma_k = 4^k$, $k \geq 1$ [42]).

3.B. Ensembles de Sidon

Une partie Λ de Γ est un ensemble de Sidon s'il existe une constante C telle que pour tout polynôme trigonométrique $P(x) = \sum_{\gamma\in\Lambda} a_\gamma \gamma(x)$ on a

$$\sum_{\gamma\in\Lambda} |a_\gamma| \leq C\|P\|_\infty .$$

Par dualité, cette définition équivaut à dire que pour toute fonction bornée $b = (b(\gamma))_{\gamma\in\Lambda}$ il existe $\mu \in M(G)$ telle que $\hat{\mu}(\gamma) = b(\gamma)$ pour γ dans Λ. Une telle mesure sera dite mesure d'interpolation.

L'exemple le plus simple d'ensemble de Sidon s'obtient au moyen de la condition arithmétique suivante : on dit que l'ensemble $\Lambda \subset \Gamma$ est quasi indépendant si toute relation de la forme $\sum_{\gamma\in A} a_\gamma \gamma = 0$, où A est une partie finie de Λ et $(\alpha_\gamma)_{\gamma\in A} \in \{-1,0,1\}^A$, entraîne $\alpha_\gamma = 0$ pour $\gamma\in A$. Cette condition permet de construire des mesures d'interpolation sur Λ que l'on appelle produits de Riesz et qui constituent l'outil fondamental de la théorie. En particulier, ils permettent de montrer que toute réunion finie d'ensembles quasi-indépendants est un ensemble de Sidon. La réciproque est un problème ouvert :

(3.1) Tout ensemble de Sidon est-il une réunion finie d'ensembles quasi indépendants ?

Ce problème a une réponse positive lorsque $G = (Z(p))^{\mathbb{N}}$ avec p entier premier [59] ($Z(p)$ désigne le groupe des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité). Plus récemment, J. Bourgain [17] montre que l'étude des ensembles de Sidon du dual Γ du groupe $G = \prod_{j\geq 1} Z(p_j)$, où $(p_j)_{j\geq 1}$ est une suite bornée d'entiers, se ramène au cas où $G = (Z(p^r))^{\mathbb{N}}$, p^r étant une puissance du nombre premier p. Dans le cas où les p_j sont tous égaux à un produit de nombres premiers distincts, tout ensemble de Sidon de Γ est réunion finie d'ensembles quasi-indépendants ([17], [79]). Dans la même direction, on a le résultat suivant, dont la preuve est combinatoire :

PROPOSITION 3.3 [17]. Soit Λ un ensemble de Sidon. Pour tout entier $k \geq 1$,

Λ se décompose en N_k parties $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{N_k}$ n'ayant pas de relations de longueur $\leq k$, c'est-à-dire : si $A \subset \Lambda_i$ et $|A| \leq k$, toute relation $\sum_{\gamma \in A} \alpha_\gamma \gamma = 0$ où $(\alpha_\gamma)_{\gamma \in A} \in \{-1,0,1\}^A$ entraîne $\alpha_\gamma = 0$ pour $\gamma \in A$ $(1 \leq i \leq N_k)$.

Comme conséquence on obtient, dans le cas général, un résultat démontré dans [41] lorsque G est un groupe métrisable.

COROLLAIRE 3.4 [17]. Tout ensemble de Sidon de Γ est réunion finie d'ensembles de Sidon Λ^1 dont le pas tend vers l'infini (c'est-à-dire, pour tout sous-ensemble fini F de Γ il existe un sous-ensemble fini Λ^1_o de Λ^1 tel que si $\gamma, \gamma' \in \Lambda^1 \setminus \Lambda^1_o$ et $\gamma \neq \gamma'$, alors $\gamma - \gamma' \notin F$.)

Lorsque $G = T$, $\Lambda = \{2^n, n \geq 1\}$ est un des premiers exemples d'ensemble de Sidon ; lorsque $G = \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, la suite de Rademacher $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ est l'exemple le plus simple à traiter et une de ses réalisations est $r_n(t) = \text{sign} \sin 2^n t$ $(n \geq 0,$ $t \in [0, 2\pi])$. Il est surprenant que le caractère général de cette relation ait échappé aux spécialistes.

THÉORÈME 3.5 [27]. Soient G un groupe abélien compact et connexe, Λ un ensemble de Sidon de Γ tel que $0 \notin \Lambda$ et $\Lambda \cap (\Lambda^{-1}) = \emptyset$. Alors il existe une constante C telle que pour toute famille $(a_\gamma)_{\gamma \in \Lambda} \in \mathbb{C}^{(\Lambda)}$,

$$\sum_{\gamma \in \Lambda} |a_\gamma| \leq C \left\| \sum_{\gamma \in \Lambda} a_\gamma \,\text{sign}(\text{Im}\, \gamma) \right\|_\infty .$$

Autrement dit, la famille $(\text{sign Im}\, \gamma)_{\gamma \in \Lambda}$ est équivalente à la base canonique de $\ell^1(\Lambda)$.

La preuve utilise des procédés de convolution de mesures aléatoires semblables à celui qui a permis à S. W. Drury [45] de montrer que la réunion de deux ensembles de Sidon (voir [57] pour une rédaction détaillée) est un ensemble de Sidon.

Les travaux de G. Pisier sur les séries de Fourier aléatoires presque sûrement continues et les questions nouvelles apportées par la géométrie des espaces de Banach ont ravivé l'intérêt autour des ensembles de Sidon à partir de 1976. Tout d'abord G. Pisier [73] résout le problème reliant les ensembles de Sidon aux ensembles $\Lambda(p)$ à l'aide de la minoration due à X. Fernique [46] des processus gaussiens stationnaires à trajectoires presque sûrement bornées. Ensuite, par l'étude des conditions d'entropie métrique liées aux séries de Fourier aléatoires G. Pisier ([74], [75]) obtient d'autres résultats sur les ensembles de Sidon, en particulier des caractérisations arithmétiques.

Ces travaux interviennent dans quelques résultats de J. Bourgain ([21], [22], [32]). Le plus important répond à une question posée par C. C. Graham en 1973, dans le cadre de la conjecture de dichotomie.

THÉORÈME 3.6 [21]. Soit G un groupe abélien compact et E une partie du groupe dual telle que pour toute mesure μ dans $M(G)$, il existe une mesure discrète ν sur G vérifiant $\hat{\mu}(\gamma) = \hat{\nu}(\gamma)$ pour $\gamma \in E$ (condition "$B(E) = B_d(E)$"). Alors E est un ensemble de Sidon.

La preuve utilise crucialement un résultat de [75], une propriété établie par L. T. Ramsey et B. B. Wells dans [76] (où 3.6 est démontré indépendamment dans le cas des groupes d'ordre borné) et un lemme nouveau permettant de comparer certains nombres d'entropie.

Dans [72] G. Pisier montre que Λ est un ensemble de Sidon si et seulement si $C_\Lambda(G)$ est de cotype 2, généralisant un résultat précédent de N. Th. Varopoulos [80]. Rappelons la notion suivante : l'espace de Banach X a la propriété d'Orlicz s'il existe une constante C telle que pour toute suite finie $x_1, \ldots, x_n$ d'éléments de X,

$$\left(\sum_{1\leq i\leq n} \|x_i\|^2\right)^{1/2} \leq C \max_{\omega\in\{-1,1\}^N} \left\|\sum_{1\leq i\leq n} \varepsilon_i(\omega)\, x_i\right\| .$$

Un espace de Banach de cotype 2 a la propriété d'Orlicz et la réciproque n'est pas connue en général. Par contre, dans le cas des espaces $C_\Lambda(G)$, la réciproque est vraie.

THÉORÈME 3.7 [32]. Si l'espace de Banach $C_\Lambda(G)$ a la propriété d'Orlicz alors Λ est un ensemble de Sidon.

La question suivante est ouverte : si $C_\Lambda(G)$ est de cotype q pour un $q > 2$, Λ est-il un ensemble de Sidon ? Néanmoins, s'il existe k tel que Λ soit contenu dans le produit de k ensembles dissociés ([56], déf. 2.5) alors la réponse est positive (communication orale).

Le résultat suivant donne un éclairage nouveau à la théorie des ensembles de Sidon, en permettant de ramener plusieurs problèmes sur ces ensembles à des problèmes sur les produits de Riesz.

THÉORÈME 3.8 [33]. Soit $\Lambda \subset \Gamma$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Λ est un ensemble de Sidon.

(ii) Il existe une constante C telle que pour toute suite scalaire finie $(a_\gamma)_{\gamma\in\Lambda}$

et tout $p \geq 2$, $\left\| \sum_{\gamma\in\Lambda} a_\gamma \gamma \right\|_{L^p(G)} \leq C\sqrt{p}\left(\sum_{\gamma\in\Lambda} |a_\gamma|^2 \right)^{1/2}$.

(iii) Il existe $\delta > 0$ tel que tout sous-ensemble fini Λ_1 de Λ contient un sous-ensemble quasi-indépendant Λ_2 tel que $|\Lambda_2| \geq \delta |\Lambda_1|$.

(iv) Il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour toute suite scalaire finie $(a_\gamma)_{\gamma\in\Lambda}$ il existe un sous-ensemble quasi-indépendant Λ_1 de Λ tel que $\sum_{\gamma\in\Lambda_1} |a_\gamma| \geq \delta_1 \sum_{\gamma\in\Lambda} |a_\gamma|$.

La seule condition nouvelle est (iv) ; l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est due à W. Rudin [78], les implications (ii) $\Rightarrow$ (i) et (i) $\Leftrightarrow$ (iii) sont dues à G. Pisier [73], [75]. Mais ici la preuve, combinatoire et probabiliste, est entièrement indépendante des processus gaussiens et conditions d'entropie. La condition (iv) montre en particulier comment sont "fabriquées" les mesures d'interpolation.

COROLLAIRE 3.9 [34]. Soit Λ un ensemble de Sidon. Il existe une constante $C = C(\Lambda)$ telle que pour toute partie finie A de Λ et toute suite scalaire $(a_\gamma)_{\gamma\in A}$ il existe une suite de nombres complexes $(\lambda_i)_{i\geq 1}$ satisfaisant $\sum_{i\geq 1} |\lambda_i| \leq C(\Lambda)$ tels que la mesure $\mu = \sum_{i\geq 1} \lambda_i \mu_i$ satisfait $\hat{\mu}(\gamma) = a_\gamma$ pour tout $\gamma \in A$.

La condition (iii) ramène le problème ouvert (3.1) à un problème purement combinatoire.

Le théorème 3.8 permet de résoudre un problème abordé partiellement dans [41]. On dit qu'un ensemble $\Lambda \subset \Gamma$ est de première espèce s'il existe une constante C telle que pour tout compact K de G d'intérieur non vide il existe une partie finie Λ_K de Λ ayant la propriété suivante : pour tout polynôme trigonométrique $P(x) = \sum_{\gamma\in\Lambda\setminus\Lambda_k} a_\gamma \gamma(x)$ on a $\|P\|_\infty \leq C \sup_{x\in K} |P(x)|$. Si Λ est un ensemble de première espèce, son pas tend vers l'infini et la réciproque n'est pas vraie en général.

COROLLAIRE 3.10 [33]. Tout ensemble de Sidon de Γ dont le pas tend vers l'infini est un ensemble de première espèce.

Un exposé historique sur les ensembles de Sidon se trouve dans [43].

Concluons par un problème difficile d'analyse harmonique ne concernant pas les ensembles de Sidon.

THÉORÈME 3.11 [31]. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute suite d'entiers $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$

$$\min_{x\in R} \sum_{1\leq j\leq n} \cos k_j x \leq - 2^{(\log n)^{\varepsilon}} .$$

Le problème de la détermination du minimum d'une somme de cosinus trouve son origine dans des travaux en théorie des nombres. La résolution de la conjecture de Littlewood [58] permet d'affirmer que $\min_{x\in R} \sum_{1\leq j\leq n} \cos k_j x \leq - C \log n (k_1 < \ldots < k_n)$.

Une partie fondamentale de la démonstration de 3.11 consiste à construire de "grandes" mailles d'entiers, par des procédés combinatoires qui ont des points communs avec ceux du théorème 3.2.

[1] A. B. ALEKSANDROV Inner functions on the spaces of homogeneous type, linear operators and theory of functions, XII, COMI Publ. 126 (1983),7-14.

[2] S. BELL, E. LIGOCKA A simplification and extension of Fefferman's theorem on biholomorphic mappings. Invent. Math. 57 (1980), 283-289.

[3] J. BERGH, J. LÖFSTRÖM Interpolation spaces. Springer Verlag (1976).

[4] J. BOURGAIN Sous-espaces L^p invariants par translation sur le groupe de Cantor. C. R. Acad. Sc. Paris 291 (1980), 39-40.

[5] ______ New classes of L^p-spaces. Springer LNM 889 (1981).

[6] ______ Translation invariant complemented subspaces of L^p. Studia Math. 75 (1982), 95-101.

[7] ______ H^∞ is a Grothendieck space. Studia Math. 75 (1983), 193-216.

[8] ______ The non-isomorphism of H^1-spaces in a different number of variables. Bull. Soc. Math. Belgique, à paraître.

[9] ______ New Banach space properties of the disc algebra and H^∞. Proc. Special Year in Analysis, 1981. University of Connecticut, Storns, Springer LNM, à paraître.

[10] ______ Plongement de L^1 dans l'espace L^1/H^1. C. R. Acad. Sc. Paris 294 (1982), 633-636.

[11] ______ New Banach space properties of the disc algebra and H^∞. Acta Math. 157 (1983), 41 p., à paraître.

[12] ______ Embedding L^1 in L^1/H^1. Trans. Amer. Math. Soc. (1983), à paraître.

[13] ______ Extension of H^∞-valued operators and bounded bianalytic functions. Mittag-Leffler Report n. 6 (1983), 36 p.

[14] ______ On bases in the disc algebra. Trans. Amer. Math. Soc., à paraître.

[15] ______ Some remarks on Banach spaces in which martingale differences sequences are unconditional. Arkiv für Math. 21 (1983), no 2.

[16] ______ Extension of a result of Benedeck, Calderón and Panzone. Arkiv für Math. 22 (1984), no 1.

[17] ______________ Propriétés de décomposition pour les ensembles de Sidon. Bull. Soc. Math. France (1983), à paraître.

[18] ______________ Quelques propriétés linéaires topologiques de l'espace des séries de Fourier uniformément convergentes. Publ. Univ. P. et M. Curie, Sém. d'Initiation à l'Analyse, à paraître.

[19] ______________ On the Dunford-Pettis property for the ball-algebras, the polydisc-algebras and the Sobolev spaces. Studia Math., vol. dedicated to J. Mikusinski, à paraître.

[20] ______________ On weak completeness of the dual of spaces of analytic and smooth functions. Bull. Soc. Math. Belgique, à paraître.

[21] ______________ Sur les ensembles d'interpolation pour les mesures discrètes. C. R. Acad. Sc. Paris 296 (1983), 149-151.

[22] ______________ Une remarque sur les ensembles stationnaires. Publ. Math. Orsay 83-01, Exp. 2.

[23] ______________ Sur les sommes de sinus. Publ. Math. d'Orsay 83-01, Exp. 3.

[24] ______________ H^∞ is primary. Israël J. Math. (1983), à paraître.

[25] J. BOURGAIN et O. REINOV On the approximation properties for the space H^∞. Univ. of Stockholm Report, n. 11 (1983).

[26] ______________ Sur l'approximation dans H^∞. Sém. d'Analyse Fonct., Univ. Paris VII (1983), à paraître.

[27] ______________ ℓ^1 sequences generated by Sidon sets. J. London Math. Soc. à paraître.

[28] ______________ On the martingale transforms in finite dimensional lattices with an appendix on the K-convexity constant. Math. Nachrichten, à paraître.

[29] ______________ Some results on the bidisc algebra. Astérisque, Soc. Math. France, vol. dedicated to L. Schwarte, à paraître.

[30] ______________ New Banach space properties of certain spaces of analytic functions. Proc. ICM, Warszawa 1983, à paraître.

[31] ______________ Sur le minimum d'une somme de cosinus. Acta Arith., à paraître.

[32] ______________ Propriété d'Orlicz et ensembles de Sidon. Publ. Math. d'Orsay, Anal. Harm., 84-01, Exp. 3.

[33] ______________ Sidon sets and Riesz products. Ann. Inst. Fourier, à paraître.

[34] ______________ On non-isomorphisms of algebra's of analytic functions. Proc. Leibzig Conference on Operator Theory 1983, à paraître.

[35] ______________ The dimension conjecture for polydisc algebras. A paraître.

[36] ______________ Applications of the homogeneous polynomials to some problems on the ball-algebra. Proc. AMS, à paraître.

[37] ______________ Some applications of martingale transforms to the geometry of Banach spaces, en préparation.

[38] D. L. BURKHOLDER A geometrical characterization of Banach spaces in which martingale difference sequences are inconditional. Ann. Prob. 9 (1981), 997-1011.

[39] ______________ A geometrical condition that implies the existence of certain singular integrals of Banach-space valued functions. Proc. Conf. Harm. Anal., Univ. Chicago, March 1981.

[40] L. CARLESON On the convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math. 116 (1966), 135-157.

[41] M. DÉCHAMPS-GONDIM Ensembles de Sidon topologiques. Ann. Inst. Fourier 22 (1972).

[42] ______ Sous-espaces L^p invariants par translation sur le Cantor, d'après J. Bourgain. Publ. Math. d'Orsay 81-08, Exp. 1.

[43] ______ Sur les compacts associés aux ensembles lacunaires, les ensembles de Sidon et quelques problèmes ouverts. Publ. Math. d'Orsay, 84-01, Exp. 7.

[44] C. DELORME Un théorème de coloration pour les groupes abéliens. Publ. Math. d'Orsay, 83-01, Exp. 4.

[45] S. W. DRURY Sur les ensembles de Sidon. C. R. Acad. Sc. Paris 271 (1970), 162-163.

[46] X. FERNIQUE Régularité des trajectoires des processus gaussiens. Springer-Verlag, Lecture notes 480 (1974).

[47] J. B. GARNETT Bounded analytic functions. Acad. Press 1981.

[48] A. GROTHENDIECK Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques. Bol. Soc. Math., Sao Paulo 8 (1956), 1-79.

[49] U. HAAGERUP The Grothendieck inequality for bilinear forms on C^*-algebras. Mat. Inst. Odense Univ. 1 (1981).

[50] W. B. JOHNSON, B. MAUREY, G. SCHECHTMAN, L. TZAFRIRI Symetric structures in Banach spaces. Mem. Amer. Math. Soc. 217 (1979).

[51] J.-P. KAHANE Best approximation in $L^1(T)$. Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974).

[52] S. V. KISLIAKOV On spaces with "small" annihilators. Zap. Nauk Sem. Leningrad Ot. Mat. Inst. Steklov (LOMI) 65 (1976), 192-195.

[53] ______ What is needed for a O-absolutely summing operator to be nuclear. Preprint LOMI (1980) (en russe).

[54] ______ Fourier coefficients of boundary values of analytic functions. Preprint E-3-78, LOMI, V. St. Proc. T 155 (1981), 74-94.

[55] J. LINDENSTRAUSS and A. PELCZYNSKI Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$ spaces and their applications. Studia Math. 29 (1968), 275-326.

[56] J. M. LOPEZ and K. A. ROSS Sidon sets. Lecture Notes in Pure and Applied Math. 13, M. Dekker (1975).

[57] F. LUST-PIQUARD Suites de signes attachées à un ensemble de Sidon, d'après J. Bourgain. Publ. Math. d'Orsay, Anal. Harm. 84-01, Exp. 4.

[58] O. C. McGEHEE, L. PIGNO and B. SMITH Hardy's inequality and L^1-norm of exponential sums. Ann. Math. 113 (1981).

[59] M. P. MALLIAVIN-BRAMERET et P. MALLIAVIN Caractérisation arithmétique des ensembles de Helson. C. R. Acad. Sc. Paris 264 (1967), 51-112.

[60] B. MAUREY Une nouvelle démonstration d'un théorème de Grothendieck. Sém. Maurey-Schwartz 73-74, Exp. 22.

[61] B. MAUREY et G. PISIER Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach. Studia Math. 58 (1976), 45-90.

[62] B. MAUREY Isomorphismes entre espaces H^1. Acta Math. 145 (1980), 79-120.

[63] __________ Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans les espaces L^p. Astérisque n. 11, 1974, Soc. Math. France.

[64] R.E.A.C. PALEY A note on power series. J. London Math. Soc. 7 (1932), 122-130.

[65] A. PELCZYNSKI Banach spaces of analytic functions and absolutely summing operators. Conf. board of Math. Soc. Reg. Conf. Ser. in Math. 30 (1976).

[66] G. PISIER Une nouvelle classe d'espaces de Banach vérifiant le théorème de Grothendieck. Ann. Inst. Fourier 28 (1978), 69-90.

[67] __________ Grothendieck's theorem for non-commutative C^*-algebra's with an appendix on Grothendieck's constant. J. Funct. Anal. 29 (1978), 397-415.

[68] __________ Un théorème sur les opérateurs linéaires entre espaces de Banach qui se factorisent par un espace de Hilbert. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série, t. 13, 1980, 23-93.

[69] __________ Remarques sur un résultat non publié de B. Maurey. Sem. Anal. Fonct. 80-81, Exp. V, Ec. Polytech.

[70] __________ Holomorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces. Ann. Math. 115 (1982), 375-392.

[71] __________ Counterexamples to a conjecture of Grothendieck. Studia Math., à paraître.

[72] __________ Ensembles de Sidon et espaces de cotype 2. Sém. sur la Géométrie des Espaces de Banach. Ec. Polytech., Exp. 14 (1978).

[73] __________ Ensembles de Sidon et processus gaussiens. C. R. Acad. Sc. Paris 286 (1978), 671.

[74] __________ De nouvelles caractérisations des ensembles de Sidon. Math. Anal. and Appl., Part B, Adv. in Math. Suppl. studies, vol. 7B (1981).

[75] __________ Arithmetic characterizations of Sidon sets. Bull. Amer. Math. Soc. 8 (1983), 87-89.

[76] L. R. RAMSEY and B. B. WELLS Interpolation sets in bounded groups. Preprint.

[77] H. P. ROSENTHAL On subspaces of L^p. Ann. Math. 97 (1973), 344-373.

[78] W. RUDIN Trigonometric series with gaps. J. Math. Mech. 9 (1960), 203-227.

[79] N. Th. VAROPOULOS Some combinatorial problems in harmonic analysis. Lecture notes by D. Salinger, Summer school in Harm. Anal., Univ. Warwick (1968).

[80] N. Th. VAROPOULOS Une remarque sur les ensembles de Helson. Duke Math. J. 43 (1976), 387-390, cf. aussi Sém. Maurey-Schwartz 1976/77, Exp. 12.

[81] S. A. VINOGRADOV Convergence almost everywhere of Fourier series of functions in L^2 and the behavior of the coefficients of uniformly convergent series. Soviet Math. Dokl. 17 (1976), 1323-1327.

[82] B. VIROT Extensions vectorielles d'opérateurs linéaires bornés sur L^p. Publ. Math. d'Orsay 81-08, Exp. 7.

[83] P. WOJTASZCZYK Decompositions of H^p spaces. Duke Math. J. 46 (1979), 635-644.

Plan de l'exposé

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD

ÉQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIÉE AU CNRS (296)
ANALYSE HARMONIQUE
MATHÉMATIQUE (Bât. 425)
91405 ORSAY CEDEX