

Astérisque

CHRISTOPHE SOULÉ

K_2 et le groupe de Brauer

Astérisque, tome 105-106 (1983), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 601, p. 79-93

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1982-1983__25__79_0>

© Société mathématique de France, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

K_2 ET LE GROUPE DE BRAUER
[d'après A.S. Merkurjev et A.A. Suslin]
par Christophe SOULÉ

Notation.— Si A est un groupe abélien et $n > 0$ un entier, on note ${}_n A$ (resp. A/n) le noyau (resp. le conoyau) de la multiplication par n dans A .

I. Énoncé du résultat principal

I.1. Cohomologie galoisienne

Soit F un corps, $\bar{F}$ une clôture séparable de F , $G = \text{Gal}(\bar{F}/F)$ le groupe de Galois de $\bar{F}$ sur F , et M un G -module dont tout élément est fixé par un sous-groupe ouvert d'indice fini de G . La cohomologie galoisienne $H^k(F, M)$ de F à coefficients dans M , est, par définition, la cohomologie continue du groupe profini G à coefficients dans M [16], [21]. En particulier, on note $\mathbb{G}_m = \bar{F}^*$ le G -module des éléments inversibles de $\bar{F}$ et μ_n le sous-groupe ${}_n \bar{F}^*$ de $\bar{F}^*$. Si n est inversible dans F on a une suite exacte de G -modules (suite exacte de Kummer) :

$$1 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{\times n} \mathbb{G}_m \longrightarrow 1$$

d'où on tire une suite exacte longue en cohomologie. Mais le Théorème 90 de Hilbert affirme $H^1(F, \mathbb{G}_m) = 0$. On a donc des isomorphismes

$$H^1(F, \mu_n) \simeq H^0(F, \mathbb{G}_m)/n = F^*/n$$

et

$$H^2(F, \mu_n) \simeq {}_n H^2(F, \mathbb{G}_m) \simeq {}_n \text{Br}(F),$$

où $\text{Br}(F)$ est le groupe de Brauer de F .

Si $a \in F^*$ on note (a) sa classe dans $H^1(F, \mu_n)$. Si A est une algèbre simple centrale sur F , on note $[A]$ sa classe dans $\text{Br}(F)$.

I.2. Symbole galoisien

On a un cup-produit $H^1(F, \mu_n) \times H^1(F, \mu_n) \longrightarrow H^2(F, \mu_n^{\otimes 2})$, où $\mu_n^{\otimes 2} = \mu_n \otimes \mu_n$. Si a et $b \in F^*$ et $1/n \in F$ on note

$$(a, b)_F = (a) \cup (b) \in H^2(F, \mu_n^{\otimes 2})$$

le cup-produit de (a) et (b) . Il est clair que

$$(aa', b)_F = (a, b)_F + (a', b)_F \quad \text{et} \quad (a, bb')_F = (a, b)_F + (a, b')_F.$$

Mais on a aussi la relation suivante :

Lemme 1.— Si $a \in F$, $a \neq 0$ et $a \neq 1$, on a $(a, 1-a)_F = 0$

Preuve.— cf. [21] 3.1.

I.3. On désigne par $K_2(F)$ le groupe abélien engendré par les couples $\{a, b\}$, $a, b \in F^*$, soumis aux relations $\{aa', b\} = \{a, b\} + \{a', b\}$, $\{a, bb'\} = \{a, b\} + \{a, b'\}$, et $\{a, 1-a\} = 0$ si $a \neq 0, 1$. Le lemme 1 affirme donc que l'application $\{a, b\} \longrightarrow (a, b)_F$ induit un morphisme

$$h_F : k_2(F) \longrightarrow H^2(F, \mu_n^{\otimes 2}),$$

où $k_2(F) = K_2(F)/n$. Ce morphisme h_F est appelé *symbole galoisien*. Si $\{a, b\} \in K_2(F)$, on notera $\overline{\{a, b\}}$ sa classe dans $k_2(F)$. Merkurjev et Suslin ont démontré le résultat suivant

THÉORÈME 1 ([10], [11]).— Pour tout corps F et tout entier n inversible dans F , le symbole galoisien

$$h_F : k_2(F) \longrightarrow H^2(F, \mu_n^{\otimes 2})$$

est un isomorphisme.

I.4. Si $\mu_n \subset F^*$ on savait déjà ([17], XV.1, ou [12]) :

i) Les énoncés suivants sont équivalents : $h_F(\overline{\{a, b\}}) = 0$, $\overline{\{a, b\}} = 0$, ou " b appartient à l'image de la norme $F(\sqrt[n]{a})^* \longrightarrow F^*$ ".

ii) Si $a \in F^*$, tout élément x du noyau de $H^2(F, \mu_n^{\otimes 2}) \longrightarrow H^2(F(\sqrt[n]{a}), \mu_n^{\otimes 2})$ est de la forme $x = h_F(\overline{\{a, b\}})$, $b \in F^*$.

I.5. Le Théorème 1 était connu par exemple quand F est un corps fini, ou quand F est un corps de nombres [21].

II. Conséquences

II.1. Algèbres simples centrales

Supposons que F^* contienne le groupe μ_n des racines n -ièmes de l'unité (et $1/n \in F$). Le choix d'un générateur ζ de μ_n établit un isomorphisme entre $\mu_n^{\otimes 2}$ et μ_n . On a donc $H^2(F, \mu_n^{\otimes 2}) \simeq H^2(F, \mu_n) \simeq {}_n\text{Br}(F)$. Si $a, b \in F^*$ l'image de $(a, b)_F$ dans $\text{Br}(F)$ par cet isomorphisme est la classe d'une algèbre simple centrale $A_{\zeta}(a, b)$ sur F , dite *cyclique*. Cette algèbre est engendrée sur F par des éléments X et Y soumis aux relations $X^n = a$, $Y^n = b$ et $XY = \zeta YX$. Par exemple, si $n = 2$, l'algèbre $A_{-1}(a, b)$ est une algèbre de quaternions. On notera que $A_{\zeta}(a, b)$ est trivialisée par l'extension cyclique $F(\sqrt[n]{a})$ de F . La surjectivité du symbole galoisien montre donc

COROLLAIRE 1 [11].— i) Si A est une F -algèbre simple centrale telle que $n[A] = 0$ et $\mu_n \subset F^*$, l'algèbre A est semblable à un produit tensoriel d'algèbres cycliques¹⁾.

ii) Si $n[A] = 0$ et $1/n \in F$, l'algèbre A est trivialisée par une extension résoluble à deux crans.

iii) Si tout élément de F est un carré et $1/2 \in F$, ${}_2\text{Br}(F) = 0$.

¹⁾ Elle n'est pas nécessairement isomorphe à un produit tensoriel de telles algèbres [1].

Ces résultats répondent à des questions étudiées depuis longtemps (par exemple, le corollaire 1, ii) est montré dans [4] pour une algèbre de degré 5).

II.2. Cycles en codimension 2

II.2.1. Soit X/F une variété algébrique lisse sur un corps F . Pour tout entier $i \geq 0$, le groupe des cycles de codimension i sur X , noté $\mathcal{Z}^i(X)$, est, par définition, le groupe abélien libre engendré par l'ensemble $X^{(i)}$ des sous-variétés fermées irréductibles de codimension i de X . Soit $\mathcal{Z}_{\text{rat}}^i(X)$ le sous-groupe de $\mathcal{Z}^i(X)$ engendré par les diviseurs des fonctions rationnelles non nulles sur les sous-variétés fermées irréductibles de codimension $i-1$ de X . Le quotient

$$\text{CH}^i(X) = \mathcal{Z}^i(X) / \mathcal{Z}_{\text{rat}}^i(X)$$

est le groupe de Chow en codimension i .

II.2.2. Le Théorème 1 est l'ingrédient nouveau essentiel qui permet d'établir le

THÉORÈME 2.— *Soit X une variété projective, lisse et géométriquement irréductible sur un corps F*

- i) [11] *Si F est algébriquement clos et $1/n \in F$, le groupe ${}_n\text{CH}^2(X)$ est fini.*
- ii) [6] *Si F est fini, le sous-groupe de torsion de $\text{CH}^2(X)$ est fini.*
- iii) [5] *Si F est un corps de nombres et si X est une surface rationnelle, le groupe $\text{CH}^2(X)$ est de type fini.*

III. K-théorie des variétés

N.B.— Tous les schémas considérés sont noethériens et séparés.

III.1. Généralités

La preuve du Théorème 1 utilise la K-théorie algébrique des schémas définie par Quillen dans [13]. Celui-ci associe à tout schéma X (resp. à tout anneau unitaire A , commutatif ou non) et à tout entier $m \geq 0$ des groupes abéliens $K_m(X)$. Leur définition utilise la catégorie $\mathcal{P}(X)$ des $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres de type fini (resp. la catégorie $\mathcal{P}(A)$ des A -modules à gauche projectifs de type fini).

Si $X = \text{Spec}(A)$ est un schéma affine on a $K_m(X) = K_m(A)$.

Si $f : X \rightarrow Y$ (resp. $f : B \rightarrow A$) est un morphisme de schémas (resp. d'anneaux unitaires), il induit des morphismes de groupes

$$f^* : K_m(Y) \longrightarrow K_m(X) \quad (\text{resp. } f^* : K_m(B) \longrightarrow K_m(A)).$$

Si X et Y sont réguliers et si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme fini, il induit aussi un transfert

$$f_* : K_m(X) \longrightarrow K_m(Y).$$

Quand $f : F \rightarrow E$ est une extension finie de corps, on appellera aussi norme, et on notera $N_{E/F}$, le transfert

$$N_{E/F} = f_* : K_m(E) \longrightarrow K_m(F).$$

Le produit tensoriel de $\mathcal{O}_X$ -modules conduit à une structure produit [22]

$$K_m(X) \times K_{m'}(X) \longrightarrow K_{m+m'}(X), \quad m, m' \geq 0.$$

Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme fini entre schémas réguliers, on a une formule de projection

$$f_*(x.f^*(y)) = f_*(x).y, \quad x \in K_m(X), \quad y \in K_{m'}(Y).$$

Si E/F est une extension finie de corps, de degré d , X un schéma régulier sur F , $X_E = X \times_{\text{Spec } F} \text{Spec } E$ et $f : X_E \rightarrow X$ le morphisme canonique, la formule de projection implique en particulier

$$f_*f^*(x) = f_*(1.f^*(x)) = f_*(1).x = dx.$$

Si E/F est une extension galoisienne de groupe de Galois G , on montre aussi que

$$f_*f^*(x) = \sum_{g \in G} g^*(x).$$

Si A est un anneau unitaire et $M_n(A)$ l'algèbre des matrices $n \times n$ sur A , les catégories $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(M_n(A))$ sont équivalentes ("équivalence de Morita"), d'où des isomorphismes $K_m(A) \xrightarrow{\sim} K_m(M_n(A))$.

III.2. Exemples

Si $m = 0$ le groupe $K_0(X)$ (resp. $K_0(A)$) est le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathcal{P}(X)$ (resp. $\mathcal{P}(A)$) étudié dans [9].

Si A est un anneau unitaire, si $GL(A) = \varinjlim_n GL_n(A)$ est le groupe linéaire infini sur A , et si $E(A) \subset GL(A)$ est le sous-groupe engendré par les matrices élémentaires, on a aussi

$$K_1(A) = GL(A)/E(A) \quad \text{et} \quad K_2(A) = H_2(E(A), \mathbb{Z}).$$

On trouve, avec cette définition, que si F est un corps on a $K_0(F) = \mathbb{Z}$, $K_1(F) = F^*$, et que $K_2(F)$ est le groupe défini au paragraphe I.3. (Théorème de Matsumoto, cf. [12]).

Si D est un corps gauche de dimension n^2 sur son centre F , on a $K_0(D) = \mathbb{Z}$ et $K_1(D) = D^*/[D^*, D^*]$. Si n est premier et si $\text{Nrd} : D^* \rightarrow F^*$ désigne la norme réduite, on a aussi $K_1(D) = \text{Nrd}(D^*)$ (Théorème de Wang, [23]). Enfin Rehmann étudie dans [14] le groupe $K_2(D)$.

Si E/F est une extension finie de corps de degré d , la norme $N_{E/F} : K_m(E) \rightarrow K_m(F)$ est la norme usuelle si $m = 1$, et si $m = 2$ elle est induite par les morphismes $E_n(E) \rightarrow E_{nd}(F)$ (associés à un choix arbitraire d'une base de E sur F , cf. [12]).

III.3. Suite spectrale de Brown-Gersten-Quillen [13]

Si X/F est une variété algébrique lisse de dimension d sur un corps F , un outil pour le calcul de $K_m(X)$ est la suite spectrale dite de Brown-Gersten-Quillen (en abrégé BGQ) qui ramène le calcul de $K_m(X)$ à celui de la K -théorie des corps

$$K_2$$

résiduels de X . Cette suite spectrale $E_r^{st}(X)$ est de type cohomologique, elle est située dans le quatrième quadrant, et elle converge vers $K_{-s-t}(X)$. Elle est contravariante pour les morphismes plats, et covariante pour les morphismes finis. La filtration $F_{\dim m}^i K(X)$ qu'elle définit sur la K -théorie de X est la filtration par la codimension du support. On a

$$E_1^{st}(X) = \begin{cases} \bigoplus_{x \in X(s)} K_{-s-t}(F(x)) & \text{si } s \geq 0 \text{ et } s+t \leq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $F(x)$ est le corps des fonctions de la sous-variété fermée irréductible x de codimension s dans X .

Soit $\underline{K}_{-t}$ le faisceau associé au préfaisceau sur X pour la topologie de Zariski $U \mapsto K_{-t}(U)$. On a

$$E_2^{st}(X) = \begin{cases} H^s(X, \underline{K}_{-t}) & \text{si } s \geq 0 \text{ et } s+t \leq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'image de la différentielle

$$d_1 : E_1^{i-1, -i}(X) = \bigoplus_{x \in X(i-1)} F(x)^* \longrightarrow E_1^{i, -i}(X) = \bigoplus_{x \in X(i)} \mathbb{Z} = \mathcal{H}^i(X)$$

est $\mathcal{H}_{\text{rat}}^i(X)$. D'où la formule [13] : $E_2^{i, -i}(X) = H^i(X, \underline{K}_{-i}) = CH^i(X)$. Ceci explique pourquoi la compréhension de K_2 conduit à des résultats sur $CH^2(X)$.

III.4. Dégénérescence de la suite spectrale BGQ

Les classes de Chern à valeurs dans les groupes de Chow

$$c_i : K_0(X) \longrightarrow CH^i(X) = E_2^{i, -i}(X), \quad 0 \leq i \leq d,$$

et le Théorème de Riemann-Roch pour une immersion fermée montrent ([9], XV.4) que le noyau du morphisme (surjectif)

$$E_2^{i, -i}(X) \longrightarrow E_{\infty}^{i, -i}(X)$$

est annulé par $(i-1)!$.

Dans [7] Gillet définit plus généralement des classes de Chern

$$c_{i,m} : K_m(X) \longrightarrow E_2^{i-m, -i}(X), \quad 0 \leq i \leq d, \quad m \geq 0,$$

et il montre qu'elles vérifient un Théorème de Riemann-Roch. Il en résulte [11]

$$E_2^{i, -i-1}(X) \otimes \mathbb{Z}[1/d!] \simeq E_{\infty}^{i, -i-1}(X) \otimes \mathbb{Z}[1/d!].$$

Ceci sera utilisé dans la Proposition 2 ci-dessous.

IV. Variétés de Severi-Brauer

IV.1. Définition [17]

Soit A une algèbre simple centrale de dimension n^2 sur F . Notons $Gr(A)$ la grassmannienne des sous-variétés linéaires de dimension n de A . Soit X le

sous-schéma fermé de $\text{Gr}(A)$ défini par la condition que si $x \in X$ la variété linéaire associée à x est stable par la multiplication à droite par A . On montre que X est une variété projective de dimension $n-1$ sur F , dite *variété de Severi-Brauer*, et que, si E/F est une extension du corps F , les énoncés suivants sont équivalents :

- i) $[A \otimes_F E] = 0$ dans $\text{Br}(E)$.
- ii) $X \otimes_F E$ est isomorphe à l'espace projectif $\mathbb{P}_E^{n-1}$.
- iii) L'ensemble $X(E)$ des points de X à valeurs dans E est non vide.

En particulier, ces énoncés sont vérifiés par le corps $E = F(X)$ des fonctions rationnelles sur X .

On voit donc que si $\mu_n \subset F^*$, à un symbole $\{\overline{a}, \overline{b}\} \in k_2(F)$ sont associées, outre l'algèbre cyclique $A_{\mathbb{Z}}(a, b)$ définie en II.1., la variété de Severi-Brauer $X = X(a, b)$ correspondante sur F (qui est un espace projectif si et seulement si $\{\overline{a}, \overline{b}\} = 0$, d'après I.4. i)). L'idée centrale de Merkurjev et Suslin consiste à comparer les symboles galoisiens h_F et $h_{F(X)}$. Pour cela on étudie la K -théorie de X .

IV.2. Soit D une algèbre simple centrale de degré premier p sur F (donc D est une algèbre à division ou bien $D \simeq M_p(F)$), et X la variété de Severi-Brauer correspondante.

IV.2.1. En étudiant la structure de $\mathcal{P}(X)$ Quillen a montré

PROPOSITION 1 ([13], Th. 4.1.).— Si $m \geq 0$ on a une décomposition en somme directe

$$K_m(X) = K_m(F) \oplus K_m(D) \oplus K_m(D^{\otimes 2}) \oplus \dots \oplus K_m(D^{\otimes (p-1)}) ,$$

où $D^{\otimes i}$ est le produit tensoriel sur F de i exemplaires de D .

Par exemple, si X est triviale, on a $D = M_p(F)$, et $K_m(D^{\otimes i}) = K_m(M_{p^i}(F)) = K_m(F)$.

IV.2.2. Supposons que D est non triviale sur F et soit L/F une extension de degré p de F qui trivialise D . Si $X_L = X \otimes_F L$, on a donc $X_L \simeq \mathbb{P}_L^{p-1}$.

PROPOSITION 2 ([11], [20]).— i) Si $i \geq 0$ on a $CH^i(X) = \mathbb{Z}$ et $CH^i(X_L) = \mathbb{Z}$. Si $i \geq 1$ le morphisme d'extension des scalaires $CH^i(X) \longrightarrow CH^i(X_L)$ est la multiplication par p .

ii) On a $H^1(X, \underline{\mathbb{K}}_2) = \text{Nrd}(D^*)$ et $H^1(X_L, \underline{\mathbb{K}}_2) = L^*$. Le morphisme $H^1(X, \underline{\mathbb{K}}_2) \longrightarrow H^1(X_L, \underline{\mathbb{K}}_2)$ est l'inclusion $\text{Nrd}(D^*) \subset F^* \subset L^*$.

iii) Le morphisme $\pi^* : K_2(F) \longrightarrow H^0(X, \underline{\mathbb{K}}_2)$ (induit par le morphisme de définition $\pi : X \longrightarrow \text{Spec } F$) est un isomorphisme.

Résumé de la démonstration.— i) soit $\mathcal{O}(-1)$ le fibré inversible standard sur $X_L = \mathbb{P}_L^{p-1}$, $\gamma \in K_0(X_L)$ sa classe, et $\xi \in CH^1(X_L)$ celle du diviseur associé à $\mathcal{O}(-1)$. On sait que $CH^i(X_L)$ est le groupe cyclique infini engendré par ξ^i [9]. Plus généralement [7] le produit

$$K_m(L) \xrightarrow{(\gamma) \cdot \xi^i} H^i(X_L, \underline{\mathbb{K}}_{m+i})$$

est un isomorphisme. La structure multiplicative de la suite spectrale BQQ [7] montre donc que $E_2^{st}(X_L) \simeq E_\infty^{st}(X_L)$. Si $f : X_L \rightarrow X$ est le morphisme canonique, la formule $f_* f^* = p$ (III.1.) implique donc

$$E_2^{st}(X) \otimes \mathbb{Z}[1/p] \simeq E_\infty^{st}(X) \otimes \mathbb{Z}[1/p] .$$

Si on combine ce résultat avec III.4., on obtient, puisque $d = \dim(X) = p-1$,

$$E_2^{i,-i}(X) \simeq E_\infty^{i,-i}(X) \quad \text{et} \quad E_2^{i,-i-1}(X) \simeq E_\infty^{i,-i-1}(X) .$$

Par ailleurs on vérifie que le morphisme $K_0(D^{\otimes i}) = \mathbb{Z} \rightarrow K_0(D^{\otimes i} \otimes L) = \mathbb{Z}$ est la multiplication par p si $1 \leq i \leq p-1$. Donc le morphisme

$$f_* : K_0(X) = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \rightarrow K_0(X_L) = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$$

est donné par $f_*(n_0, \dots, n_{p-1}) = (n_0, pn_1, \dots, pn_{p-1})$.

On montre aussi que le morphisme $f_* : K_0(X_L) \rightarrow K_0(X)$ est donné par $f_*(n_0, \dots, n_{p-1}) = (pn_0, n_1, \dots, n_{p-1})$. Par ailleurs l'isomorphisme

$$\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \rightarrow K_0(X_L)$$

est donné par $(n_0, \dots, n_{p-1}) \mapsto \sum_{i=0}^{p-1} n_i \gamma^i$ et l'idéal $F_{\dim}^i K_0(X_L)$ de $K_0(X_L)$ est engendré par $(\gamma-1)^i$ [9]. Il en résulte que, si $i \geq 1$,

$$F_{\dim}^i K_0(X_L) \cap f_* K_0(X) \subset p F_{\dim}^i K_0(X_L) ,$$

et que

$$f_*(F_{\dim}^i K_0(X_L)) \supset f_* f_* F_{\dim}^i K_0(X_L) = p F_{\dim}^i K_0(X_L) .$$

On voit donc que le morphisme

$$f_* : E_\infty^{i,-i}(X) = E_2^{i,-i}(X) \rightarrow E_\infty^{i,-i}(X_L) = E_2^{i,-i}(X_L) , \quad i \geq 1 ,$$

est la multiplication par p dans $\mathbb{Z}$.

La preuve de ii) est semblable, et utilise le fait que $K_1(D) = \text{Nrd}(D^*)$. La preuve de iii) est plus difficile. Pour la surjectivité de π^* on remarque d'abord, puisque $E_2^{i,-i-1}(X) \simeq E_\infty^{i,-i-1}(X)$, que les différentielles issues de $E_2^{0,-2}(X) = H^0(X, \underline{K}_2)$ sont nulles, et que le morphisme $K_2(X) \rightarrow H^0(X, \underline{K}_2)$ est surjectif. Il faut donc voir que l'image de l'application composée

$$K_2(D^{\otimes i}) \rightarrow K_2(X) \rightarrow H^0(X, \underline{K}_2)$$

est contenue dans celle de $K_2(F) \rightarrow H^0(X, \underline{K}_2)$. Comme $K_2(L) = H^0(X_L, \underline{K}_2)$ et $[L:F] = p$, un argument de transfert (cf. ci-dessous la preuve du Théorème 3) permet de supposer que toute extension finie de F est de degré une puissance de p . On montre alors à l'aide du résultat de Rehmann [14] que le produit

$$K_1(D^{\otimes i}) \otimes K_1(F) \rightarrow K_2(D^{\otimes i})$$

est surjectif ([11], Proposition 5, ou [15] si $p = 2$). On est donc ramené à voir que l'image du morphisme $K_1(D^{\otimes i}) \rightarrow K_1(X) \rightarrow H^0(X, \underline{K}_1)$ est contenue dans celle de

$K_1(F)$. Mais

$$H^0(X, \underline{K}_1) = H^0(X, \underline{G}_m) = F^* = K_1(F) .$$

On indiquera en V.3. une preuve de l'injectivité de π^* .

IV.2.3. PROPOSITION 3.— Avec les hypothèses de la Proposition 2 :

i) Le complexe de groupes

$$0 \rightarrow K_2(F) \rightarrow K_2(F(X)) \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{x \in X^{(1)}} F(x)^* \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{x \in X^{(2)}} \mathbb{Z} \xrightarrow{+} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

est exact, sauf au terme médian où l'homologie est $N = \text{Nrd}(D^*)$.

ii) Si $1/p \in F$, $\mu_p \subset F$ et $D = A_{\bar{C}}(a, b)$ on a des suites exactes

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p \rightarrow k_2(F) \rightarrow k_2(F(X)) \rightarrow A/p \rightarrow 0$$

et

$${}_p N \rightarrow A/p \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} F(x)^*/p$$

où $\mathbb{Z}/p$ est engendré par $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ et $A = d_1(K_2(F(X)))$.

Preuve.— L'énoncé i) résulte de la Proposition 2 et de III.3. Pour prouver ii), soit

B (resp. C) le noyau (resp. l'image) du bord $d_1 : \bigoplus_{x \in X^{(1)}} F(x)^* \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(2)}} \mathbb{Z}$. De

i) on tire des suites exactes

$${}_p K_2(F(X)) \rightarrow {}_p A \rightarrow K_2(F)/p \rightarrow K_2(F(X))/p \rightarrow A/p \rightarrow 0 ,$$

et ${}_p N \rightarrow A/p \rightarrow B/p$. Comme C est sans torsion on a une injection

$$B/p \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} F(x)^*/p .$$

Le noyau de $k_2(F) \rightarrow k_2(F(X))$ contient le groupe d'ordre p engendré par $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ (IV.1. et I.4. i)). Pour voir que ce noyau est d'ordre inférieur ou égal à p , notons $\text{Div}(X) = \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathbb{Z}$ le groupe des diviseurs de X et $\text{Pic}(X) = \text{CH}^1(X) = \mathbb{Z}$ son groupe de Picard. On a un diagramme commutatif (où la verticale de gauche est le produit en K -théorie)

$$\begin{array}{ccccc} F(X)^* \otimes \mu_p & \longrightarrow & \mu_p \otimes \text{Div}(X) & \longrightarrow & \mu_p \otimes \text{Pic}(X) \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ {}_p K_2(F(X)) & \rightarrow & {}_p A \hookrightarrow & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} {}_p F(x)^* & \end{array}$$

Il en résulte que le conoyau de ${}_p K_2(F(X)) \rightarrow {}_p A$ est d'ordre inférieur ou égal à p .
q.e.d.

V. Théorème 90 de Hilbert pour K_2

V.1. THÉORÈME 3 ([11], [20]).— Soit E/F une extension cyclique de degré n , $\sigma \in \text{Gal}(E/F)$ un générateur, et $N_{E/F} : K_2(E) \rightarrow K_2(F)$ la norme. On a une suite exacte

$$K_2(E) \xrightarrow{1-\sigma} K_2(E) \xrightarrow{N_{E/F}} K_2(F) .$$

Preuve [20].— On se restreindra au cas où n est un nombre premier p inversible dans F .

— De la description de la norme donnée en III.2. résulte aisément que $N_{E/F} \circ (1-\sigma) = 0$.

— Si F' est une extension de F on note E' l'anneau $E \otimes_F F'$,
 $N_{E'/F'} : K_2(E') \rightarrow K_2(F')$ le transfert associé à $F' \rightarrow E'$, et

$$V(F') = \text{Ker}(N_{E'/F'}) / (1 - \sigma)(K_2(E')) .$$

Le morphisme composé $V(F) \rightarrow V(E) \xrightarrow{N_{E/F}} V(F)$ est la multiplication par p (III.1.) et $V(E) = 0$, donc $V(F)$ est annulé par p . Si F'/F est une extension finie de degré premier à p , l'application composée $V(F) \rightarrow V(F') \xrightarrow{N_{F'/F}} V(F)$ est la multiplication par $[F':F]$, donc le morphisme $V(F) \rightarrow V(F')$ est injectif. Donc pour montrer que $V(F) = 0$ on peut supposer que $\mu_p \subset F$, puisqu'en général le degré de $F(\mu_p)$ sur F est premier à p . On a alors $E = F(\sqrt[p]{a_0})$, où $a_0 \in F^*$.

— Lemme 2.— Soient $b \in F^*$, $X = X(a_0, b)$ la variété de Severi-Brauer associée à $A_{\mathbb{G}}(a_0, b)$, et $F(X)$ son corps de fonctions. Le morphisme $V(F) \rightarrow V(F(X))$ est injectif.

Preuve du Lemme.— Comme le corps E trivialise $A_{\mathbb{G}}(a_0, b)$ on a $X_E \simeq \mathbb{P}_E^{p-1}$. Soit $u \in \text{Ker}(N_{E/F} : K_2(E) \rightarrow K_2(F))$ un élément dont l'image $u_{E(X)}$ dans $K_2(E(X))$ s'écrit $u_{E(X)} = (1 - \sigma)v$, avec $v \in K_2(E(X))$. Il faut montrer que $u \in (1 - \sigma)K_2(E)$. Pour cela on note ∂_y , $y \in X_E^{(1)}$, les composantes de la différentielle $d_1 : K_2(E(X)) \rightarrow \bigoplus_{y \in X_E^{(1)}} E(y)^*$ de la suite spectrale BGQ de X_E . Si $x \in X^{(1)}$, on pose $d_x(v) = \prod_{y|x} \partial_y(v)$. On a alors $(1 - \sigma)d_x(v) = d_x((1 - \sigma)v) = d_x(u_{E(X)}) = 0$. Donc $d_x(v)$ est dans $\left(\prod_{y|x} E(y)^* \right)^\sigma = F(x)^*$. L'élément $(d_x(v))_{x \in X^{(1)}}$ de $E_1^{-2}(X) = \bigoplus_{x \in X^{(1)}} F(x)^*$ est dans le noyau de la différentielle d_1 (puisque $E_1^{-2}(X) \hookrightarrow E_1^{-2}(X_E)$), donc il définit une classe $a(v) \in H^1(X, \underline{K}_2)$. L'image de $a(v)$ dans $H^1(X_E, \underline{K}_2)$ est nulle, donc $a(v) = 0$ (Proposition 2, ii)). Par conséquent il existe un élément v_0 de $K_2(F(X))$ tel que $\partial_x(v_0) = d_x(v)$ quel que soit $x \in X^{(1)}$. On en déduit que $\partial_y(v - v_0) = 0$ si $y \in X_E^{(1)}$, et $v - v_0 \in H^0(X_E, \underline{K}_2) = K_2(E)$. Donc $u = (1 - \sigma)v = (1 - \sigma)(v - v_0)$ est dans $(1 - \sigma)K_2(E)$.

q.e.d.

Fin de la preuve du Théorème 3

On définit une suite de corps F_n en posant $F_0 = F$, en appelant F_{2m+1} le composé des corps $F_{2m}(X(a_0, b))$ où b décrit F_{2m}^*/p , et en appelant F_{2m+2} une extension maximale de F_{2m+1} de degré premier à p (dans une clôture algébrique de F_{2m+1}). Si $F_\infty = \varinjlim_n F_n$, on voit que l'application $V(F) \rightarrow V(F_\infty)$ est injective, que F_∞ n'a pas d'extension finie de degré premier à p , et que la norme $F_\infty^* \rightarrow F_\infty^*$ est surjective. Pour montrer que $V(F) = 0$ on peut supposer $F = F_\infty$. Dans ce cas on définit une application

$$\varphi : K_2(F) \rightarrow K_2(E) / (1 - \sigma)K_2(E)$$

en associant au symbole $\{a, b\}$ la classe de $\{a, \beta\}$, où $N_{E/F}(\beta) = b$ [15]. L'élément obtenu ne dépend pas du choix de β (Théorème 90 de Hilbert classique), il dépend bilinéairement de a et b , et il est nul si $b = 1 - a$ ([11], Lemme 1.7). Le morphisme φ ainsi défini est une section de $N_{E/F}$ (car $N_{E/F}(\{a, \beta\}) = \{a, N_{E/F}(\beta)\} = \{a, b\}$) et il est surjectif (car $[E:F] = p$ et F n'a pas d'extension de degré premier à p , cf. [2]). Donc $V(F) = 0$. q.e.d.

V.2. Torsion dans K_2 d'un corps

THÉORÈME 4 ([11], [20]).— Soit L un corps et $\zeta \in L^*$ un élément d'ordre n ($1/n \in F$). Tout élément $x \in {}_n K_2(L)$ peut s'écrire $x = \{\zeta, c\}$ avec $c \in L^*$.
Preuve.— On se ramène au cas où n est un nombre premier p . Soit alors $E = L(T)$ le corps des fonctions rationnelles sur L et $F = L(T^p) \subset E$. La restriction de $N_{E/F} : K_2(E) \rightarrow K_2(F)$ à $K_2(L)$ est la multiplication par p (III.1.), donc, d'après le Théorème 3, on a ${}_p K_2(L) \subset K_2(L) \cap (1 - \sigma)K_2(E)$, où $\sigma \in \text{Gal}(E/F)$ est un générateur. Choisissons σ tel que $\zeta = T/\sigma(T)$. Il suffit de montrer

Lemme 3.— $K_2(L) \cap (1 - \sigma)K_2(E) = \{\zeta, L^*\}$.

Preuve du lemme.— Si $\mathbb{A}_L^1$ est la droite affine sur L , on note $f : X = \mathbb{A}_L^1 \rightarrow Y = \mathbb{A}_L^1$ le morphisme correspondant à l'inclusion $L[U] \rightarrow L[T]$ qui envoie U sur T^p . Ce morphisme f est fini et plat, non ramifié en dehors de l'origine $y_0 \in Y$. Soient $u \in K_2(L)$ et $v \in K_2(E)$ des éléments tels que $u_E = (1 - \sigma)v$. Si y est un point fermé de Y on pose $d_y(v) = \prod_{x \in f^{-1}(y)} \partial_x(v)$. On a $(1 - \sigma)d_y(v) = 0$, donc, si $y \neq y_0$, $d_y(v) \in L(y)^*$. On sait que $K_m(\mathbb{A}_L^1) = K_m(L)$ [13], et la suite spectrale BGQ pour $\mathbb{A}_L^1$ donne une suite exacte courte (due d'abord à Milnor) :

$$0 \rightarrow K_2(L) \rightarrow K_2(L(T)) \xrightarrow{\oplus \partial_y} \bigoplus_{y \in Y(1)} L(y)^* \rightarrow 0.$$

En particulier le morphisme $K_2(F) \rightarrow \bigoplus_{y \neq y_0} L(y)^*$ est surjectif et il existe $v_0 \in K_2(F)$ tel que $\partial_y(v_0) = d_y(v)$ si $y \neq y_0$. Soit $c = \partial_{y_0}(v - v_0) \in L^*$ et $w = v - v_0 - \{T, c\} \in K_2(E)$. On vérifie que si x est un point fermé de X on a $\partial_x(w) = 0$. Donc $w \in K_2(L)$ et l'on a

$$u_E = (1 - \sigma)v = (1 - \sigma)(w + v_0 + \{T, c\}) = (1 - \sigma)\{T, c\} = \{\zeta, c\}.$$

q.e.d.

En considérant l'extension d'Artin-Schreier $E = L(T) \supset F = L(T^p - T)$ on montre de même

THÉORÈME 5 [20].— Si L est un corps de caractéristique p , on a ${}_p K_2(L) = 0$.

V.3. Fin de la preuve de la Proposition 2, iii)

Reprenant les notations de IV.2.2. il s'agit de voir que le morphisme $K_2(F) \rightarrow K_2(F(X))$ est injectif (car $H_0(X, \underline{K}_2) \hookrightarrow K_2(F(X))$). Ceci est connu quand X est l'espace projectif, donc le noyau de $K_2(F) \rightarrow K_2(F(X))$ est dans

$K_2(F)$ (grâce à l'argument de transfert usuel, cf. IV.1.). Ceci permet de supposer $\mu_p \subset F^*$ et d'après le Théorème 4 (dont la preuve n'utilise que la Proposition 2, i) et ii)) il s'agit donc de voir que si $u \in F^*$, $\zeta^p = 1$, et $\{\zeta, u\} = 0$ dans $K_2(F(X))$, on a $\{\zeta, u\} = 0$ dans $K_2(F)$.

En général, Suslin [20] montre que si E est un corps contenant μ_p , $u \in E^*$ et $\{\zeta, u\} = 0$ dans $K_2(E)$, il existe un élément u_0 de la clôture algébrique E_0 dans E du sous-corps premier de E , et un élément v de E tels que $u = u_0 v^p$ et $\{\zeta, u_0\} = 0$ dans $K_2(E_0)$. Sa preuve utilise le résultat de Tate (I.5) et les classes de Chern reliant K-théorie et cohomologie étale ([18], [19]).

Appliquant cela à $E = F(X)$ on a (puisque F est algébriquement fermé dans $F(X)$) $E_0 \subset F$ et $v \in F^*$. Donc $\{\zeta, u\} = \{\zeta, u_0\} = 0$ dans $K_2(F)$. Plus généralement :

THÉORÈME 6 [20]. — Si E/F est une extension de corps et F est algébriquement fermé dans E , le morphisme $K_2(F) \longrightarrow K_2(E)$ est injectif.

VI. Preuve du Théorème 1

VI.1. Injectivité du symbole galoisien

Montrons que si $\mu_p \subset F$ le symbole galoisien

$$h_F : k_2(F) \longrightarrow H^2(F, \mu_p^{\otimes 2})$$

est injectif. Soit $u = \sum_{i=1}^n \overline{\{a_i, b_i\}}$ un élément de $k_2(F)$ tel que $h_F(u) = 0$. On va montrer par récurrence sur n que $u = 0$. Si $n = 1$ c'est I.4. i). En général supposons l'énoncé vrai pour $n-1$ et, si $\overline{\{a_n, b_n\}} \neq 0$, soit $X = X(a_n, b_n)$ la variété de Severi-Brauer associée. L'image de $\overline{\{a_n, b_n\}}$ dans $k_2(F(X))$ est nulle et $h_{F(X)}(u_{F(X)}) = 0$, donc $u_{F(X)} = 0$ d'après l'hypothèse de récurrence. Donc (Proposition 3, ii)) u est un multiple $m \overline{\{a_n, b_n\}}$ du symbole $\overline{\{a_n, b_n\}}$. Comme $h_F(u) = 0$ on a $m \equiv 0 \pmod{p}$ (I.4. i)). Donc $u = 0$.

q.e.d.

VI.2. Surjectivité du symbole galoisien

VI.2.1. Lemme 4. — Soient F un corps et p un nombre premier tels que $1/p \in F$, F n'a pas d'extension finie de degré premier à p et $k_2(F) = 0$. Alors $\text{Br}(F) = 0$.

Preuve. — Soient A une F -algèbre simple centrale non triviale et L un corps neutralisant de A et galoisien sur F , minimal pour ces propriétés. Soit $E \subset L$ le sous-corps des points fixes d'un sous-groupe normal d'ordre p de $\text{Gal}(L/F)$. Comme l'algèbre $[A \otimes_F E]$ est trivialisée par l'extension cyclique L de E , sa classe $[A \otimes_F E]$ est dans l'image de h_E (I.4. ii)). On va voir que $k_2(E) = 0$ donc $[A \otimes_F E] = 0$, ce qui contredit la minimalité de L .

Pour voir que $k_2(E) = 0$ on est ramené au cas où E/F est cyclique de degré p . Si $u \in K_2(E)$ on a alors $N_{E/F}(u) = pv$, $v \in K_2(F)$. Donc $N_{E/F}(u - v_E) = 0$.

D'après le Théorème 3 on en déduit que $u - v_E = (1 - \sigma)w$, $w \in K_2(E)$. Donc $k_2(E) = (1 - \sigma)k_2(E) = (1 - \sigma)^p k_2(E) = (1 - \sigma^p)k_2(E) = 0$ q.e.d.

VI.2.2. On suppose que $\mu_p \subset F$. Soit $\{\overline{a}, \overline{b}\} \in k_2(F)$ un symbole non nul et $X = X(a, b)$ la variété de Severi-Brauer associée à $D = A_{\zeta}(a, b)$.

Lemme 5.— Le morphisme $\text{coker}(h_F) \rightarrow \text{coker}(h_{F(X)})$ est injectif.

Preuve.— Si $\langle D \rangle \subset {}_p\text{Br}(F)$ est le sous-groupe engendré par la classe $[D]$ de D , on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p \rightarrow {}_p\text{Br}(F) \rightarrow {}_p(\text{Br}(F)/\langle D \rangle) \rightarrow \mathbb{Z}/p \rightarrow \text{Br}(F)/p.$$

On va voir qu'on a également une suite exacte

$$(*) \quad 0 \rightarrow {}_p(\text{Br}(F)/\langle D \rangle) \rightarrow {}_p\text{Br}(F(X)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} F(x)^*/p.$$

En effet, si l'on pose $\text{Br}(X) = H^2(X, \mathbb{E}_m)$, Grothendieck montre dans [8], Cor. 6.2., qu'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow {}_p\text{Br}(X) \rightarrow {}_p\text{Br}(F(X)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} F(x)^*/p.$$

Par ailleurs la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$H^r(F, H^s(\overline{X}, \mathbb{E}_m)) \Rightarrow H^{r+s}(X, \mathbb{E}_m)$$

(où $\overline{X} = X \otimes_F \overline{F}$) donne ici une suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(X, \mathbb{E}_m) \rightarrow H^1(\overline{X}, \mathbb{E}_m) \xrightarrow{\text{Gal}(\overline{F}/F)} H^2(F, \mathbb{E}_m) \xrightarrow{d_2} H^2(X, \mathbb{E}_m) \rightarrow 0.$$

D'après la Proposition 2, i), on sait que l'image de d_2 est un groupe d'ordre p . Elle contient $\langle D \rangle$ car $D \otimes F(X)$ est triviale. Donc $\text{Br}(X) = \text{Br}(F)/\langle D \rangle$. Cela montre (*). On montre [3] que le diagramme ci-dessous est commutatif (cf. aussi Proposition 3, ii)). :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{Z}/p & \rightarrow & k_2(F) & \xrightarrow{\quad} & k_2(F(X)) & \xrightarrow{\quad} & A/p & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow h_F & & \downarrow h_{F(X)} & & \downarrow p^N & & \\ 0 & \rightarrow & \mathbb{Z}/p & \rightarrow & {}_p\text{Br}(F) & \rightarrow & {}_p\text{Br}(F(X)) & \rightarrow & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} F(x)^*/p & & \\ & & & & \searrow & & \nearrow & & & & \\ & & & & & {}_p(\text{Br}(F)/\langle D \rangle) & & & & & \\ & & & & \nearrow & & \searrow & & & & \\ & & & & 0 & & \mathbb{Z}/p & \xrightarrow{\quad} & \text{Br}(F)/p & & \end{array}$$

Il en résulte que pour prouver que le morphisme $\text{coker}(h_F) \rightarrow \text{coker}(h_{F(X)})$ est injectif, il suffit de montrer le Lemme suivant

Lemme 6.— Si le groupe $N = \text{Nrd}(D^*)$ contient μ_p , il existe une F -algèbre simple centrale A telle que $[D] = p[A]$ dans $\text{Br}(F)$ et que $[A \otimes_F F(X)]$ soit dans l'image de $h_{F(X)}$.

Preuve.— Par l'argument de transfert usuel, on peut supposer que le degré de toute extension finie de F est une puissance de p . Soit $\zeta \in F^*$ une racine primitive

p -ième de l'unité. Comme ζ est dans l'image de la norme réduite, il existe un sous-corps maximal $L = F(\sqrt[p]{a})$ de D tel que ζ est dans l'image de la norme $F(\sqrt[p]{a})^* \longrightarrow F^*$. D'après I.4. ii) on a $D \simeq A_{\zeta}(a, b)$ pour un certain $b \in F^*$. Identifions μ_p à $\mathbb{Z}/p$ par le choix de ζ , et si $x \in F^*$, notons $\chi_x \in H^1(F, \mathbb{Z}/p)$ le caractère correspondant à la classe de x dans $H^1(F, \mu_p) \simeq H^1(F, \mathbb{Z}/p)$. Si δ est le bord de la suite exacte

$$H^1(F, \mathbb{Z}/p^2) \longrightarrow H^1(F, \mathbb{Z}/p) \xrightarrow{\delta} H^2(F, \mathbb{Z}/p) \simeq {}_p\text{Br}(F)$$

on a $\delta(\chi_a) = (a, \zeta)_F = 0$ (I.4. i)). Donc il existe $\chi \in H^1(F, \mathbb{Z}/p^2)$ tel que $p\chi = \chi_a$. Soit $(b) \in H^1(F, \mu_{p^2})$ la classe de b module $(F^*)^{p^2}$ et A une F -algèbre simple centrale telle que $[A] = \chi \cup (b)$ dans ${}_{p^2}\text{Br}(F)$. On a $p[A] = \chi_a \cup (b) = [D]$. Pour vérifier que $[A \otimes_F F(X)]$ est dans l'image de $h_{F(X)}$ on note que $D \otimes_F F(X)$ est triviale, donc (I.4. i)) $b \in F(X)^*$ est la norme d'un élément $t \in L(X)^*$. On a donc

$$[A \otimes_F F(X)] = N_{L(X)/F(X)}(\chi|_{L(X)} \cup (t)).$$

Comme la restriction de χ à $L(X)$ est d'ordre p , il existe $u \in L(X)^*$ avec $\chi|_{L(X)} = \chi_u$. On a donc

$$[A \otimes_F F(X)] = h_{F(X)}(N_{L(X)/F(X)}(\overline{\{u, t\}})). \quad \text{q.e.d.}$$

VI.2.3. Si E est une extension finie de F de degré premier à p , le morphisme $\text{coker}(h_F) \longrightarrow \text{coker}(h_E)$ est injectif (argument de transfert habituel).

VI.2.4. Montrons que $h_F : k_2(F) \longrightarrow H^2(F, \mu_p^{\otimes 2})$ est surjectif. Soit F_n une suite de corps telle que $F_0 = F$, F_{2m+1} est une extension maximale de degré premier à p de F_{2m} (dans une clôture algébrique de F_{2m}), et F_{2m+2} est le composé des corps $F_{2m+1}(X(a, b))$ où $\{a, b\}$ décrit un ensemble de générateurs de $k_2(F_{2m+1})$. Le corps $F_{\infty} = \varinjlim_n F_n$ n'a pas d'extension de degré premier à p , on a $k_2(F_{\infty}) = 0$, et le morphisme $\text{coker}(h_F) \longrightarrow \text{coker}(h_{F_{\infty}})$ est injectif (Lemme 5 et VI.2.3.). D'après le Lemme 4 on a $\text{Br}(F_{\infty}) = 0$ donc $\text{coker}(h_F) = 0$. q.e.d.

VI.3. Pour montrer que le symbole galoisien

$$h_F : K_2(F)/n \longrightarrow H^2(F, \mu_n^{\otimes 2})$$

est un isomorphisme pour tout entier n ($1/n \in F$), on peut d'abord supposer que $n = p^k$ avec p premier, puis que $\mu_p \subset F^*$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \mu_p \otimes F^* & \longrightarrow & K_2(F)/p^{k-1} & \longrightarrow & K_2(F)/p^k & \longrightarrow & K_2(F)/p \longrightarrow 0 \\ \downarrow \eta & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^1(F, \mu_p^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^2(F, \mu_{p^{k-1}}^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^2(F, \mu_{p^k}^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^2(F, \mu_p^{\otimes 2}) \end{array}$$

est commutatif et ses lignes sont exactes (sauf peut-être en $K_2(F)/p^{k-1}$). Il permet de se ramener par récurrence au cas $k = 1$ traité en VI.1. et VI.2.4..

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S.A. AMITSUR, L.H. ROWEN, J.-P. TIGNOL - *Division algebras of degree 4 and 8 with involution*, Israël J. of Maths. 33(1979), 133-148.
- [2] H. BASS, T. TATE - *The Milnor ring of a global field*, Algebraic K-theory II, Springer, Lect. Notes in Maths. 342(1973), 349-446.
- [3] S. BLOCH - *Torsion algebraic cycles, K_2 and Brauer groups of function fields*, Groupe de Brauer, Springer, Lect. Notes in Maths. 844(1981), 75-102.
- [4] R. BRAUER - *On normal division algebras of index 5*, Proc. Nat. Ac. of Sc. 24 (1938), 243-246.
- [5] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE - *Hilbert's Theorem 90 for K_2 , with application to the Chow groups of rational surfaces*, à paraître aux Inventiones.
- [6] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC, C. SOULÉ - *Quelques théorèmes de finitude en théorie des cycles algébriques*, C.R.A.S., t. 294(28/6/1982), 749-752.
- [7] H. GILLET - *Riemann-Roch Theorems for higher Algebraic K-theory*, Adv. in Maths. 40(1981), 203-289.
- [8] A. GROTHENDIECK - *Le groupe de Brauer III*, dans "Dix exposés sur la cohomologie des schémas", Masson-North Holland, 1968.
- [9] A. GROTHENDIECK et al. - *SGA VI, Théorème de Riemann-Roch*, Springer, Lect. Notes in Maths. 225(1971).
- [10] A.S. MERKURJEV - *On the norm residue symbol of degree 2*, C.R.A.S. de l'URSS (Doklady) 261, n° 3(1981), 542-547.
- [11] A.S. MERKURJEV, A.A. SUSLIN - *K-cohomology of Severi-Brauer varieties and norm residue homomorphism*, Izv. Acad. Sci. URSS 46, n° 5(1982), 1011-1046 (en russe).
- [12] J. MILNOR - *Introduction to Algebraic K-theory*, Annals of Maths. Studies 72 (1971), Princeton Univ. Press.
- [13] D. QUILLEN - *Algebraic K-theory I*, Springer, Lect. Notes in Maths. 341(1973), 85-147.
- [14] U. REHMANN - *Zentrale Erweiterungen der speziellen lineare Gruppe eines Schiefkörpers*, Journal f. d. r. u. a. Math. 301(1978), 77-104.
- [15] U. REHMANN, U. STUHLER - *On K_2 of finite dimensional division algebras over arithmetical fields*, Inv. Math. 50, n° 1(1978), 75-90.
- [16] J.-P. SERRE - *Cohomologie galoisienne*, Springer, Lect. Notes in Math. 5.
- [17] J.-P. SERRE - *Corps locaux*, Hermann, 1968.
- [18] V.V. SCHECHTMAN - *Algebraic K-theory and characteristic classes*, Usp. Mat. Nauk 33, n° 6(1978), 239-240
- [19] C. SOULÉ - *K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale*, Inv. Math. 55(1979), 251-295.
- [20] A.A. SUSLIN - *Torsion in K_2 of fields*, prépublication L.O.M.I. (1982).

- [21] J. TATE - *Relations between K_2 and Galois cohomology*, Inv. Math. 36(1976), 257-274.
- [22] F. WALDHAUSEN - *Algebraic K-theory of generalized free products, I et II*, Annals of Maths. 108(1978), 135-256.
- [23] Sh. WANG - *On the commutator group of a simple algebra*, Amer. J. of Maths. 72(1950), 323-334.

Christophe SOULÉ
Université de Paris VII
U.E.R. de Mathématiques
Tour 45-55, 5e étage
2 Place Jussieu
F-75251 PARIS CEDEX 05