Astérisque

ADRIEN DOUADY

Systèmes dynamiques holomorphes

Astérisque, tome 105-106 (1983), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 599, p. 39-63

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1982-1983__25__39_0>

© Société mathématique de France, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
35e année, 1982/83, n° 599 Novembre 1982

SYSTÈMES DYNAMIQUES HOLOMORPHES

par Adrien DOUADY

L'étude de l'itération des polynômes et des fractions rationnelles complexes a été inaugurée en 1918/19 par Julia et Fatou. Mais, à part le Théorème de Siegel en 1942 et ses perfectionnements ultérieurs, et l'article de Brolin en 1966 qui est surtout une exposition des résultats antérieurs, le sujet a pratiquement dormi jusqu'à ces dernières années. C'est la possibilité de faire des expériences numériques sur ordinateur, voire sur un microordinateur, qui l'a réveillé, avec les observations de Feingenbaum pour le cas réel (*cf.* exposé n° 563 de Lanford à ce séminaire), et pour le cas complexe celles de B. Mandelbrot sur l'ensemble que nous appelons pour cela M, ainsi que de divers ensembles de Julia. Nous tentons de faire le point, deux ans environ après ce réveil, en mentionnant quelques résultats, avec quand c'est possible des démonstrations succintes, et surtout en posant une douzaine de questions ouvertes (*).

Sullivan perçoit l'étude des fractions rationnelles complexes comme le pendant de celle des groupes kleiniens, qui depuis le début du siècle a donné lieu à un volume énorme de littérature mathématique.

I. Fractions rationnelles

Notons Σ la sphère de Riemann, $\Sigma = \underline{\underline{C}} \cup \{\infty\}$, et soit $f : \Sigma \to \Sigma$ une application analytique, donc une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$. Le degré $\deg f$ de f est $d = \sup(\deg P, \deg Q)$; on supposera $d > 1$. On notera f^n la n-ième itérée de f.

1. Points périodiques

Un *point périodique* pour f est un point x de Σ tel qu'il existe un $n > 0$ pour lequel $f^n(x) = x$. Le plus petit n ayant cette propriété est la *période* k de x. Le *cycle* de x est alors $\{x_0, \ldots, x_{k-1}\}$, où $x_i = f^i(x)$, et la *valeur propre* de ce cycle est $\rho = (f^k)'(x) = \prod f'(x_i)$. On dit que x est un point périodique *attractif* (resp. *répulsif*, resp. *indifférent*) si $|\rho| < 1$ (resp. $|\rho| > 1$, resp. $|\rho| = 1$). Un point périodique est dit *superattractif* si $\rho = 0$; cela équivaut à l'existence d'un point critique dans le cycle. On dit que x est un point *prépériodique* s'il existe un entier ℓ tel que $f^\ell(x)$ soit périodique.

Si x est un point périodique attractif de période k, le *bassin* de x est

(*) Les notes sont de Juin 1983.

l'ensemble des points z tels que $f^{nk}(z)$ tende vers x quand n tend vers ∞. Le *bassin immédiat* de x est la composante connexe du bassin de x contenant x. Le bassin (resp. bassin immédiat) d'un cycle attractif est la réunion des bassins (resp. bassins immédiats) des points de ce cycle.

PROPOSITION 1 (Fatou, Julia).— *Tout cycle attractif a dans son bassin immédiat un point critique au moins.*

Démonstration.— Le bassin immédiat U_x d'un point x du cycle contient un point critique de f^k. Sinon, U_x serait isomorphe au disque D et f^k serait un automorphisme de U_x dont l'inverse contredirait le lemme de Schwarz. La proposition en résulte, cqfd.

COROLLAIRE.— a) *Une fraction rationnelle de degré* d *a au plus* $2d-2$ *cycles attractifs.*

b) *Un polynôme de degré* d *a au plus* $d-1$ *cycles attractifs à distance finie.*

Si x est un point périodique indifférent, sa valeur propre ρ est de la forme $e^{2i\pi\vartheta}$; on dit que x est un point périodique indifférent rationnel, diophantien, liouvillesque si ϑ a ces propriétés. On dit que x est *linéarisable* s'il existe un difféomorphisme φ d'un voisinage V de x sur un disque tel que $\varphi \circ f^k \circ \varphi^{-1}$ soit $z \mapsto \rho z$. Le plus grand V possible est le *domaine de linéarisation* de x.

THÉORÈME 1 (Siegel).— *Tout point périodique indifférent diophantien est linéarisable.*

Rüssmann (1972) a étendu ce théorème à certaines valeurs non diophantiennes de ϑ.

QUESTION 1 (ouverte même pour les polynômes $z \longmapsto z^2 + \lambda z$, $|\lambda| = 1$, avec $x = 0$).— *Si x est un point périodique linéarisable, y a-t-il nécessairement un point critique sur la frontière du domaine de linéarisation d'un des points du cycle ?*

Si x est un point périodique indifférent rationnel, il est non linéarisable. Si k désigne la période de x et si $\vartheta = p/q$ (fraction irréductible), on peut dessiner une *fleur* F centrée en x, ayant q' pétales avec q' multiple de q, telle que $f^k(F) \subset F$, et $f^{nk}(z) \longrightarrow x$ pour tout x de F. L'action de f^{kq} sur F est celle d'un champ de vecteurs dont les trajectoires tendent vers x tangentiellement à l'axe des pétales. L'ensemble des z tels que $f^{mk}(z) \in \mathring{F}$ pour un certain m est un ouvert que l'on appelle encore le *bassin* de x. Les composantes connexes contenant les intérieurs des pétales sont distinctes, leur réunion est le *bassin immédiat* de x. On peut montrer, en adaptant la démonstration de la Prop. 1 grâce à une étude locale de f^{kq} au voisinage de x, qu'il y a au moins q'/q points critiques dans le bassin immédiat du cycle de x.

2. Ensemble de Julia

On dit que f est *normale* en un point x de Σ s'il existe un voisinage V de x tel que la suite $f^n|_V$ d'applications de V dans Σ soit équicontinue. L'ensemble J des points de Σ où f n'est pas normale est appelé l'*ensemble de Julia* de f. C'est un compact, et on a $f(J) = f^{-1}(J) = J$. Si $J \neq \Sigma$, J est d'intérieur vide. En effet, si $V_1 \subset \Sigma - J$ et $V_2 \subset J$ étaient des ouverts non vides, on aurait $f(V_2) \subset \Sigma - V_1$ pour tout n, donc les $f^n|_{V_2}$ formeraient une famille équicontinue contrairement à la définition de J.

Si f est un polynôme, J est la frontière de l'ensemble K des $z \in \mathbb{C}$ tels que $f^n(z)$ ne tende pas vers ∞. Nous appellerons K l'*ensemble de Julia rempli*.

L'ensemble J est l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs (Fatou, Julia). Pour tout $x \in J$, l'orbite inverse de x est dense dans J. Il existe sur J une mesure μ ayant la propriété suivante : pour tout $x \in \Sigma$ sauf au plus deux exceptions (1 si f est conjuguée à un polynôme et 2 si f est conjuguée à un monôme), la mesure chargeant chaque point de $f^{-n}(x)$ de la masse d^{-n} tend vaguement vers μ (Brolin). Si on construit une suite (x_n) en choisissant x_0 arbitrairement dans J et en tirant pour chaque n le point x_{n+1} aléatoirement dans $f^{-1}(x_n)$, presque sûrement la suite (x_n) se répartit dans J suivant la mesure μ. Cette propriété peut être utilisée pour faire dessiner facilement les ensembles de Julia par un microordinateur. Inconvénient : si f est un polynôme, la mesure μ est la mesure harmonique de ∞ dans $\Sigma - K$; elle a donc tendance à charger très fortement les pointes de K, et très peu les fjords, qui risquent de passer inaperçus.

QUESTION 2 (ouverte même pour $z \longmapsto z^2 + \lambda z$, $|\lambda| = 1$).— *Peut-il arriver que J soit d'intérieur vide, mais de mesure non nulle ?*

3. Composantes connexes de $\Sigma - J$

Pour toute composante connexe U de $\Sigma - J$, l'ensemble $f(U)$ est une composante connexe de $\Sigma - J$ et f induit une application propre de U sur $f(U)$. On dit que U est périodique s'il existe un $k > 0$ tel que $f^k(U) = U$, prépériodique s'il existe un $k > 0$ et un ℓ tels que $f^{\ell+k}(U) = f^{\ell}(U)$, errante si les $f^n(U)$ sont deux à deux distinctes. Mais Sullivan a démontré :

THÉORÈME 2.— *Il n'y a pas de composante errante.*

Principe de la démonstration.— Soit U une composante errante. Pour n assez grand, f induit un isomorphisme de $f^n(U)$ sur $f^{n+1}(U)$, et quitte à décaler on peut supposer que cela a lieu dès $n = 0$. Soit u une forme de Beltrami (i.e. en $\partial\bar{z}/\partial z$) sur U telle que $\|u\| < 1$, transportons la par f sur les $f^n(U)$, puis sur les

$f^{-m}(f^n(U))$ et prolongeons la par 0 . On obtient sur Σ une forme de Beltrami L^∞ de norme < 1 , qui par le théorème d'Ahlfors-Bers définit sur Σ une structure complexe σ_u (différente en général de la structure standard σ_0), et f est une application analytique de (Σ,σ_u) dans elle-même. Par le théorème d'uniformisation, il existe un isomorphisme φ_u de (Σ,σ_u) sur (Σ,σ_0) . Alors $f_u = \varphi_u \circ f \circ \varphi_u^{-1}$ est une nouvelle fraction rationnelle. Sullivan montre que, pour tout p , on peut trouver dans l'espace des formes de Beltrami sur U continues à support compact un sous-espace E de dimension p et dans E un ouvert non vide W tel que les $(f_u)_{u\in W}$ soient deux-à-deux distinctes. Ceci est en contradiction avec le fait qu'une fraction rationnelle de degré d ne dépend que d'un nombre fini de paramètres, cqfd.

Les composantes périodiques de $\Sigma - J$ appartiennent à l'un des quatre types suivants :

I *Domaine de Fatou* : bassin immédiat d'un point périodique attractif ;

II *Domaine parabolique* : une composante du bassin immédiat d'un point périodique indifférent rationnel ;

III *Domaine de Siegel*: domaine de linéarisation d'un point périodique indifférent irrationnel linéarisable ;

IV *Anneau de Herman* : ouvert isomorphe à une couronne sur laquelle f^k opère par une rotation irrationnelle (des exemples de fractions rationnelles de degré 3 admettant de tels domaines ont été donnés par M. Herman).

Pour les types III et IV, l'application f^k induit un isomorphisme de U sur lui-même, tandis que ce n'est jamais le cas pour les types I et II. Pour les types I et III, il y a dans U un point périodique de période k , tandis qu'il n'y a pas de point périodique dans U pour les types II et IV.

4. Exemples de cas où l'on a $J = \Sigma$

Soient E une courbe elliptique et h un endomorphisme de E de degré $d > 1$. Identifions Σ au quotient de E par la relation d'équivalence identifiant t à $-t$. On déduit de h une application analytique $f : \Sigma \to \Sigma$, pour laquelle tout point critique est prépériodique et $J = \Sigma$ (Lattès, 1918).

Plus généralement, on peut montrer que si f est une fraction rationnelle pour laquelle tout point critique est prépériodique non périodique, l'ensemble de Julia de f est Σ .

M. Herman a étudié les applications de degré 3 :

$$f_{\lambda,\gamma,r} : z \longmapsto \lambda z \frac{z-r}{1-rz} \frac{1-\bar{\gamma}rz}{z-\gamma r}$$

pour $\lambda \in \underline{\underline{S}}^1$, $\gamma \in \underline{\underline{S}}^1$, $r \in]0,\varepsilon[$. Ces applications ont 0 et ∞ comme points fixes indifférents, et laissent stable $\underline{\underline{S}}^1$. Dans l'espace $A = \underline{\underline{S}}^1 \times \underline{\underline{S}}^1 \times]0,\varepsilon[$ des

paramètres, il trouve deux sous-ensembles non dénombrables X et Y, ayant même adhérence, tels que, pour $\alpha \in X$, f_α a une orbite dense et son ensemble de Julia est Σ, et pour $\alpha \in Y$, f_α admet deux disques de Siegel et un anneau. Les f_α pour α dans X (resp. Y) sont deux-à-deux non topologiquement conjuguées.

B. Mandelbrot a observé les applications de degré 2 de la forme $g_\lambda : z \longmapsto \lambda(z + 1/z)$. Un jour où je l'ai rencontré dans un aéroport, il m'a montré un dessin de l'ensemble M_g des valeurs de λ pour lesquelles g_λ n'est pas hyperbolique. L'ensemble des λ pour lesquels $J = \Sigma$ est dense dans M_g. On ignore si cet ensemble est d'intérieur vide et s'il est de mesure nulle(*). Pour $\lambda = i/2$, on retrouve un exemple de Lattès. Nous reviendrons sur cette famille à la fin de cet exposé.

5. Fractions rationnelles hyperboliques

PROPOSITION 2 et DÉFINITION.— *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *tout point critique est attiré par un cycle attractif ;*

(ii) *il existe un voisinage* V *de* J, *une métrique riemannienne sur* V *et un* $\lambda > 1$ *tels que, pour tout* $x \in J$ *et tout* $t \in T_x\Sigma$ *on ait* $\|T_x f(t)\|_{f(x)} \geq \lambda \|t\|_x$.

Si ces conditions sont satisfaites, on dit que f *est* hyperbolique.

Cette terminologie (peut-être pas très heureuse) est utilisée par plusieurs auteurs, notamment par Sullivan.

Démonstration.— (i) $\Rightarrow$ (ii) : Soit A un fermé de Σ formé d'un petit disque autour de chaque point périodique attractif, tel que $f(A) \subset \mathring{A}$. Posons $B = f^{-n}(A)$, où n est assez grand pour que l'image de tout point critique appartienne à B, et $V = \Sigma - B$. En notant $\tilde{V}$ le revêtement universel de V, f^{-1} admet une détermination holomorphe $g : \tilde{V} \to \tilde{V}$. Il résulte du lemme de Schwarz que la métrique sur V provenant de la métrique de Poincaré de $\tilde{V}$ répond à la question.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Notons A le voisinage d'ordre r de J dans V et posons $U = \Sigma - A$. Si r est assez petit, $f(U)$ est relativement compact dans U, donc contenu dans une réunion finie $U_1 \cup \ldots \cup U_p$ de composantes connexes de U. Soit u un point critique ; évidemment $u \notin J$ et, si r a été choisi assez petit, $u \in U$. Il existe $k > 0$ et ℓ tels que $f^\ell(u)$ et $f^{\ell+k}(u)$ soient dans la même composante U_i de U. Alors $f^k(U_i)$ est relativement compact dans U_i, et admet dans U_i un point fixe attirant U_i tout entier, cqfd.

Si f est hyperbolique, l'ensemble J admet la propriété de *quasi-autosimilitude* suivante, qui ramène l'étude microscopique de J à son étude macroscopique :

Il existe dans $\mathbb{R}_+^*$ *des nombres* a, α, β, r_0 *tels que pour tout* $x \in J$ *et tout* r *tel que* $0 < r \leq r_0$, *il existe un homéomorphisme* h *de* $J \cap B(x,r)$ *sur une partie* H *de* J *tel que*

(*) Un théorème de Mary Rees (1983) entraîne qu'il est de mesure > 0.

$$\alpha a/r\ d(x',x'') \leq d(h(x'),h(x'')) \leq \beta a/r\ d(x',x'')$$

et que H *contienne* $J \cap B(h(x),\alpha a/r)$.

Il en résulte que J a une dimension de Hausdorff δ comprise strictement entre 0 et 2 , et est de mesure finie et > 0 en dimension δ . La dimension entropique de J coïncide avec sa dimension de Hausdorff (ces résultats sont dûs à Sullivan, d'après des idées de Bowen).

Dans l'espace $\underline{F}_d$ des fractions rationnelles de degré d , qui est un ouvert de Zariski de $\underline{\underline{P}}^{2d+1}\underline{\underline{C}}$, l'ensemble $\underline{H}$ des fractions rationnelles hyperboliques est ouvert. Si f_1 et f_2 appartiennent à la même composante connexe de $\underline{H}$, elles sont quasi-conformément conjuguées sur leur ensemble de Julia au sens suivant : il existe un homéomorphisme φ de J_{f_1} sur J_{f_2} admettant un prolongement quasi-conforme à Σ , et tel que $f_2 \circ \varphi = \varphi \circ f_1$.

Ruelle a montré, en utilisant une formule de Bowen, que l'application $f \longmapsto \dim J_f$ de $\underline{H}$ dans $\underline{\underline{R}}_+^*$ est $\underline{\underline{R}}$-analytique.

QUESTION 3.— a) *Est-ce que* $\underline{H}$ *est dense dans* $\underline{F}_d$?

b) *Dans l'espace* $\underline{P}_d$ *des polynômes moniques de degré* d , *l'ouvert* $\underline{P}_d \cap \underline{H}$ *est-il dense ?*

6. Stabilité structurelle générique

THÉORÈME 3 (Sullivan-Sad-Mañe, complété par Sullivan-Thurston).— *Soient* Λ *une variété et* $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *une famille analytique de fractions rationnelles de degré* d . *Il existe alors dans* Λ *un ouvert dense* $\underline{S}$ *tel que, pour* λ *et* μ *dans la même composante connexe de* $\underline{S}$, *les applications* f_λ *et* f_μ *soient quasi-conformément conjuguées.*

Principe de la démonstration.— On construit d'abord un ouvert dense $\underline{R}$ tel que, pour λ et μ dans la même composante connexe de $\underline{R}$, f_λ et f_μ soient quasi-conformément conjugués sur leur ensemble de Julia. Nous dirons qu'un point périodique indifférent x de f_λ est *persistant* s'il existe un voisinage connexe V de λ dans Λ et une application analytique $\mu \longmapsto \underline{x}(\mu)$ de V dans Σ tel que $\underline{x}(\mu)$ soit un point périodique indifférent de f_μ pour tout μ et que $\underline{x}(\lambda) = x$. Ceci entraîne que la période et la valeur propre de $\underline{x}(\mu)$ restent constantes quand μ parcourt V .

L'ouvert $\underline{R}$ est l'intérieur de l'ensemble des λ tels que f_λ n'ait pas de point périodique indifférent non persistant. Il est assez facile de voir que $\underline{R}$ est dense. Soient V un ouvert simplement connexe de $\underline{R}$ et λ un point de V . Pour tout point périodique x de f , il existe une application analytique $\underline{x}$ de V dans Σ telle que $\underline{x}(\lambda) = x$ et que pour tout μ le point $\underline{x}(\mu)$ soit périodique

de même période pour f_μ . Les graphes de ces applications analytiques sont disjoints. Il en résulte, par une variante du théorème de Picard, que ces applications forment une famille équicontinue. Soit x un point de J_λ et choisissons une suite (x_p) de points périodiques tendant vers x . Quitte à extraire une suite, les fonctions $\underline{x}_p$ convergent localement uniformément vers une fonction $\underline{x}$. Cette fonction ne dépend pas de la suite extraite : en effet, si on avait deux limites $\underline{x}$ et $\underline{x}'$ distinctes, leurs graphes se couperaient au point (λ,x) et, pour $\underline{x}_p$ assez voisine de $\underline{x}$ et $\underline{x}_q$ assez voisine de $\underline{x}'$, les graphes de $\underline{x}_p$ et $\underline{x}_q$ se couperaient en étant distincts, ce qui est impossible. On vérifie alors que l'application $x \longmapsto x(\mu)$ de J_λ dans J_μ est continue, et en échangeant les rôles de λ et μ on voit que c'est un homéomorphisme. On montre par un calcul que cet homéomorphisme est quasi-conforme, d'où la propriété désirée pour $\underline{R}$.

Pour obtenir l'ouvert $\underline{S}$, il faut ôter des $\underline{R}$ les valeurs de λ pour lesquelles il se produit un accident qui modifie la dynamique sur le complémentaire de l'ensemble de Julia. Au dessus de chaque composante de l'ensemble $\underline{S}$ ainsi défini, on a une trivialisation dynamique de l'ensemble de Julia relatif, et une trivialisation dynamique de son complémentaire. Pour recoller ces deux trivialisations, il y a des difficultés dans le cas où il y a, de façon persistante des disques de Siegel ou des anneaux de Herman. Aux dernières nouvelles, ces difficultés ont été résolues par Sullivan-Thurston.

II. Polynômes quadratiques

Dans ce paragraphe, nous étudions la famille $(f_c)_{c\in\underline{\underline{C}}}$ définie par $f_c(z) = z^2 + c$. Tout polynôme de degré 2 est conjugué par une application affine unique à un f_c unique. Par exemple $z \longmapsto z^2 + \lambda z$ est conjugué à f_c pour $c = \lambda/2 - \lambda^2/4$. On note K_c l'ensemble de Julia rempli de f_c .

1. L'ensemble M

PROPOSITION 3 (Julia, Fatou).— a) *Si* $0 \in K_c$, *l'ensemble* K_c *est connexe.*

b) *Si* $0 \notin K_c$, *l'ensemble* K_c *est homéomorphe à l'ensemble de Cantor.*

Démonstration.— Choisissons $R > 1 + |c|$ et posons $V_n = (f^n)^{-1}(D_R)$ pour tout n . On a $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$ et $K_c = \cap V_n$.

a) Pour tout n , l'ensemble V_{n+1} est un revêtement de V_n de degré 2 ramifié en 1 point, V_0 est un disque, donc V_n est homéomorphe à un disque pour tout n , et $K_c = \cap \overline{V}_n$ est connexe.

b) Il existe un m tel que $0 \in V_m$ et $c = f_c(0) \notin V_m$. Alors V_m est homéomorphe à un disque, mais pour tout $n \geq m$ l'espace V_{n+1} est un revêtement de degré 2 , non ramifié, de V_n . Par suite, pour tout k l'ouvert V_{m+k} a 2^k composantes

connexes homéomorphes au disque. Notons δ_k le maximum des diamètres de ces composantes connexes pour la métrique de Poincaré μ de V_m. L'application $f_c : V_{m+1} \longrightarrow V_m$ admet deux sections g_0 et g_1 lipschitziennes de rapport $\lambda < 1$ pour μ, d'où $\delta_k \leq \lambda^{k-1}\delta_1$. En particulier $\delta_k \to 0$, d'où b).

On note M l'ensemble des $c \in \underline{\underline{C}}$ tels que $0 \in K_c$, autrement dit tels que K_c soit connexe, et M' l'ensemble des $c \in \underline{\underline{C}}$ tels que f_c admette un cycle attractif à distance finie (ce cycle est alors unique). L'ensemble des c tels que f_c soit hyperbolique est $(\underline{\underline{C}} - M) \cup M'$. L'ensemble M est compact, M' est ouvert, et on peut montrer que M' est la réunion de certaines composantes connexes de $\mathring{M}$, qu'on appelle les *composantes hyperboliques*. La question de savoir si $\mathring{M}$ a des composantes connexes non hyperboliques est ouverte (Question 3, b) en degré 2).

2. Description des composantes hyperboliques de $\mathring{M}$

Pour chaque $c \in M'$, notons $\rho(c)$ la valeur propre du cycle attractif de f_c. L'ordre du cycle attractif reste constant sur chaque composante de M' (*période* de cette composante), et l'application $\rho : M' \longrightarrow D$ est holomorphe.

THÉORÈME 4 (Douady-Hubbard, d'après des idées de Sullivan).— *Pour chaque composante* W *de* M', *l'application* ρ *induit un isomorphisme* ρ_W *de* W *sur* D.

Démonstration.— Pour tout $\lambda \in D$, notons q_λ l'application $z \longmapsto z.\dfrac{z+\lambda}{1+\bar{\lambda}z}$; c'est une application holomorphe de D dans D, propre de degré 2, on a $q_\lambda(0) = 0$ et $q'_\lambda(0) = \lambda$.

Soit $c \in W$, posons $\lambda_0 = \rho(c)$ notons U la composante connexe de $\mathring{K}_c$ contenant 0 et k la période de U. Il existe un homéomorphisme analytique φ de U sur D tel que $\varphi \circ f_c^k \circ \varphi^{-1} = q_{\lambda_0} : D \to D$. Soit r tel que $|\lambda_0| < r < 1$, posons $B = \overline{D}_r$ et $A_\lambda = q_\lambda^{-1}(B)$ pour $\lambda \in D$. On a $B \subset \mathring{A}$ pour tout λ, et si $|\lambda| < r$ l'ensemble $Q = A_\lambda - \mathring{B}$ est homéomorphe à une couronne fermée. Posons $E = \varphi^{-1}(A_{\lambda_0})$. On peut construire pour tout $\lambda \in D_r$ un difféomorphisme ψ_λ de E sur A_λ tel que $\psi_\lambda \circ f_c^k = q_\lambda \circ \psi_\lambda$ sur le bord de E, et ceci de façon que $(\lambda, z) \longmapsto \psi_\lambda(z)$ soit de classe C^1 et $\psi_{\lambda_0} = \varphi$. Pour tout $\lambda \in D_r$ on peut définir $g_\lambda : \Sigma \to \Sigma$ par $g_\lambda = f_c$ sur $\Sigma - E$ et $g_\lambda^k = \psi_\lambda^{-1} \circ q_\lambda \circ \psi_\lambda$ sur E. On définit sur E une structure presque complexe σ_λ par $\sigma_\lambda = \psi_\lambda^* \sigma_0$, où σ_0 est la structure standard. On prolonge σ_λ à l'ensemble $\bigcup f_c^{-n}(E) = \mathring{K}$ par la condition $g_\lambda^* \sigma_\lambda = \sigma_\lambda$, puis à Σ entière par $\sigma_\lambda = \sigma_0$ sur $\Sigma - \mathring{K}$. La structure σ_λ ainsi définie sur Σ est quasi-conforme à σ_0, donc intégrable d'après Ahlfors-Bers et d'après le théorème d'uniformisation il existe un isomorphisme Φ_λ de (Σ, σ_λ) sur (Σ, σ_0), tangent à l'identité en ∞ et tel que $\Phi_\lambda(0) = 0$. L'application $\Phi_\lambda \circ g_\lambda \circ \Phi_\lambda^{-1}$ est de la forme $z \longmapsto z^2 + c_\lambda$. On vérifie que c_λ dépend continûment de λ, que $c_{\lambda_0} = c$, que $c_\lambda \in W$ pour tout $\lambda \in D_r$ et que $\rho(c_\lambda) = \lambda$. Autrement dit $\lambda \longmapsto c_\lambda$ est une section continue de ρ_W

sur D_r . Comme ceci est possible pour des r arbitrairement voisins de 1 , l'application ρ_W est un homéomorphisme de W sur D , cqfd.

Compléments : On appelle *centre* de W le point $\rho_W^{-1}(0)$. Les centres des composantes de M' de période divisant k sont les racines de l'équation $f_c^k(0) = 0$ qui est de degré 2^{k-1} en c ; ce sont des racines simples, donc ces composantes sont au nombre de 2^{k-1} .

L'application ρ_W se prolonge en un homéomorphisme de $\overline{W}$ sur $\overline{D}$. La frontière de W est une partie d'une courbe $\underline{\underline{R}}$-algébrique. Le point $\rho_W^{-1}(e^{2i\pi t})$ de ∂W est appelé point d'*argument interne* t (l'unité d'angle est le tour), le point d'argument interne 0 est appelé la *racine* de W . Tout point de ∂W d'argument interne rationnel $t \neq 0$ est la racine d'une autre composante hyperbolique W' : on dit alors que W' est déduite de W par *bifurcation* d'argument t .

Le bord de la composante de période 1 est la cardioïde ensemble des $\lambda/2 - \lambda^2/4$ pour $|\lambda| = 1$. La composante de période 2 est le disque de centre -1 et de rayon $1/4$. L'existence de composantes qui ne se déduisent pas de la cardioïde par une suite finie de bifurcations a été découverte par Mandelbrot.

3. Description des éventuelles composantes non hyperboliques

Supposons qu'il existe une valeur de c telle que K_c soit d'intérieur vide mais de mesure non nulle, et qu'il existe un champ ξ de directions de droites réelles, défini presque partout sur K_c , mesurable et invariant par f_c . Alors pour tout $\lambda \in D$ on peut définir une forme de Beltrami $u_\lambda \partial\overline{z}/\partial z$ par $|u_\lambda(x)| = |\lambda|$ et $\arg u_\lambda(x) = 2 \arg \xi(x) + \arg \lambda$ pour $x \in K_c$ et $u_\lambda(x) = 0$ pour $x \notin K_c$. Cette forme définit sur Σ une structure σ_λ invariante par f_c , et si φ est un isomorphisme de (Σ,σ_λ) sur (Σ,σ_0) tangent à l'identité en ∞ et tel que $\varphi(0) = 0$, l'application $\varphi \circ f_c \circ \varphi^{-1}$ est de la forme $z \longmapsto z^2 + c_\lambda$.

On peut alors montrer que $\lambda \longmapsto c_\lambda$ est un homéomorphisme de D sur une composante non hyperbolique de $\mathring{M}$ contenant c . Sullivan, Sad et Mañe ont montré que, s'il y a dans $\mathring{M}$ des composantes non hyperboliques, elles sont nécessairement obtenues par ce procédé. Plus généralement, une réponse négative à la question 2 entraîne une réponse positive à la question 3, b). On n'est guère avancé, car la question 2, qui est l'analogue pour l'itération des fractions rationnelles de la conjecture d'Ahlfors pour les groupes kleiniens, a l'air plutôt plus difficile que la question 3.

4. Connexités de M

THÉORÈME 5 (Douady-Hubbard).— *L'ensemble* M *est connexe.*

Démonstration.— On va exhiber un homéomorphisme $\underline{\underline{C}}$-analytique de $\Sigma - M$ sur $\Sigma - \overline{D}$. Pour $c \in M$, soit φ_c une représentation conforme de $\Sigma - K_c$ sur $\Sigma - \overline{D}$, telle que $\varphi_c(\infty) = \infty$. L'application $\varphi_c \circ f_c \circ \varphi_c^{-1}$ de $\Sigma - \overline{D}$ dans lui-même est holomorphe, propre de degré 2 avec ∞ comme point fixe superattractif. On peut donc choisir

φ_c de façon que ce soit $f_0 : z \mapsto z^2$.

Pour c quelconque, il existe encore au voisinage de ∞ une application φ_c conjuguant f_c à f_0 . La fonction $\eta_c = \mathrm{Log}|\varphi_c|$ se prolonge en une fonction continue sur $\underline{\underline{C}}$, nulle sur K_c , harmonique sur $\underline{\underline{C}} - K_c$ avec en ∞ une singularité de la forme $\mathrm{Log}|z| + \sigma(1)$. La fonction φ_c se prolonge en une représentation conforme de $\Sigma - L_c$ sur $\Sigma - \overline{D}_R$, où L_c est l'ensemble des z tels que $\eta_c(z) \leq \eta_c(0)$ et $\mathrm{Log}\, R = \eta_c(0)$. On a $\eta_c(c) = 2\eta_c(0)$ car $c = f_c(0)$, donc pour $c \notin M$ on a $c \notin L_c$ et on peut poser

$$\Phi(c) = \varphi_c(c) .$$

On montre que la fonction $\Phi : \underline{\underline{C}} - M \longrightarrow \underline{\underline{C}} - \overline{D}$ ainsi définie est holomorphe et propre, et que $\Phi(c)/c$ tend vers 1 quand c tend vers ∞ . Il en résulte que, en posant $\Phi(\infty) = \infty$, l'application Φ est un isomorphisme de $\Sigma - M$ sur $\Sigma - \overline{D}$, cqfd.

Cette construction semble moins mystérieuse si on l'insère dans une description à la Teichmüller de chaque composante connexe de l'ouvert $\underline{H}$ du § 1, n° 5, telle que Sullivan doit la donner dans "Quasi conformal homeomorphisms and dynamics III".

5. Questions de connexité locale

QUESTION 4.— *L'ensemble* M *est-il localement connexe ?*

On conjecture que oui, mais on ne peut pas appliquer à cette question la méthode qui consiste à démontrer des propriétés de M à partir des propriétés analogues des K_c , car il existe des c tels que K_c ne soit pas localement connexe.

Pour tout c tel que f_c ait un cycle attractif ou un cycle indifférent rationnel, ou tel que le point critique 0 soit prépériodique, l'espace K_c est localement connexe.

Si f_c admet un point fixe indifférent non linéarisable (c'est le cas si c est un point de la cardioïde d'argument interne suffisamment liouvillesque), ou un point fixe indifférent linéarisable mais 0 n'appartenant pas à la frontière du domaine de linéarisation (on ignore si c'est possible), l'ensemble K_c n'est pas localement connexe (Douady-Sullivan). La démonstration consiste à appliquer le lemme 1 du n° 6 à l'ensemble A des arguments externes du point fixe (resp. des points du bord du domaine de linéarisation).

QUESTION 5.— *Parmi les* c *tels que* f_c *admette un point fixe indifférent linéarisable, quels sont ceux pour lesquels* K_c *est localement connexe ? Y en a-t-il ? Y en a-t-il pour lesquels ce n'est pas le cas ?*

Pour un tel c s'il y en a, on a une description précise de K_c .

6. Arguments externes

Soit $K \subset \underline{\underline{C}}$ un compact connexe. Il existe un isomorphisme unique $\psi : \Sigma - \overline{D} \longrightarrow \Sigma - K$ tel que $\psi(\infty) = \infty$ et que $T_\infty \psi \in \underline{\underline{R}}_+^*$. Pour tout $\vartheta \in \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{R}}/\underline{\underline{Z}}$, l'image par ψ de la demi-droite formée des $r\, e^{2i\pi\vartheta}$ pour $1 < r < \infty$ est appelée le *rayon externe* de K d'argument ϑ. Si $\psi(r\, e^{2i\pi\vartheta})$ a une limite $x \in K$ quand r tend vers 1, on dit que le rayon externe d'argument ϑ aboutit en x, ou que x admet ϑ comme *argument externe*. Si K est localement connexe, ψ admet un prolongement continu $\Sigma - D \longrightarrow \Sigma - \mathring{K}$ (Carathéodory), donc tout rayon externe aboutit et tout point de la frontière de K admet au moins un argument externe (éventuellement plusieurs, ainsi si K est le segment $[-1,+1]$, les arguments externes de x sont $\pm \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arc} \cos x$).

Soit c un point de M. On peut montrer que tout rayon externe de K_c d'argument rationnel à dénominateur impair (resp. pair) aboutit en un point de la frontière de K_c, périodique (resp. prépériodique non périodique), répulsif ou indifférent rationnel. Réciproquement tout point prépériodique répulsif ou indifférent rationnel a un nombre fini non nul d'arguments externes, qui sont tous rationnels. La finitude résulte du lemme suivant, appliqué à l'ensemble des arguments externes des points du cycle :

Lemme 1.— *Dans* $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{R}}/\underline{\underline{Z}}$, *soit* A *un fermé tel que* $t \longmapsto 2t$ *induise une bijection* q *de* A *sur* A. *Alors* A *est fini et ses éléments sont rationnels à dénominateur impair.*

Soit α tel que $|t - t'| < \alpha$ entraîne $|q^{-1}(t) - q^{-1}(t')| < 1/4$ donc en fait $< \alpha/2$. On peut recouvrir A par des ensembles $V_1, \ldots, V_k$ de diamètre $< \alpha$. Alors $q^{-n}(V_i)$ est de diamètre $< \alpha/2^n$, et on voit que A a au plus k éléments. Si t est périodique d'ordre k' pour q, il est de la forme $p/2^{k'} - 1$.

PROPOSITION 4.— *Soit* c *un point de* M *tel que* 0 *soit prépériodique non périodique pour* f_c.

a) *L'ensemble* K_c *est localement connexe et d'intérieur vide. Le point* c *admet dans* K_c *un nombre fini d'arguments externes qui sont rationnels à dénominateur pair.*

b) *Les arguments externes de* c *dans* M *sont les arguments externes de* c *dans* K_c.

Pour montrer que K_c est localement connexe, on construit une métrique pour laquelle f_c est fortement expansif. Soient $(x_0 = 0, x_1 = c, \ldots, x_\ell, \ldots, x_{\ell+k} = x_\ell)$ l'orbite directe de 0 et X le revêtement de D_R ramifié d'ordre 2 au-dessus de $x_1, \ldots, x_{\ell+k-1}$ universel, R étant choisi assez grand. La métrique sur D_R image de la métrique de Poincaré de X répond à la question. La partie a) résulte

ensuite des remarques qui précèdent l'énoncé, et la partie b) traduit, après un passage à la limite, la formule $\Phi(c) = \varphi_c(c)$.

Soit c un point de M tel que f_c ait un cycle attractif (resp. un cycle indifférent rationnel). Notons U_i la composante connexe de $\mathring{K}_c$ contenant $f_c^i(0)$ et soit k le plus petit i tel que $U_i = U_0$. L'application f_c^k du bord de U_i dans lui-même est de degré topologique 2 , et a un point fixe unique α_i qu'on appelle la *racine* de U_i . Les α_i forment un cycle d'ordre k' divisant k , qui est répulsif (resp. qui est le cycle indifférent).

PROPOSITION 5.— *Soit* c *un point de* M *tel que* f_c *admette un cycle indifférent rationnel. Alors* c *a dans* M *deux arguments externes* (sauf si $c = 1/4$), *qui sont les arguments externes* ϑ *et* ϑ' *de* α_1 *dans* K_c *correspondant aux rayons externes adjacents à* U_1 . *Ces arguments sont rationnels à dénominateur impair.*

Ce résultat repose sur le

Lemme 2 (du coup de fouet).— *Avec les notations de la Proposition* 5, *soit* P *le pétale de* α *contenu dans* U_1 . *Il existe dans* $\mathring{P}$ *un secteur ouvert* $S = \{z \mid 0 < |z - \alpha_1| < R\ ,\ \beta_1 < \arg(z - \alpha_1) < \beta_2\}$, *centré sur l'axe de symétrie de* P , *tel que, pour tout compact* Q *contenu dans* S , *il existe un* r_0 *tel que, pour* $0 < r \leq r_0$ *il existe dans le cercle de centre* c *et de rayon* r *un arc* J (resp. J') *tel que, quand* c' *parcourt* J (resp. J'), *le rayon externe de* $L_{c'}$ (*cf.* dém. du th. 5) *d'argument* ϑ (resp. ϑ') *balaye* Q .

Voici une idée de la démonstration de la Prop. 5 à partir du lemme 2. Il existe un n tel que $f_c^{nk}(c) \in S$; soit Q un voisinage compact de ce point dans S . Si on choisit r assez petit, on a $f_{c'}^{nk}(c') \in Q$ pour tout c' tel que $|c' - c| = r$, et d'après le lemme il existe un $c' \in J$ tel que $f_{c'}^{nk}(c')$ appartienne au rayon externe de $L_{c'}$ d'argument ϑ . Alors c' lui-même appartient à ce rayon externe, et en vertu de la formule $\Phi(c') = \varphi_{c'}(c')$, le point c' appartient au rayon externe de M d'argument ϑ .

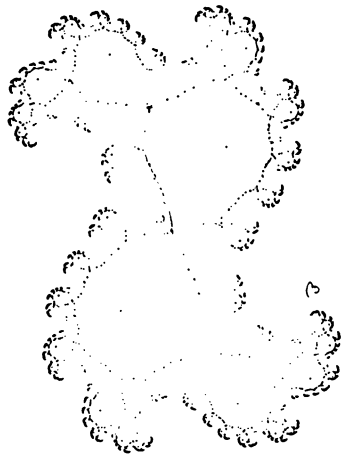
7. L'involution définie par M

Si W est une composante de M', la racine de W est un point c tel que f_c admette un cycle indifférent rationnel. On obtient ainsi une bijection de l'ensemble des composantes de M' sur l'ensemble des c tels que f_c ait un cycle indifférent rationnel. La surjectivité est assez facile ; l'injectivité est donnée par la démonstration de la Prop. 5, si on prend celle-ci soigneusement.

Notons $\underline{I}$ l'ensemble des $t \in [0,1]$ rationnels à dénominateur impair. Pour $\vartheta \in \underline{I}$, la *période* de ϑ est le plus petit k tel que ϑ soit de la forme $p/2^k - 1$; c'est aussi la période du développement de ϑ en base 2 . Pour tout

Ensembles de Julia

Maryvonne D.-Teissier (ENS)



Véronique Gautheron (IREM)

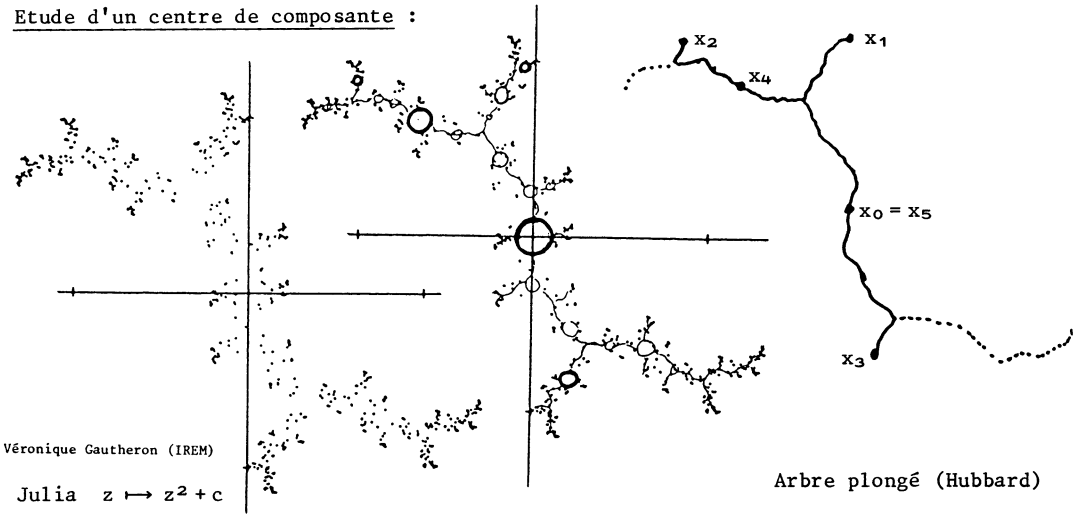
Un ensemble de Cantor :

Julia $z \longmapsto z^2 + 0.32 + 0.043\,i$

Un ensemble de Julia avec disque de Siegel : $z \longmapsto z^2 + e^{i}z$

($1/2\pi$ est diophantien)

Etude d'un centre de composante :



Véronique Gautheron (IREM)

Julia $z \longmapsto z^2 + c$

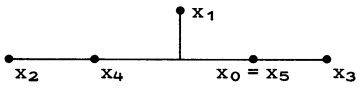
$c = -.044212 + .986580\,i$

Donnée brute

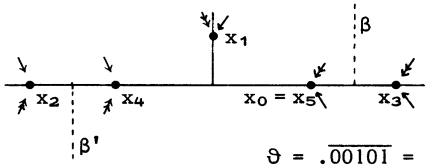
Interprétation

Arbre plongé (Hubbard)

Arbre combinatoire :



Calcul des arguments externes :



$\vartheta = .\overline{00101} = 5/31$

$\vartheta' = .\overline{00110} = 6/31$

$\vartheta \in \underline{I}$, le rayon externe de M d'argument ϑ aboutit en un point $c \in M$ qui est la racine d'une composante W . La période de ϑ est égale à l'ordre du cycle attractif de $f_{c'}$ pour $c' \in W$. Pour $t, t' \in [0,1]$, nous écrirons $t \sim_\vartheta t'$ si les rayons externes de $K_{c'}$ d'argument t et t' aboutissent au même point pour $c' \in W$. Pour $\vartheta, \vartheta' \in \underline{I}$, nous écrirons $\vartheta \sim_M \vartheta'$ si les rayons externes de M d'arguments ϑ et ϑ' aboutissent au même point. On obtient ainsi sur $\underline{I}$ une relation d'équivalence dont chaque classe a exactement deux éléments. Si $\vartheta \sim_M \vartheta'$, les nombres ϑ et ϑ' ont même période ; deux classes distinctes pour cette relation sont non enlacées au sens suivant : le birapport est positif.

On peut caractériser de façon arithmétique la relation d'équivalence définie par un $\vartheta \in \underline{I}$: Posons $\varepsilon_\vartheta(t) = 1$ si $t \in]\vartheta/2, \vartheta/2 + 1/2[$, $\varepsilon_\vartheta(t) = 1/2$ si $t = \vartheta/2$ ou $\vartheta/2 + 1/2$ et $\varepsilon_\vartheta(t) = 0$ sinon. On a $t \sim_\vartheta t'$ si et seulement si $|\varepsilon_\vartheta(2^i t \bmod. 1) - \varepsilon_\vartheta(2^i t' \bmod. 1)| \leq 1/2$ pour tout i . On a $\vartheta \sim_M \vartheta'$ si et seulement si ϑ et ϑ' ont même période k et définissent la même relation d'équivalence sur $[0,1]$.

QUESTION 6.— *Pour* $\vartheta \in I$ *de période* k , *le conjugué* ϑ' *de* ϑ *est-il le plus petit élément de période* k *tel que* $\{\vartheta,\vartheta'\}$ *soit non enlacé avec toutes les classes* $\{u,u'\}$ *de période* $< k$, *ou de période* k *avec* $u < \vartheta$?

8. Arbres de Hubbard

J.H. Hubbard a eu l'idée d'associer à chaque composante W de M' un objet qui concentre l'information combinatoire que l'on peut tirer de l'étude de l'ensemble de Julia de f_c pour $c \in W$.

Appelons *arbre de Hubbard* un arbre topologique fini H , muni d'une suite finie $(x_0,\ldots,x_{k-1})$ de points de H , appelés *points marqués*, et d'une classe d'isotopie de plongements de H dans $\underline{\underline{R}}^2$ (ou ce qui revient au même d'un ordre cyclique entre les brins aux points de branchement), le tout satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) Toutes les extrémités sont des points marqués ;

(ii) Il existe deux fermés H' et H'' tels que $H = H' \cup H''$ et $H' \cap H'' = \{x_0\}$, et une application continue $F : H \to H$ telle que $F_{|H'}$ et $F_{|H''}$ soient injectives et respectent l'ordre cyclique aux points de branchement, et que $F(x_i) = x_{i+1}$ (avec la convention $x_k = x_0$).

On ne demande pas que les points de branchements soient des points marqués, ni que F applique des points marqués liés directement dans H sur des points marqués liés directement. On demande l'existence de F , mais F ne fait pas partie des données de la structure.

Les conditions (i) et (ii) entraînent que les extrémités sont $x_1,\ldots,x_{k'}$ pour un certain k' , les autres points marqués ayant chacun 2 brins. Par suite,

H' et H'' sont en fait déterminés à l'ordre près.

Soit W une composante de M', notons c_0 le centre de W et $(x_0,\dots,x_{k-1})$ le cycle superattractif de f_{c_0}, avec $x_0 = 0$. Connectons les points de ce cycle de façon minimale par des chemins contenus dans K_{c_0}. On obtient un arbre topologique H. On peut choisir les chemins joignant les x_i de façon que $f_{c_0}(H) \subset H$, par exemple en exigeant que, lorsqu'un chemin traverse une composante connexe U de $\mathring{K}_{c_0}$, il la traverse suivant la géodésique de Poincaré de U. Alors H, muni des points x_i et de la classe de son plongement naturel dans $\underline{\underline{C}}$, est un arbre de Hubbard.

Considérons les trois ensembles suivants :

— l'ensemble $\underline{W}$ des composantes connexes de M' ;

— l'ensemble $\underline{J}$, quotient de $\underline{I}$ défini au n° 7 par la relation $\sim_M$;

— l'ensemble $\underline{H}$ des classes d'isomorphie d'arbres de Hubbard.

La construction décrite ci-dessus définit une application $\eta : \underline{W} \to \underline{H}$. On définit une application $\varkappa : \underline{J} \to \underline{W}$ en associant à $\vartheta \in \underline{I}$ la composante de M' dont la racine est le point où aboutit le rayon externe de M d'argument ϑ. Cette application est bijective.

THÉORÈME 6 (Douady-Hubbard).— *L'application* η *est injective.*

Dans [DH], nous donnons un algorithme qui permet d'écrire le développement en base 2 des arguments externes ϑ et ϑ' de la racine d'une composante W de M' connaissant l'arbre de W, autrement dit nous construisons une application $\sigma : \underline{H} \to \underline{J}$ telle que $\varkappa \circ \sigma \circ \eta = \mathrm{id}_{\underline{W}}$. L'idée menant à cet algorithme est la suivante : notons β et β' les points de K_{c_0} d'argument externe 0 et $1/2$ (le point β est le point fixe le plus à droite et $\beta' = -\beta$), et $\hat{H}$ l'arbre obtenu en joignant β et β' à H de façon minimale dans K_{c_0}. On peut reconstituer la structure combinatoire de $\hat{H}$ à partir de celle de H. Le rayon externe R_1 de K_{c_0} d'argument ϑ aboutit au point α_1 (Prop. 5), et pour tout n le rayon externe R_n d'argument $2^{n-1}\vartheta$ aboutit en $\alpha_n = f_c^{n-1}(\alpha_1)$. Le n-ième chiffre de ϑ sera 0 ou 1 suivant que $2^{n-1}\vartheta$ appartient à $]0,1/2[$ ou à $]1/2,1[$, autrement dit suivant que R_n est d'un côté ou de l'autre du chemin menant de β à β', ce qu'on peut décider de façon combinatoire.

Le Th. 6 a, pour les polynômes $x \longmapsto x^2 + c$, $c \in \underline{\underline{R}}$ des retombées importantes : notons $\underline{W}_{\underline{\underline{R}}}$ l'ensemble des composantes W de M' telles que $W \cap \underline{\underline{R}} \neq \emptyset$. Pour $W \in \underline{W}_{\underline{\underline{R}}}$, l'ensemble W est symétrique par rapport à $\underline{\underline{R}}$, le centre et la racine de W sont réels, l'arbre H est un segment de $\underline{\underline{R}}$ et toute l'information est contenue dans l'ordre dans lequel se trouvent, sur $\underline{\underline{R}}$, les points x_i. L'application η induit une application $\eta_{\underline{\underline{R}}}$ qui à $W \in \underline{W}_{\underline{\underline{R}}}$ de période k associe un ordre

sur $\{0,\dots,k-1\}$. Il résulte du Th. 6 que $\eta_{\underline{\underline{R}}}$ est injective. Milnor et Thurston avaient établi l'équivalence de cet énoncé avec plusieurs autres, mais, avec des méthodes purement réelles, ils n'avaient pu l'obtenir.

QUESTION 7.— *L'application* η *est-elle bijective ?*

Les arbres de Hubbard considérés ici sont les arbres périodiques. Dans [DH], nous considérons aussi des arbres prépériodiques, correspondant au cas où 0 est prépériodique pour f_c . Le Th. 6 s'étend à ce cas, mais on sait que dans ce cadre l'application η n'est pas surjective.

QUESTION 8.— *Comment déterminer, au vu de l'arbre de Hubbard d'une composante de* M' *, où cette composante se trouve dans* M *?* (*)

III. Vers une chirurgie des systèmes dynamiques holomorphes

1. Applications à allure polynomiale

De même qu'une grande partie des résultats obtenus pour les polynômes $x \longmapsto x^2 + c$ avec c réel s'étendent aux fonctions convexes à dérivée schwarzienne négative, de même on est frappé, quand on étudie d'un point de vue dynamique les polynômes ou fractions rationnelles complexes, de voir que si on utilise à chaque instant les propriétés des fonctions holomorphes, on utilise fort peu la rigidité des polynômes (sauf pour la démonstration de la non-errance de Sullivan, Th. 2). On a donc cherché un cadre plus "mou".

Soient $P : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{C}}$ un polynôme de degré d et $U = D_R$ un disque de rayon assez grand. Alors $U' = P^{-1}(U)$ est relativement compact dans U et homéomorphe à un disque, et P induit une application analytique, propre de degré d , de U' sur U .

DÉFINITION.— *On appelle* application à allure polynomiale de degré d *un triplet* (U,U',f) *où* U *et* U' *sont des ouverts de* $\underline{\underline{C}}$ *isomorphes au disque, avec* U' *relativement compact dans* U *, et* f *une application holomorphe, propre de degré* d *, de* U' *dans* U .

Si $\underline{f} = (U,U',f)$ est une application à allure polynomiale, on note $K_{\underline{f}}$ ou simplement K_f l'ensemble des $z \in U'$ tels que $f^n(z)$ soit défini et appartienne à U' pour tout n .

La démonstration de la Prop. 1, avec la partie b) de son corollaire, s'étend aux fonctions à allure polynomiale. Conséquence : un polynôme P de degré d a au plus $d-1$ cycles attractifs ou indifférents à distance finie. Il est en effet facile de déformer P , parmi les applications à allure polynomiale de degré d , de façon à rendre attractifs tous les cycles indifférents sans toucher aux cycles attractifs.

(*) On a une réponse à cette question. On peut en déduire qu'une réponse positive à la Q.4 entraînerait une réponse positive à la Q.3 (b) en degré 2 .

Soient $f : U' \longrightarrow U$ et $g : V' \longrightarrow V$ des applications polynomiales. Nous dirons que f et g sont *équivalentes* s'il existe un homéomorphisme quasi-conforme φ d'un voisinage U_1 de K_f dans U sur un voisinage V_1 de K_g dans V, induisant un homéomorphisme de $U_1' = f^{-1}(U_1)$ sur $V_1' = g^{-1}(V_1)$, tel que $\varphi(f(z)) = g(\varphi(z))$ pour $z \in U_1'$, et $\bar{\partial}\varphi = 0$ presque partout sur K_f.

THÉORÈME 7 (Hubbard-Douady).— *Toute application à allure polynomiale* f *de degré* d *est équivalente à un polynôme de degré* d.

Démonstration.— Soit $A \subset U$ une pièce à bord C^1, homéomorphe à $\bar{D}$, telle que $K_f \subset \mathring{A}$, que $A' = f^{-1}(A)$ soit homéomorphe à $\bar{D}$ et $A' \subset \mathring{A}$. Soit $r > 1$, posons $Q = A - \mathring{A}'$, $Q_r = \bar{D}_{rd} - D_r$ et soit ψ un difféomorphisme de Q sur Q_r tel que $\psi(f(z))^d = (\psi(z))^d$ pour $z \in \partial A'$. Notons σ_0 la structure complexe standard sur $\underline{\underline{C}}$ et σ la structure $\psi^*\sigma_0$ sur Q. Prolongeons σ à $\cup f^{-n}(Q) = A - K_f$ en la transportant par f, et à A par σ_0 sur K_f. On obtient sur $\mathring{A}$ une structure presque-complexe, quasi conforme à σ_0, donc intégrable et vérifiant $f^*\sigma = \sigma$. En collant $(\mathring{A},\sigma)$ et $\Sigma - D_r$ suivant ψ, on obtient une surface de Riemann X, et f et $z \longmapsto z^d$ se recollent en une application analytique $g : X \to X$, avec $g^{-1}(\infty) = \infty$. Il existe un isomorphisme $\varphi X \longrightarrow \Sigma$ tel que $\varphi(\infty) = \infty$. Alors $P = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ est un polynôme de degré d et la restriction de φ à $\mathring{A}$ est une équivalence de f sur ce polynôme, cqfd.

On peut montrer que, si K_f est connexe, il n'y a qu'un polynôme équivalent à f à conjugaison près par une application affine. En particulier, si $d = 2$, f est équivalente à un polynôme de la forme $z \longmapsto z^2 + c$, avec un c unique si K_f est connexe.

Une conséquence du Th. 7 : le Th. 2 s'étend aux applications à allure polynomiale.

Une famille analytique, paramétrée par une variété Λ, d'applications à allure polynomiale est un triplet $(\underline{U},\underline{U}',f)$ où $\underline{U}$ et $\underline{U}'$ sont des ouverts de $\Lambda \times \underline{\underline{C}}$ homéomorphes au-dessus de Λ à $\Lambda \times D$, avec $\underline{U}' \cap (L \times \underline{\underline{C}})$ relativement compact dans $\underline{U}$ pour tout compact L de Λ, et $f : \underline{U}' \longrightarrow \underline{U}$ application au-dessus de Λ, analytique et propre.

QUESTION 9.— *Soit* $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *une famille analytique d'applications à allure polynomiale. Peut-on localement trouver une famille continue* (P_λ) *de polynômes telle que* P_λ *soit équivalent à* f_λ *pour tout* λ ? (*)

On peut même espérer trouver localement une famille C^1 au sens réel, avec une dérivée $\underline{\underline{C}}$-linéaire aux points λ tels que K_{f_λ} soit connexe (**). La difficulté vient de ce que la forme de Beltrami μ_λ qui définit la structure σ qui intervient dans la démonstration du Th. 7 ne dépend pas continûment de λ.

(*) Réponse oui en degré 2, non en degré ≥ 3.

(**) Non.

2. Modulation

En observant M, on constate que chaque composante de M' est accompagnée d'un cortège d'autres composantes et de filaments qui reproduit la disposition de M. Ce phénomène, observé par Mandelbrot, est plus frappant pour les composantes primitives, i.e. celles qui ne s'obtiennent pas à partir d'une autre bifurcation.

Reprenons les notations du § 2. Soit $c \in M$, et supposons qu'il existe un entier k et des ouverts V et V' de $\underline{\underline{C}}$ tels que $g = (V,V',f^k_{c|V'})$ soit une application à allure polynomiale de degré 2, avec K_g connexe. Il existe alors dans M un a unique tel que g soit équivalente à f_a. Notons β_a le point de K_a d'argument externe 0 (point fixe de f_a le plus à droite), et soit β_g le point correspondant de K_g. Le point β_g est périodique pour f_c, de période divisant k, et appartient à la frontière de K_c. On peut montrer qu'il existe un point c_0, centre d'une composante de M' de période k, et un point α, racine d'une composante périodique $\mathring{K}_{c_0}$, tels que les arguments externes de β_g dans K_c soient les arguments externes de α dans K_{c_0}.

Dans ces conditions, nous dirons que c est un *modulé* de c_0 par a. On peut décrire l'ensemble K_c en disant qu'il s'obtient à partir de K_{c_0} en remplaçant, pour chaque composante connexe U de $\mathring{K}_{c_0}$, le disque fermé topologique $\overline{U}$ par une copie de K_a.

QUESTION 10.— a) *Pour tout* c_0 *centre d'une composante de* M', *et tout* $a \in M$, *existe-t-il un unique* c *modulé de* c_0 *par* a ?

b) *Dans l'affirmative, l'application* $a \mapsto c$ *est-elle continue ?* (*)

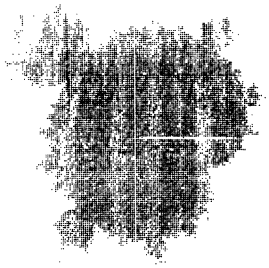
On sait démontrer l'existence et l'unicité de c, qu'on note alors $c_0 \perp a$, si f_a admet un point périodique attractif ou indifférent, ou si 0 est prépériodique pour f_a.

Si f_a a un cycle attractif, il en est de même de f_c, avec $\rho(c) = \rho(a)$. Il suffit donc de déterminer, par son arbre ou par les arguments externes de sa racine, la composante W de M' contenant c. Si H_0 et h sont les arbres de Hubbard de c_0 et a respectivement, on obtient l'arbre H de c en remplaçant chacun des points marqués x_i de H_0 par une copie h_i de h ; à un point marqué y_j de h correspond dans h_i un point z_{kj+i}, où k est la période de H_0. Si x_i a un (resp. deux) brins dans H_0, on attachera ces brins à l'endroit de h_i où il faut attacher β (resp. β et β') à h pour obtenir l'arbre complété (la condition d'existence de F impose quel brin il faut attacher à la place de β).

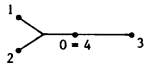
Soient $\vartheta_0 = .\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k \ldots$ et $\vartheta'_0 = .\varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_k \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_k \ldots$ (resp. t et t') les arguments externes de la racine de c_0 (resp. a), décrits en base 2. Pour obtenir, écrits en base 2, les arguments ϑ et ϑ' de la racine de c, il suffit de recopier t (resp. t') en remplaçant chaque 0 par $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k$ et chaque 1 par

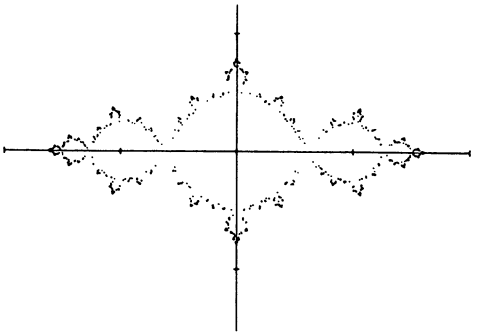
(*) Oui à (a) et (b) (il faut modifier la définition si $a = 1/4$).

Modulation

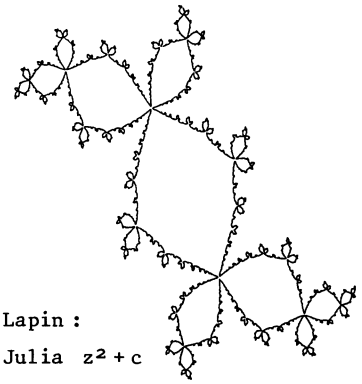


Laminie (Orsay) d'après Mandelbrot

Voisinage de la composante d'arbre 



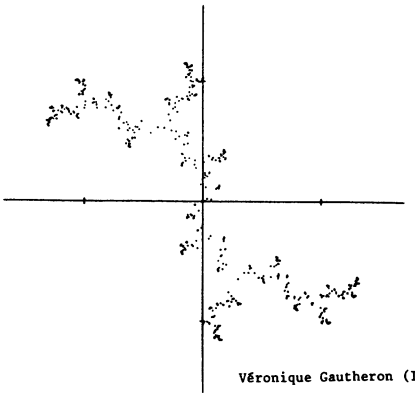
Julia $z \longmapsto z^2 - 1$



Lapin :

Julia $z^2 + c$

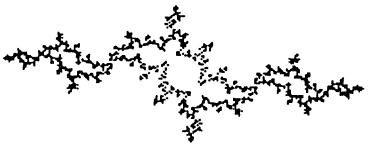
$c = -0.122561 + 0.744861\,i$



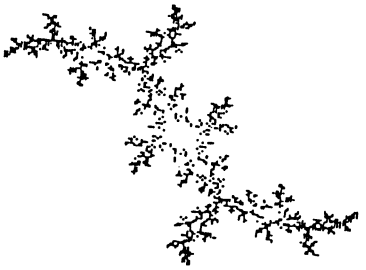
Véronique Gautheron (IREM)

, centre

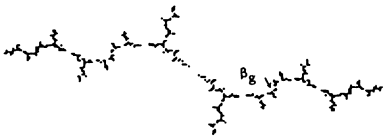
Julia $z \longmapsto z^2 + i$ (0 prépériodique)



$z \longmapsto z^2 - 1$ modulé par le lapin



Maryvonne D.-Teissier



$z \longmapsto z^2 + (-1 \perp i)$

Lapin modulé par -1

$\varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_k$ (à condition d'avoir choisi $\vartheta_0 < \vartheta'_0$).

L'application $a \longmapsto c_0 \perp a$ se prolonge par continuité au bord de chaque composante de M' , d'où la construction de $c_0 \perp a$ quand f_a a un cycle indifférent.

Le cas où 0 est prépériodique non périodique pour f_a peut aussi se traiter soit par une variante de la construction précédente sur les arbres, soit par le même algorithme sur les arguments externes. On obtient alors certains des arguments externes de $c_0 \perp a$, mais par forcément tous. Une remarque curieuse : si $f_a^{\ell}(0) = \beta_a$ pour un certain ℓ , le point a a dans M un seul argument externe, de la forme $p/2^{\ell-1}$. Mais ce nombre a deux développements en base 2 , d'où au moins 2 arguments externes pour $c_0 \perp a$. On interprète cela de la façon suivante : le point a se trouve au bout d'un filament, mais l'image de ce filament dans $c_0 \perp M$ se prolonge dans M au delà de $c_0 \perp a$.

3. Accouplements

Soient $f : \Sigma \to \Sigma$ une fraction rationnelle et P un polynôme tel que K_P soit connexe. On dit que P *figure* dans f s'il existe une application continue $\varphi : K_P \longrightarrow \Sigma$ telle que :

(i) $f \circ \varphi = \varphi \circ P$;

(ii) φ est analytique sur $\mathring{K}_P$;

(iii) φ est limite uniforme d'applications injectives continues de K_P dans Σ .

Soient P_1 et P_2 deux polynômes de degré d tels que K_{P_s} soit connexe et localement connexe pour $s = 1, 2$. Alors la représentation conforme $\psi_s : \Sigma - \overline{D} \longrightarrow \Sigma - K_{P_s}$ admet un prolongement continu au bord (Carathéodory), d'où une application $\gamma_s : \underline{\underline{T}} \longrightarrow \partial K_{P_s}$ continue surjective et vérifiant $P_s(\gamma_s(t)) = \gamma_s(d.t)$. On dit qu'une fraction rationnelle f de degré d est un *accouplement* de P_1 et P_2 s'il existe des applications φ_1 et φ_2 faisant figurer P_1 et P_2 dans f , et telles que le diagramme

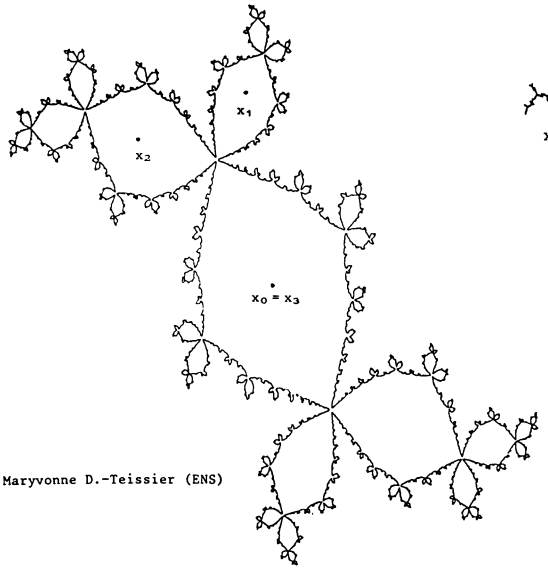
$$\begin{tikzcd} & K_{P_1} \arrow[dr, "\varphi_1"] & \\ \underline{\underline{T}} \arrow[ur, "\gamma_1"] \arrow[dr, "\check{\gamma}_2"'] & & \Sigma \\ & K_{P_2} \arrow[ur, "\varphi_2"'] & \end{tikzcd}$$

où $\check{\gamma}_2(t) = \gamma_2(-t)$, soit cocartésien dans la catégorie des espaces séparés. Si K_{P_1} et K_{P_2} sont d'intérieur vide, cela entraîne que l'ensemble de Julia de f est Σ (accouplement dégénéré).

Par un procédé analogue à celui de la démonstration du Th. 4, on peut ramener l'étude des accouplements de polynômes ayant des cycles attractifs au cas où ces cycles sont superattractifs.

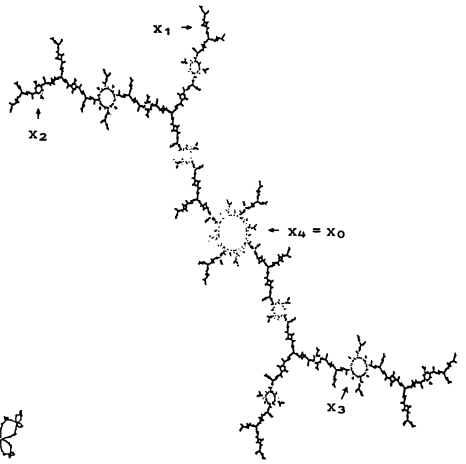
PROPOSITION 6.— *Soient* f *une fraction rationnelle de degré* 2 *ayant deux cycles*

Accouplements



Maryvonne D.-Teissier (ENS)

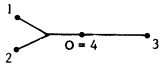
Lapin



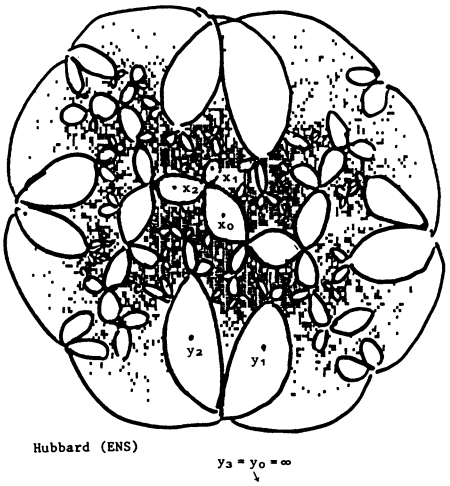
Maryvonne D.-Teissier (ENS)

Julia $z^2 + c$

$c = -0.156520 + 1.032247\ i$

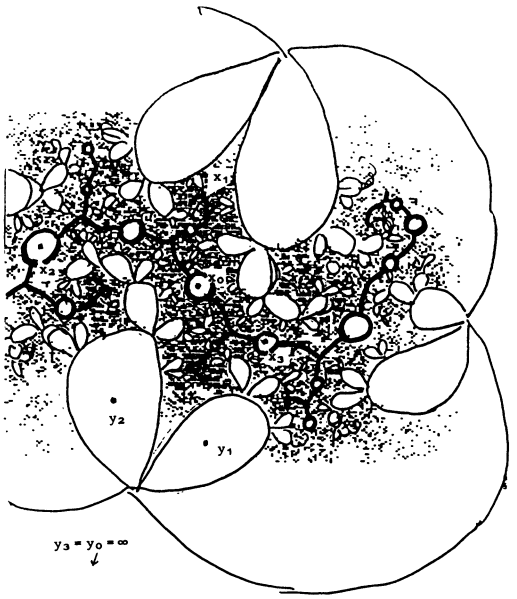


, centre



Hubbard (ENS)

Accouplement de deux lapins



Hubbard-Douady (ENS)

Accouplement des deux polynômes ci-dessus

superattractifs disjoints $(x_0,\dots,x_{k-1})$ *et* $(y_0,\dots,y_{\ell-1})$, P *et* Q *deux polynômes de la forme* $z \longmapsto z^2 + c$ *admettant* 0 *comme point périodique de période* k *et* ℓ *respectivement,* H_P *et* H_Q *leurs arbres de Hubbard, avec points marqués* $X_0,\dots,X_{k-1}$, $Y_0,\dots,Y_{\ell-1}$. *Soient* $F_P : H_P \to H_P$ *et* $F_Q : H_Q \to H_Q$ *vérifiant la condition* (ii) *de la définition des arbres de Hubbard, et* F *l'application de la réunion disjointe* $H_P \amalg H_Q$ *dans elle-même définie par* F_P *et* F_Q .

On suppose qu'il existe des applications continues injectives Φ_0 *et* Φ_1 *de* $H_P \amalg H_Q$ *dans* Σ *telles que* $\Phi_s(X_i) = x_i$ *et* $\Phi_s(Y_j) = y_j$ *pour* $s = 1, 2$, $0 \le i \le k-1$, $0 \le j \le \ell - 1$, *que* Φ_0 *et* Φ_1 *soient isotopes parmi les applications vérifiant ces conditions, et que* $f \circ \Phi_1 = \Phi_0 \circ f$. *Alors* f *est un accouplement de* P *et* Q .

QUESTION 11.— *Soit* f *une fraction rationnelle de degré* 2 .

a) *Si* P *est un polynôme figurant dans* f , *y a-t-il nécessairement un polynôme* Q *tel que* f *soit un accouplement de* P *et* Q ?

b) *On suppose que* f *a deux cycles superattractifs disjoints* A *et* B , *et qu'il existe dans* $U = \Sigma - (A \cup B)$ *une courbe simple* Γ , *séparant* A *de* B , *et telle que* $f^{-1}(\Gamma)$ *soit une courbe simple isotope à* Γ *dans* U . *Alors* f *est-elle nécessairement un accouplement de deux polynômes ?* (*)

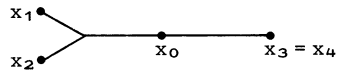
QUESTION 12.— *Notons* A *l'ensemble des couples* $(c,c') \in M^2$ *tels que* $f_c : z \longmapsto z^2 + c$ *et* $f_{c'}$ *admettent un accouplement.*

a) *Donner un critère pour que* (c,c') *appartienne à* A .

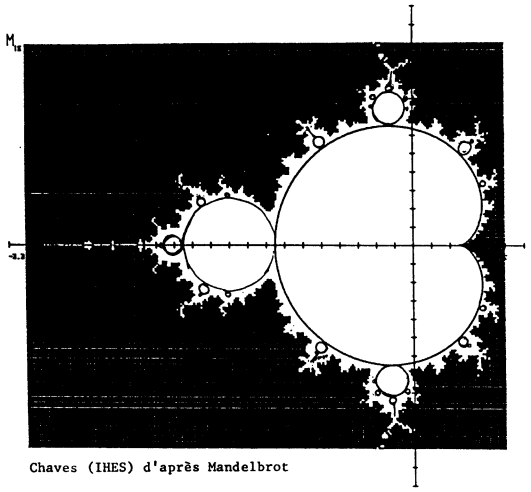
b) *Peut-on, pour chaque* $(c,c') \in A$, *choisir un accouplement* $f_{c,c'}$ *de façon que l'application* $(c,c') \longmapsto f_{c,c'}$ *soit continue sur* A ?

Notons W_0 la composante de M' de période 1 (intérieur de la cardioïde). Si $c \in W_0$, on a $(c,c') \in A$ pour tout $c' \in M$ (la démonstration est analogue à celle du Th. 4). Pour $c \in M - W_0$, appelons *argument interne* de c dans W_0 l'argument interne $u(c)$ de l'unique point c_1 de ∂W_0 tel que 0 et c ne soient pas dans la même composante connexe de $M - \{c_1\}$. Une condition nécessaire pour que $(c,c') \in A$ est que $u(c') \neq -u(c)$.

Si $(c,c) \in A$, des raisons de symétrie montrent qu'il y a un accouplement $f_{c,c}$ de la forme $z \longmapsto \lambda(z + 1/z)$. A défaut de démonstration, on peut faire des expériences numériques. Notons $M_{1/3}$ l'ensemble des points de M d'argument interne $1/3$ dans W_0 , et N la nervure dans $M_{1/3}$ qui va du point de ∂W_0 au point Ω_3 , d'arbre

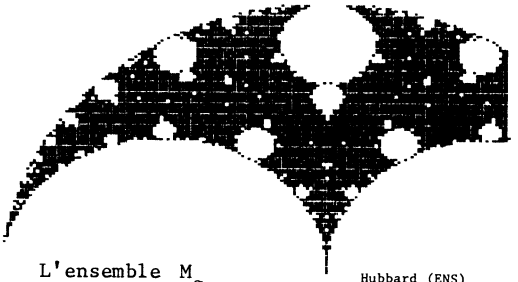


(*) Cela devrait résulter d'un théorème de Thurston. Hubbard dit que pour $a = 4,27$, la fraction $\dfrac{1}{az^2 - (a+1)z + 1}$ a 2 cycles attractifs disjoints, mais n'est pas un accouplement de 2 polynômes.



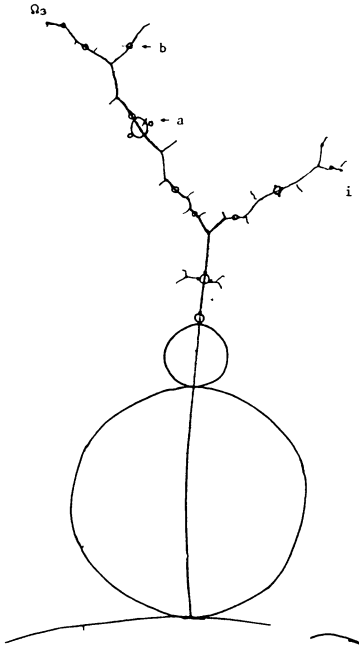
Chaves (IHES) d'après Mandelbrot

L'ensemble M (§ 2)

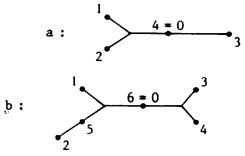


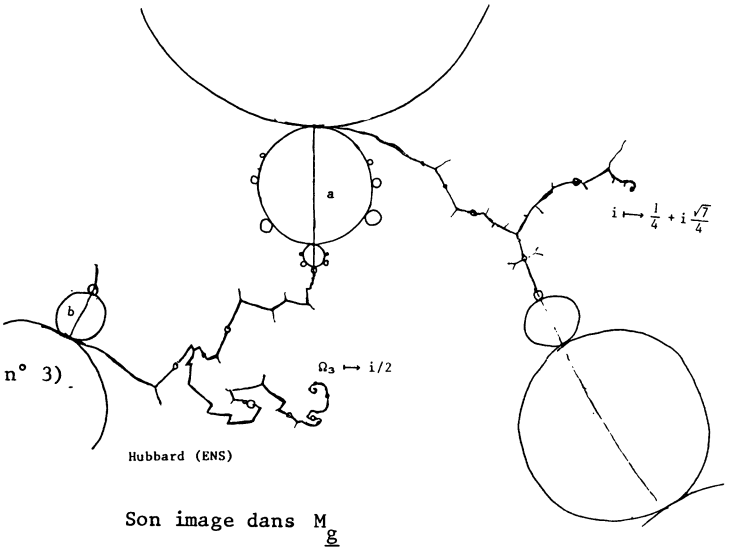
L'ensemble $M_{\underline{g}}$
(§ 1, n° 4)

Hubbard (ENS)
d'après Mandelbrot (JFK)



L'ensemble $M_{1/3}$ (§ 3, n° 3)





Hubbard (ENS)

Son image dans $M_{\underline{g}}$

En suivant point par point la correspondance $c \mapsto \lambda$ pour c parcourant N, ou les autres filaments de $M_{1/3}$, on observe une application, apparemment continue, de $M_{1/3}$ dans le plan des λ. L'ensemble $M_{1/3}$ et son image sont réprésentés sur une figure.

4. Conclusion

Dans la démonstration du Th. 4 et dans ses variantes, dans la démonstration du Th. 7, également dans celle du Th. 2, mais surtout dans la notion de modulation et dans celle d'accouplement, on met en oeuvre le même procédé : enlever d'un système dynamique un morceau et le remplacer par un autre. Il y a là une théorie de la chirurgie des systèmes dynamiques holomorphes dont les bases restent à jeter.

RÉFÉRENCES

Avant 1977 :

[Bn] A.D. BRJUNO - *Analytical form of differential equations*, Trans. Moscow Math. Soc., 25(1971), 131-288.

[Br] M. BROLIN - *Invariant sets under iteration of rational functions*, Arkiv for Mathematik 6(1966), 103-144.

[F] P. FATOU - *Mémoire sur les équations fonctionnelles*, B.S.M.F. 47(1919), 161-271, 47(1920), 33-94 et 208-314.

[J] G. JULIA - *Itération des applications fonctionnelles*, J. Math. Pures et Appl. (1918), 47-245.

[L] S. LATTÈS - *Sur l'itération des substitutions rationnelles et les fonctions de Poincaré*, C.R.A.S. 166(1918), 26-28.

[Rm] H. RÜSSMANN - *Kleine Nenner II : Bemerkungen zur Newton'schen Methode*, Math. Phys. Kl. (1972), 1-20.

[Si] C.L.C. SIEGEL - *Iteration of analytic functions*, Ann. Math. 43(1942), 607-612.

[Z] E. ZEHNDER - *A simple proof of a generalisation of a theorem by Siegel*, Springer-Verlag, Lect. Notes in Maths. 597(1977), 855-866.

Récentes :

[Bo] R. BOWEN - *Dimension of quasi-circles*, Publ. I.H.E.S., Vol. 50(1980).

[DH] A. DOUADY et J.H. HUBBARD - *Itération des polynômes quadratiques complexes*, C.R.A.S., t. 294 (18 janvier 1982).

[Fe] M.J. FEIGENBAUM - *Quantitative universality for a class of non-linear transformations*, J. Stat. Phys. 19-1(1978), 25-52.

[H] M. HERMAN - *Exemples de fractions rationnelles ayant une orbite dense sur la sphère de Riemann*, (manuscrit).

[Lf] O.E. LANFORD - *Smooth transformations of intervals*, Sém. Bourbaki, exposé n° 563, Springer-Verlag, Lect. Notes in Maths. 901(1981), 36-54.

[M1] B. MANDELBROT - *Fractal aspects of the iteration of* $z \longmapsto \lambda z(1-z)$ *for complex* λ *and* z , Annals N.Y. Acad. of Sc. 357(1980), 249-259.

[M2] B. MANDELBROT - *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman edit., San Francisco.

[Mt] J. MARTINET - *Normalisation des champs de vecteurs holomorphes (d'après A.D. Brjuno)*, Sém. Bourbaki, exposé n° 564, Springer-Verlag, Lect. Notes in Maths. 901(1981), 55-70.

[MSS] R. MAÑE, P. SAD and D. SULLIVAN - *On the Dynamics of rational maps*, à paraître aux Annales de l'E.N.S..

[R] D. RUELLE - *Analytic repellers*, J. of Ergodic Theory and Dynamical Systems, 1982.

[S1] D. SULLIVAN - *Density at infinity*, Publ. I.H.E.S., Vol. 50(1980).

[S2] D. SULLIVAN - *Conformal Dynamical Systems*, preprint, I.H.E.S..

[S3] D. SULLIVAN - *Quasi-conformal homeomorphisms and Dynamics I, II et III*, preprints I.H.E.S., soumis aux Annals of Maths. en 1982.

[ST] D. SULLIVAN and W. THURSTON - *Note on structural stability of rational maps*, preprint I.H.E.S., 1982.

[DH2] A. DOUADY et J.H. HUBBARD - *Dynamique des applications à allure polynômiale*, preprint I.R.M.A. Strasbourg, 1983.

[M∞] B. MANDELBROT - *Les fractals, les monstres et la beauté*, Le Débat n° 24, mars 1983 (Gallimard Ed.).

[MN] N.S. MANTON and M. NAUENBERG - *Universal scaling behavior for itered maps in the complex plane*, Comm. in Math. Phys. (1983).

Adrien DOUADY

Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
F-91405 ORSAY

& Ecole Normale Supérieure
Centre de Mathématiques
45 rue d'Ulm
F-75230 PARIS CEDEX 05