

# *Astérisque*

MARC CHAPERON

## **Quelques questions de géométrie symplectique**

*Astérisque*, tome 105-106 (1983), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 610, p. 231-249

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1982-1983\\_\\_25\\_\\_231\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1982-1983__25__231_0)>

© Société mathématique de France, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# QUELQUES QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

[d'après, entre autres,

Poincaré, Arnold, Conley et Zehnder]

par Marc CHAPERON

Au milieu des années 60, V.I. Arnold a énoncé une série de remarquables conjectures en géométrie symplectique globale, issues du "dernier théorème géométrique" de Poincaré. Malgré les efforts des géomètres, aucun progrès substantiel n'a été réalisé jusqu'à la fin de l'année 1982, où Conley et Zehnder ont fait faire à la théorie un pas décisif. Leur démonstration étant en définitive très simple, j'ai pu inclure dans cet exposé une introduction à la géométrie symplectique, de façon à placer les problèmes dans un contexte où ils paraissent naturels.

CONVENTIONS.— Les applications considérées sont de classe  $C^\infty$  (en règle générale,  $C^1$  suffirait pour les plongements, les difféomorphismes et les champs de vecteurs, et  $C^2$  pour les fonctions), et les espaces d'applications étudiés sont, si l'on y tient, munis de la topologie  $C^\infty$  (même remarque). Étant donné un espace d'applications  $F$ , un *chemin*, ou *arc différentiable* dans  $F$  est une application  $t \mapsto f_t$ , notée  $(f_t)$ , de  $I = [0,1]$  dans  $F$ , telle que l'application  $(t,x) \mapsto f_t(x)$  soit de classe  $C^\infty$  (même remarque). Lorsque  $F$  est un groupe d'éléments neutre  $e$ , un tel chemin  $(f_t)$  dans  $F$  est dit à *support compact* si  $f_t(x) = e(x)$  en dehors d'un compact. Enfin on note  $E(X)$  l'espace des fonctions  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Par *variété* on entend variété différentielle connexe de dimension finie.

## 0. RAPPELS DE GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

(0.1) Une *structure symplectique* sur une variété  $X$  est la donnée d'une 2-forme fermée  $\sigma$  sur  $X$ , telle que la forme bilinéaire alternée  $\sigma(x)$  soit non dégénérée pour tout  $x \in X$  - ce qui implique que  $X$  soit de dimension paire  $2n$ . Une immersion  $j : V \rightarrow X$  est dite *lagrangienne* lorsque l'espace tangent  $T_j(T_y V)$  est son propre orthogonal pour  $\sigma(j(y))$  quel que soit  $y \in V$  - ce qui revient à dire que  $V$  est de dimension  $n$  et que  $j^* \sigma = 0$ . Cette notion étant invariante par difféomorphisme de  $V$ , on peut, si  $j$  est un plongement, dire que  $j(V)$  est une *variété lagrangienne* de  $\sigma$  lorsque  $j$  - ou l'inclusion  $j(V) \rightarrow X$  - est un plongement lagrangien. La structure symplectique  $(X, \sigma)$  est dite *exacte* lorsque  $\sigma$  admet une

primitive  $\lambda$  ; les immersions  $j : V \rightarrow X$  telles que  $j^*\lambda$  soit exacte sont appelées *immersions lagrangiennes exactes* si  $H^1(X; \mathbb{R}) = 0$  ou si le choix de  $\lambda$  est clair.

### (0.2) Exemples

(0.2.1) Sur les surfaces, les structures symplectiques coïncident avec les formes-volume, et les variétés lagrangiennes avec les courbes.

(0.2.2) Nous noterons  $\sigma_n$  la structure symplectique définie sur  $\mathbb{C}^n$  par  $\sigma_n(z)(x, y) = \text{Im}(x \cdot \bar{y})$ , où  $(x, y) \mapsto x \cdot \bar{y}$  désigne le produit hermitien standard.

(0.2.3) Pour chaque variété  $M$ , le cotangent  $T^*M$  est muni de la structure symplectique exacte  $d\lambda_M$ , où la 1-forme de Liouville  $\lambda_M$  sur  $T^*M$  est définie par ce que  $\alpha^*\lambda_M = \alpha$  pour tout germe  $\alpha$  de 1-forme sur  $M$  - d'où il résulte qu'une 1-forme sur  $M$  est un plongement lagrangien (resp. exact) de  $M$  dans  $T^*M$  si et seulement si elle est fermée (resp. exacte).

JUSQU'À LA FIN DE CETTE SECTION, ON SUPPOSE FIXÉE UNE STRUCTURE SYMPLECTIQUE  $(X, \sigma)$ .

### (0.3) Automorphismes et isotopies de $\sigma$

(0.3.1) Étant donnée une structure symplectique  $(X', \sigma')$ , un isomorphisme de  $\sigma$  sur  $\sigma'$  est un difféomorphisme  $\varphi : X \rightarrow X'$  tel que  $\varphi^*\sigma' = \sigma$  ; cette dernière assertion équivaut évidemment à ce que le graphe de  $\varphi$  soit une variété lagrangienne de la structure symplectique  $\text{pr}_2^*\sigma' - \text{pr}_1^*\sigma$  sur  $X \times X'$ , où  $\text{pr}_1 : X \times X' \rightarrow X$  et  $\text{pr}_2 : X \times X' \rightarrow X'$  désignent les projections. Un isomorphisme de  $\sigma$  sur  $\sigma$  est appelé *automorphisme* de  $\sigma$ . Nous noterons  $\text{Aut}(\sigma)$  le groupe des automorphismes de  $\sigma$ , et  $\tilde{\sigma}$  la forme symplectique  $\text{pr}_2^*\sigma - \text{pr}_1^*\sigma$  sur  $X \times X$ .

*Exemple.*— Soit  $\xi \rightarrow \xi_b$  l'isomorphisme de  $(\mathbb{R}^n)^*$  sur  $\mathbb{R}^n$  défini par la structure euclidienne standard de  $\mathbb{R}^n$  ; le cotangent  $T^*\mathbb{R}^n$  étant canoniquement identifié à  $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ , il est clair que  $(x, \xi) \mapsto x + i\xi_b$  est un isomorphisme de  $d\lambda_{\mathbb{R}^n}$  sur  $\sigma_n$ , envoyant la section nulle  $\Sigma_{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \times \{0\}$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

(0.3.2) Un *automorphisme infinitésimal* de  $\sigma$ , comme son nom l'indique, est un champ de vecteurs  $\xi$  sur  $X$  tel que la dérivée de Lie  $L_\xi \sigma$  soit identiquement nulle. Comme  $\sigma$  est fermée, cela signifie que la 1-forme  $i_\xi \sigma$ , produit intérieur de  $\sigma$  par  $\xi$ , est fermée. Lorsque  $i_\xi \sigma$  est exacte, on dit que  $\xi$  est un *champ hamiltonien* de  $\sigma$ , et toute primitive de  $i_\xi \sigma$  s'appelle un *hamiltonien* de  $\xi$  ; étant donné  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ , l'unique champ de vecteurs  $\xi$  sur  $X$  tel que  $i_\xi \sigma = dh$  est le *gradient symplectique* de  $h$ . Nous noterons  $\text{aut}(\sigma)$  l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de  $\sigma$ , et  $\text{ham}(\sigma)$  la sous-algèbre de Lie de  $\text{aut}(\sigma)$  formée des champs hamiltoniens.

*Remarque.*— Le gradient symplectique d'une fonction à support compact engendrant évidemment un groupe à un paramètre d'automorphismes de  $\sigma$ , on voit que le groupe

$\text{Aut}(\sigma)$  est très gros.

(0.3.3) Une isotopie de  $\sigma$  est un chemin  $(\varphi_t)$  dans  $\text{Aut}(\sigma)$  tel que

$$(1) \quad \varphi_0 = \text{id}_X.$$

Une isotopie infinitésimale de  $\sigma$  est un chemin  $(\xi_t)$  dans  $\text{aut}(\sigma)$ . À toute isotopie  $(\varphi_t)$  de  $\sigma$ , on associe son générateur infinitésimal  $(\dot{\varphi}_t)$ , qui est l'isotopie infinitésimale  $(\xi_t)$  de  $\sigma$  définie par

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \varphi_t = \xi_t \circ \varphi_t \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Toute isotopie infinitésimale  $(\xi_t)$  de  $\sigma$ , à support compact, est le générateur infinitésimal d'une isotopie  $(\varphi_t)$  de  $\sigma$ , unique solution du problème de Cauchy (1)-(2), évidemment à support compact. Une isotopie  $(\varphi_t)$  de  $\sigma$  est dite hamiltonienne lorsque  $\dot{\varphi}_t$  est dans  $\text{ham}(\sigma)$  pour tout  $t$ ; il existe alors un chemin  $(h_t)$  dans  $E(X)$  tel que  $\dot{\varphi}_t$  soit pour chaque  $t$  le gradient symplectique de  $h_t$ , et l'on dit que  $(h_t)$  est un hamiltonien de  $(\varphi_t)$ . Toute isotopie hamiltonienne à support compact de  $\sigma$  admet un hamiltonien à support compact.

#### (0.4) Voisinages tubulaires symplectiques et prolongement des isotopies lagrangiennes

(0.4.1) THÉOREME (Weinstein [29], [1]).— Pour tout plongement lagrangien  $j: M \rightarrow X$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de la section nulle de  $T^*M$  et un plongement  $J: U \rightarrow X$  tel que  $J^*\sigma = d\lambda_M|_U$  et que, si  $0_M$  désigne la 1-forme nulle sur  $M$ , on ait  $j = J \circ 0_M$ .  $\square$

Un tel  $J$  sera appelé voisinage tubulaire de  $j$  pour  $\sigma$  lorsque l'ouvert  $U \cap T^*_X M$  sera étoilé par rapport à l'origine pour tout  $x \in M$ , situation à laquelle on peut évidemment toujours se ramener.

COROLLAIRE.— (i) Pour toute structure symplectique  $\omega$  sur une variété compacte  $M$ , le groupe  $\text{Aut}(\omega)$  est localement connexe par arcs différentiables.

(ii) Pour toute variété compacte  $V$ , l'espace  $\text{Pl}(V, \sigma)$  des plongements lagrangiens de  $V$  dans  $X$  est localement connexe par arcs différentiables.

Démonstration.— (i) Soit  $J$  un voisinage tubulaire de l'inclusion diagonale  $j: x \mapsto (x, x)$  de  $M$  dans  $M \times M$  pour  $\overset{2}{\omega}$ . Pour tout  $\varphi \in \text{Aut}(\omega)$  assez  $C^1$ -proche de l'identité, on définit une isotopie  $(\varphi_t)$  de  $\omega$  par le fait que le graphe de  $\varphi_t$  est  $J(tJ^{-1}(\text{graphe}(\varphi)))$ , en notant  $v \mapsto tv$  l'endomorphisme du fibré vectoriel  $T^*M$  consistant à faire l'homothétie de rapport  $t$  dans chaque fibre.

(ii) Soit  $J$  un voisinage tubulaire de  $j \in \text{Pl}(V, \sigma)$ . Pour tout  $k \in \text{Pl}(V, \sigma)$ , assez  $C^1$ -proche de  $j$ , il existe (0.2.3) une 1-forme fermée  $\alpha$  telle que  $k(V) = J(\alpha(V))$ , et une isotopie  $(\varphi_t)$  de  $V$  telle que  $k = J \circ \alpha \circ \varphi_1$  - ceci parce que le groupe des difféomorphismes de  $V$  est localement connexe par arcs différentiables, ce qui se prouve comme (i). Le chemin différentiable  $(J \circ \alpha \circ \varphi_t)$  joint

donc  $j$  à  $k$  dans  $Pl(V, \sigma)$ .  $\square$

Une *isotopie lagrangienne* d'une variété  $M$  dans  $(X, \sigma)$  est un chemin dans  $Pl(M, \sigma)$ . Une telle isotopie lagrangienne  $(j_t)$  est dite *exacte* lorsque, pour tout  $t \in I$  et toute primitive  $\lambda$  de  $\sigma$  dans un voisinage de  $j_t(M)$ , la 1-forme  $\frac{d}{dt} j_t^* \lambda$  est exacte sur  $M$ . Cette condition porte en fait sur les sous-variétés  $j_t(M)$ ; ainsi, lorsque  $M$  est compacte, une isotopie lagrangienne de  $M$  dans  $(X, \sigma)$  est exacte si et seulement si elle possède la propriété suivante : quels que soient  $t \in I$ , le voisinage tubulaire  $J$  de  $j_t$  et le réel  $s \in I$  assez voisin de  $t$ , il existe  $f_s : M \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $j_s(M) = J(df_s(M))$ .

(0.4.2) THÉORÈME.— (i) Une isotopie  $(\psi_t)$  de  $X$  est une isotopie hamiltonienne de  $\sigma$  si et seulement si  $(j_t : x \mapsto (x, \psi_t(x)))$  est une isotopie lagrangienne exacte de  $X$  dans  $(X \times X, \tilde{\sigma})$ .

(ii) (Prolongement des isotopies lagrangiennes exactes.) Pour toute isotopie  $(j_t)$  d'une variété compacte  $M$  dans  $X$ , les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- a)  $(j_t)$  est une isotopie lagrangienne exacte de  $M$  dans  $(X, \sigma)$ .
- b)  $j_0$  est lagrangien, et il existe une isotopie hamiltonienne  $(\varphi_t)$  de  $\sigma$ , à support compact, telle que  $j_t = \varphi_t \circ j_0$  pour tout  $t \in I$ .

Démonstration.— Sous l'hypothèse b), soit  $(h_t)$  un hamiltonien de  $(\varphi_t)$ . Pour toute primitive locale  $\lambda$  de  $\sigma$ , on a

$$\frac{d}{dt} j_t^* \lambda = j_0^* \frac{d}{dt} \varphi_t^* \lambda = j_0^* \varphi_t^* L_{\varphi_t} \lambda = j_t^* (i_{\varphi_t} \sigma + di_{\varphi_t} \lambda) = d(j_t^* (h_t + i_{\varphi_t} \lambda)),$$

d'où a). Aucune hypothèse de compacité n'intervenant dans ce qui précède, on en déduit (i) en prenant  $\varphi_t(x, y) = (x, \psi_t(y))$ .

Sous l'hypothèse a), on définit pour chaque  $t \in I$  un champ de vecteurs  $\xi_t$  sur  $X$  au-dessus de  $j_t(M)$  par  $\xi_t \circ j_t = \frac{d}{dt} j_t$ . Si  $\lambda$  est une primitive de  $\sigma$  dans un voisinage de  $j_t(M)$ , nulle sur  $j_t(M)$  (cf. (0.4.1)), on a  $j_t^*(i_{\xi_t} \sigma) = \frac{d}{dt} (j_t^* \lambda)$ ; comme  $j$  est exacte, on en déduit, en posant  $\tilde{j}(t, x) = (t, j_t(x))$ , l'existence d'une fonction  $h^0 : \tilde{j}(I \times M) \rightarrow \mathbb{R}$  possédant la propriété suivante : pour tout  $t \in I$ , on a  $j_t^* i_{\xi_t} \sigma = j_t^* dh_t^0$ , où  $h_t^0 : j_t(M) \rightarrow \mathbb{R}$  est donnée par  $h_t^0(x) = h^0(t, x)$ . Il n'y a donc aucune obstruction à construire un chemin  $(h_t)$  à support compact dans  $E(X)$ , tel que  $h_t^0 = h_t|_{j_t(M)}$  et  $i_{\xi_t} \sigma = dh_t|_{j_t(M)}$  pour tout  $t \in I$ . L'isotopie de  $\sigma$  qui a  $(h_t)$  pour hamiltonien vérifie évidemment b).  $\square$

Remarques.— 1) On prouve de même un théorème de prolongement des isotopies de Legendre [15] d'une structure de contact.

2) Il n'est pas en général possible de prolonger une isotopie lagrangienne de  $M$  dans  $(X, \sigma)$  par une isotopie de  $\sigma$  : si  $M$  est le cercle  $\mathbb{T}^1$  et que  $X$  est le cylindre  $T^*M$  moins sa section nulle  $\Sigma_M$ , alors, pour tout plongement  $j : M \rightarrow X$  isotope (comme plongement de  $M$  dans  $T^*\mathbb{T}^1$ ) à la section nulle, l'aire  $A_j$  comprise entre  $j(M)$  et  $\Sigma_M$  pour la mesure  $|d\lambda_M|$  est invariante par automorphisme

de  $\sigma = d\lambda_M|_X$ . Une isotopie  $(j_t)$  de tels plongements est donc prolongeable par une isotopie de  $\sigma$  seulement si  $A_{j_t}$  est constante, c'est-à-dire (si et) seulement si  $(j_t)$  est une isotopie (lagrangienne !) exacte.

## 1. LES CONJECTURES D'ARNOLD ET LE THÉORÈME DE CONLEY-ZEHNDER

### (1.1) Préliminaires : l'invariant S de Calabi et le théorème de Banyaga

(1.1.1) Soit  $\omega$  une structure symplectique sur une variété compacte  $M$ , et soit  $G_\omega$  la composante neutre de  $\text{Aut}(\omega)$ . D'après le corollaire (0.4.1) (i),  $G_\omega$  est l'ensemble des extrémités  $\varphi_1$  d'isotopies  $(\varphi_t)$  de  $\sigma$ . Pour chacune de celles-ci, la classe de cohomologie de la 1-forme fermée

$$\Sigma(\varphi_t) = \int_0^1 i_{\dot{\varphi}_t} \omega dt$$

ne dépend que de la classe d'homotopie (différentiable, d'après (0.4.1)) avec extrémités fixes du chemin  $(\varphi_t)$  dans  $G_\omega$ . On définit donc ainsi un morphisme de groupes  $\tilde{S} : \tilde{G}_\omega \rightarrow H^1(M, \mathbb{R})$ , où  $\tilde{G}_\omega$  est le revêtement universel de  $G_\omega$ . Ce morphisme est surjectif : toute 1-forme fermée  $\alpha$  sur  $M$  est égale à  $\Sigma(\varphi_t)$ , où  $i_{\dot{\varphi}_t} \omega = \alpha$  pour tout  $t \in I$ . On obtient donc par passage au quotient un morphisme surjectif  $S : G_\omega \rightarrow H^1(M, \mathbb{R})/\tilde{S}(\pi_1(G_\omega))$ , appelé *invariant S de Calabi* [7].

(1.1.2) THÉORÈME (Banyaga [4]).— Étant donné  $f \in G_\omega$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe une isotopie hamiltonienne  $(\varphi_t)$  de  $\omega$  telle que  $f = \varphi_1$ .
- (ii)  $S(f) = 0$ .
- (iii)  $f$  appartient au sous-groupe  $[G_\omega, G_\omega]$  des commutateurs de  $G_\omega$ .

L'équivalence entre (i) et (ii) est facile à établir, en remarquant que  $\text{Ker } S$  est connexe par arcs différentiables et que tout chemin de  $\text{id}_M$  à  $f$  dans  $\text{Ker } S$  est une isotopie hamiltonienne de  $\omega$ . En revanche, l'équivalence avec (iii), qui dépasse de beaucoup le niveau élémentaire du présent exposé, repose en particulier sur un théorème profond d'Herman [20].  $\square$

Il est donc raisonnable, suivant [3], de dire que  $f \in \text{Aut}(\omega)$  est *homologue à l'identité* lorsqu'il satisfait (i). Nous allons maintenant définir une notion analogue pour les plongements, en nous restreignant à un cas simple :

(1.1.3) THÉORÈME.— Soient  $M$  une variété compacte, et  $j \in \text{Pl}(M, d\lambda_M)$  dans la composante connexe de la 1-forme nulle  $0_M$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe une isotopie lagrangienne exacte  $(j_t)$  de  $M$  dans  $T^*M$  telle que  $j_0 = 0_M$  et  $j_1 = j$ .
- (ii)  $j^* \lambda_M$  est exacte.

Démonstration.— Il est clair que (i) entraîne (ii). Sous l'hypothèse (ii), il existe,

d'après le corollaire 0.4.1, un chemin  $(k_t)$  de  $0_M$  à  $j$  dans  $Pl(M, d\lambda_M)$ . Désignons par  $\pi$  la projection canonique  $T^*M \rightarrow M$ , et supposons d'abord  $M$  orientable. Une métrique riemannienne étant fixée sur  $M$ , soit  $\alpha_t$ ,  $t \in I$ , l'unique 1-forme harmonique dans la classe de cohomologie de  $-k_t^*\lambda$ , et soit  $\xi_t$  l'élément de  $\text{aut}(d\lambda_M)$  défini par  $i_{\xi_t} d\lambda_M = \pi^* \alpha_t$ . Il est clair que chaque  $\xi_t$  engendre un groupe à un paramètre  $(\varphi_t^s)_{s \in \mathbb{R}}$  d'automorphismes de  $d\lambda_M$ , et que  $(j_t) = (\varphi_t^1 \circ k_t)$  est un chemin de  $0_M$  à  $j$  dans  $Pl(M, d\lambda_M)$ . Pour prouver (i), il s'agit donc de montrer que  $j_t$  est pour tout  $t$  un plongement lagrangien exact. Or, on a

$$\varphi_t^{1*} \lambda - \lambda = \int_0^1 \frac{d}{ds} \varphi_t^{s*} \lambda ds = \int_0^1 \varphi_t^{s*} (\pi^* \alpha_t + di_{\xi_t} \lambda) ds,$$

d'où l'on déduit,  $\varphi_t^{s*} \pi^* \alpha_t$  étant évidemment cohomologue à  $\pi^* \alpha_t$  pour tout  $s$ , que la 1-forme fermée  $\varphi_t^{1*} \lambda - \lambda$  est cohomologue à  $\pi^* \alpha_t$ . Par conséquent,  $j_t^* \lambda$  est cohomologue à  $k_t^* (\lambda + \pi^* \alpha_t)$ , d'où le résultat cherché,  $(\pi \circ k_t)^* \alpha_t$  étant cohomologue à  $(\pi \circ 0_M)^* \alpha_t = \alpha_t$ . Dans le cas général, on recourt au revêtement orienté de  $M$ .  $\square$

Sous les hypothèses du théorème, nous dirons (par analogie avec (1.1.2) et sans raison bien péremptoire) que  $j \in Pl(M, d\lambda_M)$  est *homologue à la section nulle* lorsqu'il satisfait (i).

## (1.2) Vif du sujet

(1.2.1) Étant donnée une variété compacte  $M$ , rappelons que  $CL(M)$  ("cup length" de  $M$ ) est par définition le plus grand entier  $k$  pour lequel il existe des formes fermées  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  de degré  $> 0$  sur  $M$  telles que  $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k$  ne soit pas un cobord. Désignons de même par  $SB(M)$  la somme des nombres de Betty ([3]) de  $M$ . Par exemple, si  $M = \mathbb{T}^n$  (resp.  $\mathbb{S}^n$ ), on a évidemment  $CL(M) = n$  et  $SB(M) = 2^n$  (resp.  $CL(M) + 1 = SB(M) = 2$ ). Suivant [30], nous dirons qu'une fonction sur  $M$  (resp. un automorphisme d'une structure symplectique sur  $M$ , deux plongements lagrangiens de  $M$  dans une même structure symplectique) a *assez de points critiques* (resp. a *assez de points fixes*, ont *assez de points d'intersection*) si ceux-ci sont au moins  $CL(M) + 1$ , et au moins  $SB(M)$  lorsqu'aucun d'entre eux n'est dégénéré. Les théorèmes de Morse et de Lusternik-Schnirelmann [6] affirment qu'une fonction sur  $M$  a toujours assez de points critiques - la meilleure borne n'étant d'ailleurs pas en général  $CL(M) + 1$ .

(1.2.2) CONJECTURE [3].— Étant donnée une structure symplectique  $\omega$  sur une variété compacte  $M$ , tout  $\varphi \in \text{Aut}(\omega)$ , homologue à l'identité, a assez de points fixes.

Une première raison de croire à cette conjecture est qu'elle est vraie lorsque  $\varphi$  est sur le groupe à un paramètre engendré par un champ hamiltonien  $\xi$  (les points critiques d'un hamiltonien de  $\xi$  étant des points fixes de  $\varphi$ ). Une seconde raison, pas très sérieuse, est qu'elle est vérifiée lorsque  $\varphi$  est assez voisin de

l'identité, d'après la dernière assertion de (0.4.1) et le théorème 0.4.2 (i) (\*). Une troisième raison est qu'elle est vraie si  $M = \mathbb{S}_2$  - on a en fait un bien meilleur résultat :

**THÉORÈME.**— *Tout homéomorphisme  $\varphi$  de la sphère  $\mathbb{S}_2$ , homotope à l'identité et conservant une mesure de probabilité  $\mu$  qui charge les ouverts non vides, a au moins deux points fixes.*

**Démonstration.**— D'après Lefschetz [14],  $\varphi$  a au moins un point fixe  $a$ . Par conséquent,  $g = \varphi|_{\mathbb{S}_2 \setminus \{a\}}$  s'identifie à un homéomorphisme du plan. Si  $g$  n'avait pas de point fixe, le théorème de translation de Brouwer ([18], [25]) impliquerait l'existence d'un ouvert non vide  $U$  de  $\mathbb{S}_2$  tel que les ouverts  $g^n(U) = \varphi^n(U)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , soient deux à deux disjoints. On aurait donc

$$\sum_{0 \leq n \leq N} \mu(\varphi^n(U)) = (N+1)\mu(U) \leq \mu(\mathbb{S}_2) = 1 \text{ pour tout } N \in \mathbb{N}, \text{ d'où } \mu(U) = 0. \quad \square$$

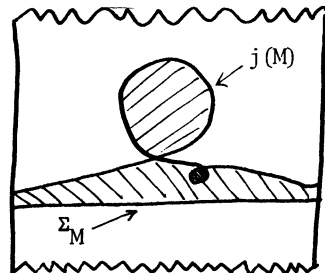
Par ailleurs, l'existence de groupes à un paramètre de translations symplectiques du tore  $\mathbb{T}^{2n} = \mathbb{C}^n / (\mathbb{Z}^n + i\mathbb{Z}^n)$  pour la structure symplectique standard  $\omega_n$ , image canonique de  $\sigma_n$ , montre la nécessité de l'hypothèse d'homologie à l'identité. L'objet principal de cet exposé est le résultat suivant, qui sera prouvé dans la section 2 :

(1.2.3) **THÉORÈME** (Conley-Zehnder [12]).— *La conjecture (1.2.2) est vraie si  $(M, \omega) = (\mathbb{T}^{2n}, \omega_n)$  - voir (2.3) pour une généralisation.*

(1.2.4) **CONJECTURE.**— *Soit  $M$  une variété compacte. Si  $j \in \text{Pl}(M, d\lambda_M)$  est homologue à la section nulle, alors  $j(M)$  et  $\Sigma_M = 0_M(M)$  ont assez de points d'intersection.*

Pour les  $j$  assez  $C^1$ -proches de  $0_M$ , cette conjecture est vraie (\*) - d'après (0.2.3), ce n'est qu'une reformulation des théorèmes de Morse et Lyusternik-Schnirelmann. Par ailleurs, elle est trivialement vérifiée si  $M = \mathbb{T}^1$  : sur le cylindre  $T^*\mathbb{T}^1$ , les aires comprises entre  $j(M)$  et  $\Sigma_M$  de part et d'autre du cercle  $\Sigma_M$  doivent être égales. En outre, la conjecture est trivialement fausse lorsqu'on y remplace les plongements par des immersions : le cylindre  $T^*\mathbb{T}^1$  étant coupé suivant une génératrice et déroulé sur un plan, voici l'image d'une immersion

$j : M \rightarrow T^*M$ , homotope à  $0_M$  parmi les immersions lagrangiennes exactes, et telle que  $j(M) \cap \Sigma_M = \emptyset$  (l'exactitude de  $j^*\lambda$  signifie que les deux régions hachurées ont la même aire, la petite boucle étant comptée deux fois) :



(\*) A. Weinstein annonce d'ailleurs [30] que (1.2.2) et (1.2.4) sont vraies dans des voisinages  $C^0$  de l'identité et de la section nulle respectivement.

(1.2.5) THÉOREME [ 8 ].— La conjecture 1.2.4 est vraie lorsque  $M$  admet une métrique riemannienne plate - donc pour  $M = \mathbb{T}^n$ .

On prouve sans peine que ce résultat implique le théorème 1.2.3 ; il sera établi dans la section 2. Pour terminer, voici une conjecture dont on ne sait rien pour  $n > 1$  (si  $n = 1$ , elle résulte d'un argument d'aire trivial), et dont la véracité entraînerait entre autres l'existence de plusieurs structures symplectiques non isomorphes sur  $\mathbb{C}^n$  pour  $n > 1$ .

(1.2.6) CONJECTURE.— Il n'existe pas de plongement lagrangien exact d'une variété compacte dans  $(\mathbb{C}^n, \sigma_n)$ .

## 2. DÉMONSTRATION DES PRINCIPAUX RÉSULTATS

### (2.1) Idée et partie analytique de la démonstration (cas des tores)

(2.1.1) Pourquoi (1.2.5) implique (1.2.3). Soit  $p : \mathbb{C}^n \rightarrow M = \mathbb{T}^{2n}$  la projection canonique. Le revêtement  $\tilde{p} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow M \times M$  défini par  $\tilde{p}(z_1, z_2) = (p(\bar{z}_1 + i\bar{z}_2), p(z_1 + iz_2))$  vérifie  $\tilde{p}(\mathbb{R}^{2n}) = \Delta M$  et  $\tilde{p}^*\omega = 2\sigma_{2n}$ . À l'aide de l'isomorphisme (0.3.1), on en déduit par passage au quotient un revêtement  $q : T^*M \rightarrow M \times M$  tel que  $q^*\omega = 2d\lambda_M$  et  $q(\Sigma_M) = \Delta M$ . Une isotopie hamiltonienne  $(\varphi_t)$  de  $M$ , d'extrémité  $\varphi$ , étant choisie, on obtient donc (1.2.3) en appliquant (1.2.5) à l'extrémité  $j = j_1$  de l'isotopie  $(j_t)$  de  $M$  dans  $T^*M$ , d'origine  $0_M$ , obtenue en relevant  $(x \mapsto (x, \varphi_t(x)))$ , et qui est lagrangienne exacte d'après le théorème 0.4.2 (i).

(2.1.2) Introduction : aperçu de la preuve de Conley et Zehnder [12]. Étant donné un automorphisme  $\varphi$ , homologue à l'identité, d'une structure symplectique  $\omega$  sur une variété compacte  $M$ , on montre sans peine l'existence d'une isotopie hamiltonienne  $(\varphi_t)$  de  $\omega$ , d'extrémité  $\varphi$ , et dont le hamiltonien est la restriction à  $I$  d'un arc différentiable  $(h_t) : \mathbb{R} \rightarrow E(M)$ , périodique de période 1. Les points fixes de  $\varphi$  sont donc en bijection avec les solutions de période 1 du système différentiel (sur  $M$ )  $\frac{d}{dt} x(t) = \xi_t(x(t))$ , où  $i_{\xi_t}\omega = dh_t$ . Or, ces solutions sont exactement les zéros de la 1-forme fermée  $\alpha$  définie sur l'espace  $\Omega(M)$  des lacets  $\gamma : I \rightarrow M$  de classe  $H_1$  par

$$(3) \quad \alpha(\gamma)(\delta) = \int_0^1 (\omega(\gamma'(t), \delta(t)) - dh_t(\gamma(t)) \cdot \delta(t)) dt$$

pour tout  $\delta \in T_{\gamma}\Omega(M)$ , c'est-à-dire tout  $\delta : I \rightarrow TM$  de classe  $H_1$  se projetant suivant  $\gamma$ . Si  $(M, \omega) = (\mathbb{T}^{2n}, \omega_n)$ , la restriction  $\alpha_0$  de  $\alpha$  à la composante  $\Omega_0(M)$  de  $\Omega(M)$  formée des lacets homotopes à des points est de la forme  $\alpha_0 = dF$ , où  $F$  est une fonction sur  $\Omega_0(M)$ , et, surtout, la classique méthode de Lyapounov-Schmidt permet de voir que les points critiques de  $F$  sont en bijection avec ceux d'une fonction  $f$  sur  $M \times \mathbb{R}^N$ , possédant les propriétés requises pour conclure.

Dans ce qui précède, l'hypothèse de périodicité de  $(h_t)$  a une importance

psychologique extrême : c'est vraisemblablement elle qui a suggéré à Conley et Zehnder l'usage de méthodes mises au point pour dénombrer les orbites périodiques de systèmes hamiltoniens. En revanche, du point de vue logique, cette hypothèse de périodicité est rigoureusement inutile, remarque qui permet, suivant [8], de *reconstituer* la preuve de Conley et Zehnder pour l'appliquer à un problème qui n'a plus aucun rapport avec la recherche d'orbites périodiques :

(2.1.3) Formulation du problème variationnel : Posons  $M = \mathbb{T}^n$ ,  $X = T^*\mathbb{T}^n$ ,  $\sigma = d\lambda_M$ , et désignons par  $q : \mathbb{C}^n \rightarrow X$  le revêtement déduit du revêtement canonique  $T^*\mathbb{R}^n \rightarrow T^*M$  par l'isomorphisme (0.3.1), qui vérifie donc  $q(\mathbb{R}^n) = \Sigma_M$  et  $q^*\sigma = \sigma_n$ . D'après le théorème 0.4.2 (ii), il existe une isotopie hamiltonienne  $(\varphi_t)$  telle que l'isotopie  $(j_t) = (\varphi_t \circ 0_M)$  vérifie  $j_1 = j$ , et admettant un hamiltonien  $(h_t)$  à support compact. Soit  $\Gamma$  l'espace des chemins  $\gamma : I \rightarrow X$  de classe  $H_1$  qui ont leurs extrémités dans  $j_0(M)$ ; les points de  $j_0(M) \cap j_1(M)$  sont évidemment en bijection avec les chemins  $\gamma : I \rightarrow X$ , de la forme  $\gamma(t) = \varphi_t(x)$  avec  $x \in j_0(M)$  et  $\varphi_1(x) \in j_0(M)$ , c'est-à-dire (un chemin de classe  $H_1$  étant une primitive de sa dérivée) avec les  $\gamma \in \Gamma$  solutions du système différentiel  $i_{\gamma'(t)}\sigma = dh_t(\gamma(t))$  - ce sont les zéros de la 1-forme  $\alpha$  définie sur  $\Gamma$  par (3).

Lemme.- La 1-forme  $\alpha$  est exacte, de primitive  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $f(\gamma) = \int_0^1 (-\gamma^*\lambda_M - h_t(\gamma(t)))dt$ .  $\square$

Soit  $\tilde{\Gamma}$  l'espace vectoriel des chemins  $u : I \rightarrow \mathbb{C}^n$  de classe  $H_1$  qui ont leurs extrémités dans  $\mathbb{R}^n$ , et soit  $q_* : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$  le revêtement  $u \mapsto q \circ u$ . Si  $\lambda$  désigne la primitive de  $\sigma_n$  définie par  $\lambda(z) = i_z \sigma_n(z)/2$ , on vérifie que  $\tilde{f} = f \circ q_*$  est donnée par

$$(4) \quad \tilde{f}(u) = \int_0^1 (-u^*\lambda - h_t(q(u(t))))dt.$$

(2.1.4) Réduction à la dimension finie : Notons

$(z, z') \mapsto (z|z') = \operatorname{Re}(z \cdot \bar{z}')$  le produit euclidien standard sur  $\mathbb{C}^n$ , et munissons  $H = L_2(I, \mathbb{C}^n)$  de sa structure d'espace hilbertien réel, définie par le produit scalaire  $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle = \int_0^1 (u(t)|v(t))dt$ . Le sous-espace  $\tilde{\Gamma}$  est dense dans  $H$ . Soient  $A : \tilde{\Gamma} \rightarrow H$  l'opérateur linéaire défini par  $Au = -i\dot{u}$ , et  $\Phi : H \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction  $u \mapsto \int_0^1 h_t(q(u(t)))dt$ ; comme on a  $\sigma_n(z)(h, h') = (h|ih')$  pour  $z, h, h' \in \mathbb{C}^n$ , la formule (4) s'écrit

$$(4 \text{ bis}) \quad \tilde{f}(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle - \Phi(u).$$

L'opérateur non borné  $A$  est auto-adjoint pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , son spectre est formé des valeurs propres  $m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , et, pour chaque  $m \in \mathbb{Z}$ , le sous-espace propre associé à la valeur propre  $m$  est  $E_m = u_m \mathbb{R}^n$ , où  $u_m(t) = e^{tm} i$  pour  $t \in I$ . L'espace  $H$  est somme directe hilbertienne des  $E_m$ ; si l'on note  $Y_N = \bigoplus_{|m| > N} E_m$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , l'image de  $A$  est l'orthogonal  $Y_0$  de son noyau  $E_0$ . Pour chaque  $N \in \mathbb{N}$ ,

l'application  $B_N: Y_N \rightarrow Y_N \cap \tilde{\Gamma}$  inverse de  $A|_{Y_N \cap \tilde{\Gamma}}$  est un opérateur compact de  $Y_N$  : tout  $v \in Y_N$  s'écrit de manière unique  $v = \sum_{|m| > N} u_m a_m$ ,  $a_m \in \mathbb{R}^n$ , et l'on a alors

$$(5) \quad B_N v = \sum_{|m| > N} u_m a_m / \pi_m.$$

Lemme.— Il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $N \geq N_0$  et tout  $z \in Z_N = \bigoplus_{|m| \leq N} E_m$ , si l'on identifie  $\tilde{\Gamma} = Z_N \oplus (Y_N \cap \tilde{\Gamma})$  à  $Z_N \times (Y_N \cap \tilde{\Gamma})$ , l'équation

$$(6) \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(z, y) = 0$$

admette une unique solution  $y = v(z) \in Y_N \cap \tilde{\Gamma}$ . En outre, l'application  $v: Z_N \rightarrow Y_N$  ainsi définie est bornée ainsi que sa dérivée.

Démonstration.— Si  $P_N$  désigne la projection orthogonale de  $H$  sur  $Y_N$ , (6) équivaut à

$$(6 \text{ bis}) \quad y = B_N P_N \nabla \Phi(z + y) \quad \text{et} \quad y \in Y_N,$$

où  $\nabla \Phi$  est le gradient de  $\Phi$  pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , c'est-à-dire que

$\nabla \Phi(u)(t) = \nabla(h_t \circ q)(u(t))$ , où  $\nabla(h_t \circ q)$  est le gradient de  $h_t \circ q$  pour  $(\cdot | \cdot)$ .

L'hypothèse faite sur  $(h_t)$  implique que  $\nabla \Phi$  et sa dérivée soient bornées ;

d'après (5), il existe donc  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour  $N \geq N_0$ , l'application

$y \mapsto B_N P_N \nabla \Phi(z + y)$  soit pour chaque  $z \in Z_N$  une contraction stricte de  $Y_N$ .

L'existence et l'unicité de  $v$  étant ainsi prouvées, sa différentiabilité résulte du théorème des fonctions implicites ; enfin,  $v$  et sa dérivée sont bornées

d'après ce qui vient d'être dit de  $\nabla \Phi$ .  $\square$

COROLLAIRE.— Un entier  $N \geq N_0$  étant choisi, posons  $E^+ = \bigoplus_{0 < |m| \leq N} E_m$ ,  $E^- = \bigoplus_{0 < |m| \leq N} E_{-m}$ , et, pour chaque  $z \in Z_N$ , soient  $z_+$ ,  $z_-$  et  $z_0$  ses projections orthogonales sur  $E^+$ ,  $E^-$  et  $E_0$  respectivement. On identifie  $q_*(Z_N) \subset \Gamma$  à  $M \times E^+ \times E^-$  par l'application  $q_* z \mapsto (q(z_0), z_+, z_-)$ . Les points critiques de  $f$  sont en bijection avec ceux de la fonction  $g$  sur  $M \times E^+ \times E^-$  définie, modulo cette identification, par

$$(7) \quad g(q \circ z) = \tilde{f}(z + v(z)) = \frac{1}{2}(\langle Az, z \rangle + \langle Av(z), v(z) \rangle) - \Phi(z + v(z)). \quad \square$$

## (2.2) Partie topologique de la démonstration (cas des tores)

A peu près n'importe quel argument classique du calcul des variations nous permettrait maintenant de conclure : Conley et Zehnder utilisent la théorie de Conley ([11], [28]), sans doute la meilleure approche de ces problèmes ; suivant Weinstein [30], nous allons plutôt nous ramener à la situation familière du théorème de Morse-Lyusternik-Schnirelmann.

Sous les hypothèses du corollaire 2.1.4, on définit une norme euclidienne

1.1 sur  $E^+ \oplus E^-$  par

$$|z|^2 = \langle Az_+, z_+ \rangle - \langle Az_-, z_- \rangle.$$

Soient  $g_0$  et  $h$  les deux fonctions sur  $q_*(Z_N)$  données par

$$g_0(\gamma) = |\gamma_+|^2 - |\gamma_-|^2 \text{ et } h(\gamma) = g(\gamma) - g_0(\gamma) ,$$

où l'on a noté  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$  les projections de  $\gamma \in q_*(Z_N) = M \times E^+ \times E^-$  sur  $E^+$  et  $E^-$ . Du fait que  $\nabla \Phi$  et  $v$  sont bornées ainsi que leurs dérivées premières, il résulte de (7) que la dérivée de  $h$  est bornée. Par conséquent, si  $\Theta : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$  est telle que  $\Theta^{-1}(1) = ]-\infty, 1]$  et  $\Theta^{-1}(0) = [4, \infty[$ , et si  $s \in ]0,1]$  est assez petit, la fonction  $g_1$  définie sur  $q_*Z_N$  par

$$(8) \quad g_1(\gamma) = g_0(\gamma) + \Theta(s^2 |(\gamma_+, \gamma_-)|^2) h(\gamma)$$

a les mêmes points critiques que  $g$ , et ceux-ci sont contenus dans

$$(9) \quad g_1^{-1}([-b, b]) = g_0^{-1}([-b, b]) , \quad \text{où } b = 9/s^2.$$

Soient  $S^+$  la sphère  $\{(x, t) : |x|^2 + |t - 1|^2 = 1\} \subset E^+ \times \mathbb{R}$ , et  $h^+ : S^+ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction-hauteur  $(x, t) \mapsto t$ . On définit un difféomorphisme  $\varphi^+$  de  $B^+ = \{z : |z| \leq 3\} \subset E^+$  sur  $(h^+)^{-1}([-\infty, 1])$ , envoyant  $|z|^2$  sur  $bh^+$  par  $\varphi^+(z) = (\lambda^+(z)z, \frac{|z|^2}{b})$  et  $\lambda^+ : B^+ \rightarrow ]0, \infty[$ . Les notations  $S^-$  et  $h^-$  étant définies de même à partir de  $E^-$ , on obtient un difféomorphisme  $\varphi^-$  de  $B^- = \{z : |z| \leq 6\} \subset E^-$  sur  $(h^-)^{-1}([-\infty, 1])$ , envoyant  $|z|^2$  sur  $4bh^-$ , par  $\varphi^-(z) = (\lambda^-(z)z, \frac{|z|^2}{4b})$  et  $\lambda^- : B^- \rightarrow ]0, \infty[$ . Si  $\varphi : M \times B^+ \times B^- \rightarrow M \times S^+ \times S^-$  est donné par  $\varphi(x, y, z) = (x, \varphi^+(y), \varphi^-(z))$ , soit  $g_2$  la fonction sur  $M \times S^+ \times S^-$  définie par

$$(10) \quad \begin{cases} g_2 \circ \varphi = g_1|_{M \times B^+ \times B^-} \\ g_2(x, y, z) = b(h^+(y) - 4h^-(z)) \text{ pour } \max\{h^+(y), h^-(z)\} \geq 1 . \end{cases}$$

Il est clair que  $g_2$  est différentiable, et a pour points critiques

- Les trois variétés  $M \times \{(0,0)\} \times \{(0,2)\}$ ,  $M \times \{(0,2)\} \times \{(0,2)\}$  et  $M \times \{(0,2)\} \times \{(0,0)\}$ , correspondant respectivement aux valeurs critiques  $-8b$ ,  $-6b$  et  $2b$ .

- Les images par  $\varphi$  des points critiques de  $g_2$  (c'est-à-dire de  $g$ ), contenues d'après (9) dans  $g_2^{-1}([-b, b])$ .

Si l'on note  $V_a = g_2^{-1}([-\infty, a])$  pour  $a \in \mathbb{R}$ , le théorème de Morse affirme que  $g$  possède au moins  $SB(V_b, V_{-b})$  points critiques, comptés avec leur multiplicité - l'entier  $SB(V_b, V_{-b})$  étant défini comme dans (1.2.1), mais à partir de la cohomologie réelle relative  $H^*(V_b, V_{-b})$ . Or, si  $h : S^+ \times S^- \rightarrow \mathbb{R}$  est donnée par  $h(y, z) = b(h^+(y) - 4h^-(z))$ , il résulte de (8), (9) et (10) que

$$V_b = M \times W_b \text{ et } V_{-b} = M \times W_{-b} , \quad \text{où } W_a = h^{-1}([-\infty, a]) .$$

Du fait que  $h^{-1}([-b, b])$  contient un seul point critique de  $h$ , d'indice  $nN = \dim S^+ = \dim S^- = p$ , on a ([19], p. 188)

$$H^q(W_b, W_{-b}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } q \neq p \\ \mathbb{R} & \text{si } q = p , \end{cases}$$

et l'isomorphisme de Künneth ([19], p. 196)

$$H^*(W_b, W_{-b}) \otimes H^*(M) \longrightarrow H^*(V_b, V_{-b})$$

montre que  $SB(V_b, V_{-b}) = 2^n$ , d'où (1.2.5) dans les cas génériques. On termine en remplaçant dans ce qui précède l'argument de Morse par celui de Lyusternik-Schnirelmann.  $\square$

### (2.3) Idée de la démonstration pour les variétés plates générales

Il ne sera question que du théorème 1.2.5, le cas du théorème 1.2.3 étant tout à fait semblable (de manière précise, on prouverait de même que la conjecture 1.2.2 est vraie lorsqu'il existe sur  $M$  une métrique riemannienne plate pour laquelle  $\omega$  est représentée par une structure presque complexe). Pour toute variété riemannienne  $M$  compacte et plate, il existe ([14], tome 4, p. 393) un revêtement  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow M$  envoyant la métrique standard de  $\mathbb{R}^n$  sur celle de  $M$ . Soit  $\pi : H_1(I, M) \rightarrow M$  la projection  $\gamma \mapsto \gamma(0)$ . Nous allons identifier  $\pi$  à une fibration vectorielle, de fibre  $\pi^{-1}(a) = L_2(I, T_a M)$  : à chaque  $\gamma : I \rightarrow M$  d'origine  $a$ , associons son développement de Cartan  $C_\gamma : I \rightarrow T_a M$ , défini comme suit : pour chaque  $t$ , on obtient  $C_\gamma(t)$  par transport parallèle de  $\gamma'(t)$  le long de  $\gamma$ . En d'autres termes, si  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  vérifie  $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$  et si  $\tilde{a} = \tilde{\gamma}(0)$ , on a  $C_\gamma(t) = T_{\tilde{a}} p_* \tilde{\gamma}'(t)$ , ce qui prouve que  $\gamma \mapsto C_\gamma$  est une bijection de  $H_1(I, M)$  sur  $TM \otimes L_2$  où  $L_2 = L_2(I, \mathbb{R})$ .

Soient  $\Gamma$  l'espace des chemins  $\gamma \in H_1(I, T^*M)$  à extrémités dans  $\Sigma_M$ , et  $H_{1C} = \{\gamma \in H_1(I, \mathbb{R}) : \gamma(0) = \gamma(1) = 0\}$ . On définit de même une bijection  $C' : \Gamma \rightarrow (TM \otimes L_2) \oplus_M (T^*M \otimes H_{1C})$  par  $C'\gamma = (C\tau_*\gamma, B\gamma)$ , où  $\tau : T^*M \rightarrow M$  est la projection canonique et  $B\gamma(t) \in T_{\tau(\gamma(0))}^* M$  s'obtient pour chaque  $t$  par transport parallèle de  $\gamma(t)$  le long de  $\tau \circ \gamma$ .

Pour tout  $a \in M$ , notons  $v \mapsto v^\#$  l'isomorphisme de  $T_a M$  sur  $T_a^* M$  défini par la métrique, et  $\xi \mapsto \xi_b$  son inverse. On définit une structure complexe  $J_a$  sur  $T_a M \oplus T_a^* M$  par  $J_a(v, \xi) = (-\xi_b, v^\#)$ . En remplaçant chaque élément de  $T_a M \otimes L_2$ ,  $a \in M$ , par sa primitive de moyenne nulle et en utilisant la structure presque complexe  $J$ , on déduit finalement de  $C'$  un isomorphisme de  $M$ -fibrés

$$\left\{ \begin{array}{l} C'' : \Gamma \rightarrow TM \otimes_{\mathbb{R}} \Gamma_0, \text{ où} \\ \Gamma_0 = \{\gamma \in H_1(I, \mathbb{C}) : \operatorname{Im} \gamma(0) = \operatorname{Im} \gamma(1) = \operatorname{Re} \int_0^1 \gamma(t) dt = 0\} \end{array} \right.$$

Soit  $q : \mathbb{C}^n \rightarrow T^*M$  le revêtement déduit de  $p$  grâce à l'identification (0.3.1), évidemment tel que  $q(\mathbb{R}^n) = \Sigma_M$  et  $q^* d\lambda_M = \sigma_n$ . Avec les notations de (2.1.3)-(2.1.4), pour tout  $\tilde{\gamma} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \otimes u_m \in \tilde{\Gamma}$ ,  $a_m \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$C''(q \circ \tilde{\gamma}) = \sum_{m \neq 0} (T_{\tilde{\gamma}(0)} p_* a_m) \otimes u_m.$$

Le même argument que dans (2.1.3)-(2.1.4) montre l'existence d'un entier  $N \geq 0$  tel que les points d'intersection cherchés soient en bijection avec les points critiques d'une fonction

$$g : TM \otimes_{\mathbb{R}} \bigoplus_{0 < |m| \leq N} \mathbb{R} u_m \rightarrow \mathbb{R}.$$

En remplaçant dans (2.2) l'isomorphisme de Künneth par l'isomorphisme de Thom, on conclut comme précédemment.  $\square$

*Remarque.*— Pour les variétés plates, l'isomorphisme  $C'$  pourrait être construit plus rapidement à l'aide de l'exponentielle, mais la méthode employée est tout à fait générale, l'hypothèse de platitude n'intervenant que dans la réduction à la dimension finie.

### 3. CONSÉQUENCES, REMARQUES ET QUESTIONS

#### (3.1) Cas des surfaces

(3.1.1) Surfaces sans bord. D'après Moser [26], toute structure symplectique  $\omega$  sur  $\mathbb{T}^2$  est isomorphe à  $\lambda\omega_1$  pour un réel  $\lambda \neq 0$ , d'où l'on déduit par (1.2.3) que la conjecture 1.2.2 est vraie si  $M = \mathbb{T}^2$ . Toujours d'après Moser, le théorème de classification des surfaces de Riemann entraîne le résultat suivant : pour toute forme-volume  $\omega$  sur une surface compacte  $M$  de genre  $> 1$ , il existe un revêtement  $q$  de  $M$  par le disque de Poincaré  $\mathbb{D}$  tel que  $q^*\omega$  soit le volume de  $\mathbb{D}$  pour sa métrique hyperbolique standard, et qu'en outre celle-ci passe au quotient par  $q$ . Il est probablement possible d'en déduire, par une variante de (2.3), la conjecture 1.2.2 pour les surfaces de genre  $> 1$ . Une démonstration entièrement différente de ce résultat a été proposée par Eliashberg [16]. Le théorème 1.2.2 (voir aussi (3.1.2)) invite à se demander s'il ne s'agit pas d'une propriété purement topologique (Kerékjártó [25] avait d'ailleurs annoncé quelque chose d'avoisinant). De manière précise, soient  $M = \mathbb{T}^2 = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$  et  $p_1 : M_1 = \mathbb{C}/\mathbb{Z} \rightarrow M$  et  $p_2 : M_2 = \mathbb{C}/i\mathbb{Z} \rightarrow M$  les projections canoniques. Etant donnée l'extrémité  $\varphi$  d'une isotopie  $(\varphi_t)$  de  $\omega_1$ , soit  $\tilde{\varphi}_j$ ,  $j = 1, 2$ , l'extrémité de l'isotopie de  $M_j$  obtenue en relevant  $(\varphi_t)$  par  $p_j$ . Désignons par  $C_1$  le cercle  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \subset M_1$ , par  $C_2$  le cercle  $i\mathbb{R}/i\mathbb{Z} \subset M_2$ , et par  $C_j^!$ ,  $j = 1, 2$ , un autre relèvement de  $p_j(C_j)$  par  $p_j$  tel que  $C_j \cap \tilde{\varphi}_j(C_j^!) = C_j \cap C_j^! = \emptyset$ . Il est clair (cf. (0.4.2) (ii) (b)) que  $\varphi$  est homologue à l'identité si et seulement si (en changeant éventuellement d'isotopie  $(\varphi_t)$ ), pour  $j = 1, 2$ , les deux anneaux sur  $M_j$  limités par  $C_j$  et  $C_j^!$  d'une part, par  $C_j$  et  $\tilde{\varphi}_j(C_j^!)$  d'autre part, ont la même aire pour  $p_j^*|\omega_1|$ . Si l'on prend cette propriété pour définition, elle a un sens pour tout homéomorphisme  $\varphi$  de  $M$ , homotope à l'identité et préservant la mesure  $|\omega_1|$ ; nous dirons alors que  $\varphi$  est un automorphisme continu de  $|\omega_1|$  homologue à l'identité. Enfin, rien n'empêche de remplacer dans cette définition  $|\omega_1|$  par une autre mesure positive finie, ce qui nous permet enfin d'énoncer la

CONJECTURE.— Soit  $\mu$  une mesure positive finie sur le tore  $\mathbb{T}^2$ , chargeant les ouverts non vides. Tout automorphisme continu de  $\mu$ , homologue à l'identité, admet

au moins trois points fixes.  $\square$

Le lecteur intéressé pourra trouver dans [17] une définition topologique plus propre et plus générale de l'invariant de Calabi en dimension 2.

(3.1.2) Le théorème de Poincaré-Birkhoff. Soient  $\mathbb{A}$  l'anneau  $\mathbb{T}^1 \times I$  et  $p : \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{A}$  son revêtement universel standard, où  $\tilde{\mathbb{A}}$  désigne le ruban  $\mathbb{R} \times I$ . Une *distorsion* de  $\mathbb{A}$  est un homéomorphisme  $\varphi$  qui se relève par  $p$  suivant un homéomorphisme  $\tilde{\varphi}$  de  $\tilde{\mathbb{A}}$  possédant la propriété suivante : pour tout  $\vartheta \in \mathbb{R}$ , on a  $\tilde{\varphi}(\vartheta, j) = (\tilde{\varphi}_j(\vartheta), j)$  pour  $j = 0, 1$ , avec  $\tilde{\varphi}_0(\vartheta) < \vartheta < \tilde{\varphi}_1(\vartheta)$ . L'origine de tout ce qui précède est le résultat suivant, dont Birkhoff [5] et Chenciner [9] ont d'ailleurs établi de bien meilleures versions :

**THÉORÈME.**— Toute distorsion  $\varphi$  de  $\mathbb{A}$ , préservant une mesure positive finie  $\mu$  qui charge les ouverts non vides, a au moins deux points fixes.

Ce théorème est issu de [27], la démonstration donnée dans [25] étant sans doute la plus conforme aux idées de Poincaré.  $\square$

**PROPOSITION.**— Le théorème précédent serait une conséquence de la conjecture 3.1.1, sous l'hypothèse supplémentaire suivante : pour  $j = 0, 1$ , l'homéomorphisme  $\varphi_j$  de  $\mathbb{T}^1$  au-dessous de  $\tilde{\varphi}_j$  est de la forme  $\varphi_j = \psi_j^{-1} \circ R_j \circ \psi_j$ , où  $\psi_j$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{T}^1$  et  $R_j$  une rotation (le théorème de Denjoy [21] affirme que c'est le cas dès que  $\varphi_j$  est un  $C^2$ -difféomorphisme, de nombre de rotation irrationnel).

**Démonstration.**— L'idée est de recoller deux exemplaires de l'anneau  $\mathbb{A}$  pour en faire un tore, et de considérer l'homéomorphisme de ce tore égal à  $\varphi$  sur chacun des deux anneaux. Comme on n'obtient pas en général ainsi un homéomorphisme homologue à l'identité, il faut "épaissir" un peu les bords de  $\mathbb{A}$ . De manière précise, soient  $a$  et  $b$  deux réels  $\geq 0$ ,  $J = [-1 - a - b, 1 + a + b]$ ,  $\sigma : \mathbb{T}^1 \times J \rightarrow \mathbb{T}^1 \times J$  la symétrie  $(\vartheta, t) \mapsto (\vartheta, -t)$  et  $\tilde{\varphi}_{a,b}$  l'homéomorphisme  $\sigma$ -invariant de  $\mathbb{T}^1 \times J$  défini par

$$\tilde{\varphi}_{a,b}(\vartheta, t) = \begin{cases} (\varphi_0(\vartheta), t) & \text{pour } 0 \leq t \leq a \\ \varphi(\vartheta, t - a) + (0, a) & \text{pour } a \leq t \leq 1 + a \\ (\varphi_1(\vartheta), t) & \text{pour } 1 + a \leq t \leq 1 + a + b \end{cases}$$

Soient  $m$  la mesure de Haar sur  $\mathbb{T}^1$ ,  $\tilde{m}$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ , et  $\tilde{\nu}_{a,b}$  la mesure  $\sigma$ -invariante sur  $\mathbb{T}^1 \times J$  égale à  $\psi_0^* m \otimes \tilde{m}$  sur  $\mathbb{T}^1 \times [0, a]$ , à  $\psi_1^* m \otimes \tilde{m}$  sur  $\mathbb{T}^1 \times [1 + a, 1 + a + b]$  et à  $\tau_a^* \mu$  sur  $\mathbb{T}^1 \times [a, 1 + a]$ , où  $\tau_a(\vartheta, t) = (\vartheta, t + a)$ . En identifiant les bords de  $\mathbb{T}^1 \times J$  par  $\sigma$ , on obtient un tore  $\mathbb{T}$ , on déduit de  $\tilde{\nu}_{a,b}$  une mesure finie  $\nu_{a,b}$  sur  $\mathbb{T}$  qui charge les ouverts non vides, et l'on déduit de  $\tilde{\varphi}_{a,b}$  un  $\Phi_{a,b} \in \text{Aut}(\nu_{a,b})$ . On peut évidemment choisir  $a$  et  $b$  de façon que  $\Phi_{a,b}$  soit homologue à l'identité,  $\varphi$  étant une distorsion (et donc homotope à l'identité). Si  $\Phi_{a,b}$  a un point fixe dans un des "bords épaissis", l'hypothèse supplémentaire sur  $\varphi$  implique que le bord correspondant de  $\mathbb{A}$  est composé de points fixes de  $\varphi$ . Sinon, les trois points fixes de  $\Phi_{a,b}$  sont au moins quatre,

et  $\varphi$  a deux points fixes dans l'intérieur de  $A$ .  $\square$

Un argument voisin du précédent montre que le théorème de Conley-Zehnder (1.2.3) implique le théorème de Poincaré-Birkhoff différentiable : tout automorphisme d'une structure symplectique sur  $A$  qui est une distorsion a au moins deux points fixes (voir aussi (3.1.4)).

(3.1.3) Application aux orbites périodiques. Nous allons voir maintenant pourquoi Poincaré et Birkhoff se sont intéressés à ces problèmes (et, accessoirement, pourquoi l'hypothèse supplémentaire de la proposition 3.1.2 n'a guère ici d'importance) : soit  $a$  un point fixe d'un automorphisme local  $\varphi$  d'une structure symplectique  $\sigma$  sur une surface  $S$ . D'après le théorème de Darboux [29], on ne perd rien à supposer que  $(S, \sigma, a) = (\mathbb{C}, \sigma_1, 0)$ . On dit que  $0$  est un point fixe elliptique de  $\varphi$  lorsque les valeurs propres de la différentielle  $D\varphi(0)$  sont imaginaires (auquel cas elles sont forcément de module 1, ce qui permet d'exprimer  $D\varphi(0)$  comme la rotation  $z \mapsto e^{2\pi i \omega_0} z$ ,  $0 < \omega_0 < 1$ ). Le théorème des courbes invariantes de Kolmogorov-Arnold-Moser affirme en (très) gros la chose suivante : si  $\varphi$  est "assez générique", il existe un ensemble  $\Omega \not\ni \omega_0$  d'irrationnels, de borne inférieure ou supérieure  $\omega_0$ , et une famille  $(C_\omega)_{\omega \in \Omega}$  de cercles plongés disjoints entourant l'origine dans  $\mathbb{C}$ , possédant les propriétés suivantes :

(i) Quand  $\omega$  tend vers  $\omega_0$ ,  $C_\omega$  tend vers  $\{0\}$  en ressemblant de plus en plus à un cercle de centre  $0$ .

(ii) Pour tout  $\omega \in \Omega$ , on a  $\varphi(C_\omega) = C_\omega$ , et il existe un difféomorphisme de  $C_\omega$  sur  $S^1$  envoyant  $\varphi|_{C_\omega}$  sur la rotation  $z \mapsto e^{2\pi i \omega} z$ .

Etant donnés  $\omega < \omega'$  dans  $\Omega$ , soit  $A_{\omega, \omega'}$  l'anneau bordé par  $C_\omega$  et  $C_{\omega'}$ . Si  $\omega$  et  $\omega'$  sont assez proches de  $\omega_0$ , alors, pour tout rationnel  $p/q \in ]\omega, \omega'[$ ,  $\varphi^q|_{A_{\omega, \omega'}}$  est une distorsion, et le théorème 3.1.2 montre donc que  $\varphi$  possède deux orbites de période  $q$  entre  $C_\omega$  et  $C_{\omega'}$ . Comme  $0$  est un point fixe isolé de  $\varphi$  (d'après le théorème d'inversion locale), on en déduit le résultat suivant : quels que soient  $\omega$  et  $\omega'$ , assez proches de  $\omega_0$ , il y a une infinité d'orbites périodiques de  $\varphi$  entre  $C_\omega$  et  $C_{\omega'}$ . Je renvoie aux travaux récents d'Herman ([22], [23], [24]) pour des énoncés (très) précis du théorème des courbes invariantes, et à [3] pour le classique lien avec les orbites périodiques des systèmes hamiltoniens.

(3.1.4) Remarque.— La conjecture (1.2.6) impliquerait, elle aussi, le théorème de Poincaré-Birkhoff différentiable. En effet, étant donnée une distorsion  $\varphi$  de  $A$  conservant une structure symplectique  $\sigma$ , on peut [26] remplacer  $A$  par la couronne  $C = \{z : 1 \leq |z| \leq 2\} \subset \mathbb{C}$  et  $\sigma$  par la restriction de  $\sigma_1$ . Le graphe de  $\varphi$  et celui de  $\text{id}_C$  sont deux couronnes  $C_1$  et  $C_2$  dans  $\mathbb{C}^2$ , lagrangiennes exactes (3.2.1) pour  $\tilde{\sigma}_1$ . Il n'est pas trop difficile de construire une immersion lagrangienne exacte  $j$  de  $\mathbb{T}^2$  dans  $(\mathbb{C}^2, \tilde{\sigma}_1)$  telle que  $j(\mathbb{T}^2)$  contienne  $C_1$  et  $C_2$

et ait pour seules auto-intersections les points de  $C_1 \cap C_2$ . Comme  $\tilde{\sigma}_1$  et  $\sigma_2$  sont évidemment isomorphes, on en déduit l'implication annoncée, au moins au niveau de l'existence d'un point fixe.  $\square$

### (3.2) Cas des grandes dimensions

(3.2.1) Revenons à la définition de l'invariant  $S$  de Calabi (2.1.1) : une structure symplectique sur une variété compacte sans bord ne peut évidemment pas être exacte, mais, sur une variété compacte à bord  $M$  (comme  $A$ ), une structure symplectique  $\omega$  peut au contraire avoir une primitive  $\lambda$ . Avec les notations de (2.1.1), on montre alors aisément [4] que, pour tout  $\varphi \in G_\omega$ , la classe de cohomologie de  $\varphi^*\lambda - \lambda$  s'identifie à  $S(\varphi)$ . Un  $\varphi \in G_\omega$  tel que  $\varphi^*\lambda - \lambda$  soit exacte est dit globalement canonique dans la littérature classique. Un argument d'aire évident montre que, si  $M = A$ , tout élément de  $G_\omega$  - et donc toute distorsion - est globalement canonique, ce qui permet la construction (3.1.4). En dimension plus grande, il n'en va plus ainsi, et une bonne généralisation du théorème de Poincaré-Birkhoff différentiable serait sans doute la

CONJECTURE [2].— Soit  $\sigma$  la restriction de  $d\lambda_{\mathbb{T}^n}$  au sous-fibré en boules-unité  $M \approx \mathbb{T}^n \times \mathbb{B}^n$  de  $T^*\mathbb{T}^n$ , et soit  $\varphi$  un automorphisme globalement canonique de  $\sigma$ , admettant un relèvement  $\tilde{\varphi}$  au revêtement universel standard  $\tilde{M} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{B}^n$  de  $M$  qui possède la propriété suivante : pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , les deux sphères  $S_x = \{x\} \times \partial\mathbb{B}^n$  et  $\tilde{\varphi}(S_x)$  sont enlacées dans  $\mathbb{R}^n \times \partial\mathbb{B}^n$ . Alors  $\varphi$  a au moins  $n+1$  points fixes, et, génériquement, au moins  $2^n$ .  $\square$

Il n'est pas impossible que cette conjecture soit en fait une conséquence du théorème de Conley et Zehnder pour  $n > 1$  comme pour  $n = 1$ . C'est de toutes façons le cas de l'énoncé moins général démontré dans [12].

(3.2.2) Un peu de science-fiction. Conley et Zehnder [13] pensent pouvoir démontrer la conjecture 1.2.2 en général par la même méthode, en utilisant (à fond, cette fois) la théorie de Conley ([11], [28]) : l'impossibilité d'une réduction directe à la dimension finie les obligerait, semble-t-il, à recourir aux méthodes de continuité mises au point par Conley ([11], chapitre 4), et qui ont déjà fait leurs preuves en Analyse ([10], [28]). Si cette idée marche pour la conjecture 1.2.2, elle s'appliquera très vraisemblablement à la conjecture 1.2.4 (dont on peut cependant se demander si elle ne serait pas accessible sans quitter la dimension finie), et peut-être à la conjecture 1.2.6.

Il semble d'ailleurs que, si l'on savait véritablement faire de la "topologie différentielle symplectique", la conjecture 1.2.6 contiendrait une bonne partie des autres. En voici donc pour conclure des versions de plus en plus optimistes dans le cas du tore :

I. Tout tore lagrangien (plongé) de  $\sigma_n$  contient le bord d'un disque plongé

$\mathbb{D}_2 \hookrightarrow \mathbb{C}^n$  tel que  $j^*\sigma_n$  soit une structure symplectique.

La formule de Cauchy dans le  $n$ -disque  $(\mathbb{D}_2)^n$  exprime que le tore lagrangien  $(S_1)^n$  "borde" l'intérieur de  $(\mathbb{D}_2)^n$ . L'argument d'aire qui prouve (1.2.6) si  $n = 1$  serait généralisé par

II (Schoenflies complexe).— Tout tore lagrangien (plongé) de  $\sigma_n$  "borde" l'intérieur d'un  $n$ -disque.

Remerciements : Cet exposé a bénéficié

- d'un séjour de son auteur au Brésil (Universidade Federal de São Carlos et IMPA), financé par le CNPq et la FAPESP ;
- de conversations avec Daniel Bennequin, Alain Chenciner et Albert Fathi.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. ABRAHAM, J. MARSDEN - Foundations of Mechanics, 2nd edition, Benjamin, 1978.
- [2] V.I. ARNOLD - Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 261 (novembre 1965), Groupe 1, 3719-3722.
- [3] V.I. ARNOLD - Méthodes mathématiques de la Mécanique classique, Mir, Moscou, 1976.
- [4] A. BANYAGA - Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique, Comment. Math. Helvetici 53(1978), 174-227.
- [5] G.D. BIRKHOFF - An extension of Poincaré's last geometric theorem, Acta Mathematica 47(1925), 297-311.
- [6] R. BOTT - Lectures on Morse theory, old and new, Bull. (new series) of the A.M.S. Vol. 7, n° 2 (septembre 1982), 331-358.
- [7] E. CALABI - On the group of automorphisms of a symplectic manifold, Problems in Analysis (Symposium in honour of S. Bochner), Princeton University Press (1970), 1-26.
- [8] M. CHAPERON - A theorem on Lagrangian intersections, prépublication, Ecole Polytechnique, février 1983.
- [9] A. CHENCINER - Sur un énoncé dissipatif du théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 294 (février 1982), Groupe 1, 243-245, et Points périodiques de longues périodes au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégénérée de difféomorphismes de  $\mathbb{R}^2$ , ibidem (mai 1982), 661-663.
- [10] C.C. CONLEY, J.A. SMOLLER - Sur l'existence et la structure des ondes de choc en magnétohydrodynamique, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 277 (septembre 1973), Série A, 387-389.
- [11] C.C. CONLEY - Isolated invariant sets and the Morse index, CBMS regional conference series in math. n° 38, A.M.S., 1978.

- [12] C.C. CONLEY, E. ZEHNDER - *The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V.I. Arnold*, à paraître aux *Inventiones Mathematicae*.
- [13] C.C. CONLEY - Lettre, mars 1983.
- [14] J. DIEUDONNÉ - *Éléments d'Analyse* (tomes 4 et 9), Gauthier-Villars, Paris, 1982.
- [15] A. DOUADY - *Noeuds et structures de contact en dimension 3* [d'après Daniel Bennequin], Séminaire Bourbaki, exposé n° 604, février 1983, à paraître dans *Astérisque*.
- [16] Ya. M. ELIASBERG - *Estimates of the number of fixed points of area-preserving mappings*, Université de Syktyvkar, 1978.
- [17] A. FATHI - Structure of the group of homeomorphisms preserving a good measure on a compact manifold, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. t. 13*(1980), 45-93.
- [18] A. FATHI - *Topologie de la dimension 2*, cours de troisième cycle, Orsay, 1980-81, à paraître.
- [19] C. GODBILLON - *Éléments de topologie algébrique*, Hermann, Paris, 1971.
- [20] M.R. HERMAN - *Sur le groupe des difféomorphismes du tore*, *Ann. Inst. Fourier* 23-2(1974), 75-86.
- [21] M.R. HERMAN - *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, *Publ. Math. I.H.E.S.* 49(1979), 5-233.
- [22] M.R. HERMAN - Cours à l'E.N.S., 1980, rédigé par J.B. Boost, à paraître dans *Astérisque*.
- [23] M.R. HERMAN - Introduction à l'étude des courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau, prépublication, Ecole Polytechnique, à paraître dans *Astérisque*.
- [24] M.R. HERMAN - *Le théorème des courbes invariantes en classe  $C^3$* , manuscrit, 1982.
- [25] B. de KERÉKJÁRTÓ - *The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré*, *Acta Szeged* 4(1928), 86-102.
- [26] J. MOSER - *On the volume element of a manifold*, *Trans. A.M.S.* 120(1965), 286-294.
- [27] H. POINCARÉ - *Sur un théorème de géométrie*, *Rendiconti d. Circ. Mat. di Palermo* 33(1912), 375-407.
- [28] J.A. SMOLLER - *Shock Waves and reaction-diffusion Equations*, Springer, 1983.
- [29] A. WEINSTEIN - *Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds*, *Advances in Math.* 6(1971), 329-345.
- [30] A. WEINSTEIN -  *$C^0$  perturbation theorems for symplectic fixed points and lagrangian intersections*, preprint, University of California, Berkeley, mai 1983.

Addendum (juillet 1983)

Soit  $h$  un difféomorphisme d'une variété  $M$ . Rappelons qu'une *orbite périodique* de  $h$  est une partie finie  $P$  de  $M$ , de la forme  $P = \{h^m(x) : m \in \mathbb{Z}\}$  pour un  $x \in M$ ; le cardinal  $m$  de  $P$  s'appelle sa *période primitive*, et l'on dit que  $P$  est *non dégénérée* lorsque 1 n'est pas valeur propre de l'automorphisme linéaire  $T_x h^m$  de  $T_x M$  (condition évidemment indépendante du choix de  $x \in P$ ). En utilisant un argument d'indice [32], Conley et Zehnder viennent [33] d'établir le résultat suivant, formulé plus précisément dans [33], théorème 2 :

**THÉORÈME.**— Soit  $h$  un automorphisme de  $\omega_n$ , homologue à l'identité, et dont toutes les orbites périodiques sont non dégénérées. Il existe alors une suite  $(m_k)$  d'entiers, tendant vers  $+\infty$ , telle que  $h$  admette pour tout  $k$  au moins deux orbites périodiques de période primitive  $m_k$ .  $\square$

Comme nous l'avons vu dans (2.1.2), ce résultat admet [33] une formulation équivalente en termes d'orbites périodiques d'un système hamiltonien dépendant du temps sur  $\mathbb{T}^{2n}$ , ce qui montre bien les liens étroits entre le présent exposé et [31].

- [31] H. BERESTYCKI - *Solutions périodiques de systèmes hamiltoniens*, exposé au Séminaire Bourbaki n° 603, février 1983.
- [32] C.C. CONLEY, E. ZEHNDER - *Morse type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian equations*, à paraître dans Comm. Pure and Appl. Math.
- [33] C.C. CONLEY, E. ZEHNDER - *Note on subharmonic solutions of a Hamiltonian vectorfield*, prépublication, juin 1983.

Marc CHAPERON

C.N.R.S.

& Centre de Mathématiques  
Ecole Polytechnique  
F-91128 PALAISEAU CEDEX