Astérisque

PIERRE CARTIER

La théorie classique et moderne des fonctions symétriques

Astérisque, tome 105-106 (1983), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 597, p. 1-23

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1982-1983__25__1_0>

Séminaire BOURBAKI
35e année, 1982/83, n° 597 Novembre 1982

LA THÉORIE CLASSIQUE ET MODERNE DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES

par Pierre CARTIER

Introduction

La combinatoire est en gros l'étude des géométries finies. Une partie est consacrée à la construction et à l'étude qualitative des configurations finies (graphes, plans projectifs, matroïdes, et plus récemment immeubles....). D'un autre côté, on s'occupe à compter les objets d'une certaine espèce, le plus souvent au moyen de séries génératrices; inversement, et cette préoccupation est plus récente, on s'efforce d'interpréter des identités entre polynômes et séries de puissances en introduisant les structures finies que comptent les coefficients.

La partie la plus vénérable de la combinatoire s'occupe des propriétés des permutations (avec ou sans répétitions) et des fonctions symétriques; les tableaux de Young y jouent un rôle prédominant. Il s'agit d'un retour aux traditions de l'Algèbre du siècle dernier, mais enrichi par tout l'arsenal des notions modernes. On met l'accent sur les méthodes constructives et algorithmiques; les points de contact avec le reste des Mathématiques sont nombreux, et en particulier avec la théorie des groupes, la géométrie algébrique, la topologie des classes caractéristiques, et aussi la physique mathématique. De plus, les problèmes et les méthodes de l'informatique théorique jouent un rôle croissant.

Les mathématiciens anglais se sont toujours intéressés à ces problèmes, dans la grande tradition de MacMahon et Young; une autre école s'est formée autour de Rota au M.I.T., à la recherche de méthodes synthétiques et de nouvelles structures; en France, les disciples de Schützenberger, particulièrement nombreux à Strasbourg, s'intéressent surtout au calcul des séries.

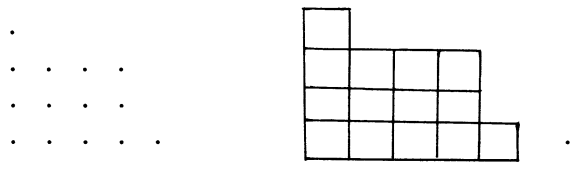
Le but de cet exposé est d'indiquer un certain nombre de lignes de recherche, et leurs applications. Par nécessité, nous devrons omettre l'essentiel des calculs et des démonstrations. Je remercie Foata et Lascoux pour leurs informations sur un sujet qu'ils connaissent à fond.

§ 1. Partages et q-dénombrements

1.1. Soit n un entier positif (0 est compté comme positif!). Un partage de n est une suite $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_m)$ d'entiers satisfaisant à la relation $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_m > 0$ et telle que n soit égal à la somme des μ_i ; on écrit aussi $\mu \vdash n$ le fait que μ est un partage de n, et l'on dit que m est le nombre de parts de μ. Il est commode d'introduire une suite d'indéterminées h_n (pour $n \geq 1$), et de convenir que h_n a le poids n pour tout $n \geq 1$; on pose alors $h_\mu = h_{\mu_1}\dots h_{\mu_m}$, de sorte que l'application $\mu \mapsto h_\mu$ est une bijection de l'ensemble des partages de n sur l'ensemble des monômes de poids n en les indéterminées h_i. On écrit aussi μ sous la forme $1^{r_1}\dots n^{r_n}$ lorsque μ contient exactement r_i parts égales à i ; on a alors $h_\mu = h_1^{r_1}\dots h_n^{r_n}$.

A un partage μ de l'entier positif n est associé un ensemble $D(\mu)$ de n points, connu sous le nom de diagramme de Ferrers: si $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_m)$, cet ensemble se compose des couples (i,j) d'entiers tels que $1 \leq j \leq m$ et $1 \leq i \leq \mu_j$; il est composé de m lignes de longueurs $\mu_1,\dots,\mu_m$, la plus haute étant la plus courte. On peut aussi considérer un ensemble correspondant de cases. Au partage μ de n on associe le partage dual μ^* de n, où μ^*_i est le nombre de parts de μ qui sont au moins égales à i. Le diagramme $D(\mu^*)$ se déduit de $D(\mu)$ par la symétrie qui échange lignes et colonnes, c'est-à-dire transforme le point (i,j) en le point (j,i).

Par exemple, le partage $\mu = (5,4,4,1)$ de 14 s'écrit aussi $1.4^2.5$; le partage dual μ^* s'écrit $(4,3,3,3,1)$ ou $1.3^3.4$, et le diagramme $D(\mu)$ se représente sous l'une des formes suivantes



1.2. Notons $p(n,m)$ le nombre de partages de n en m parts, et $p(n)$ le nombre de partages de n ; on a donc $p(n) = \sum_{m=1}^{\infty} p(n,m)$ pour $n \geq 1$ et $p(0) = p(0,0)$ est égal à 1. On obtient facilement la série génératrice

$$(1) \qquad \sum_{m,n} p(n,m)u^m q^n = \prod_{i\geq 1}(1-uq^i)^{-1} ,$$

d'où l'on déduit

$$(2) \qquad \sum_{n\geq 0} p(n)q^n = \prod_{i\geq 1} (1 - q^i)^{-1} \quad .$$

Si l'on note $p^*(n,m)$ et $p^*(n)$ les nombres analogues pour les partages en parts inégales, on a

$$(3) \qquad \sum_{m,n} p^*(n,m)u^m q^n = \prod_{i\geq 1} (1 + uq^i)$$

$$(4) \qquad \sum_{n\geq 0} p^*(n)q^n = \prod_{i\geq 1} (1 + q^i) \quad .$$

On trouvera dans Andrews [2,chap.1] de nombreuses formules analogues.

L'inverse de la série génératrice (2) est donnée par la formule d'Euler

$$(5) \qquad \prod_{i\geq 1} (1 - q^i) = \sum_{m} (-1)^m q^{m(3m-1)/2}$$

(où m parcourt l'ensemble $\underline{Z}$ des entiers rationnels) ; l'interprétation combinatoire est la suivante : si $p_+(n)$ est le nombre de partages de n en un nombre pair de parts toutes distinctes, et si $p_-(n)$ est défini de manière analogue avec un nombre impair de parts, alors on a $p_+(n) = p_-(n)$ sauf dans le cas où n est un nombre "pentagonal" $m(3m-1)/2$, auquel cas on a $p_+(n) = p_-(n) + (-1)^m$. Une démonstration combinatoire de ce résultat est due à F.Franklin.

1.3. Les formules qui précèdent conduisent à introduire les séries de puissances suivantes :

$$(6) \qquad (u;q)_\infty = \prod_{i\geq 0} (1-uq^i)$$

$$(7) \qquad (u;q)_n = (u;q)_\infty / (uq^n;q)_\infty = (1-u)(1-uq)\ldots(1-uq^{n-1}) \quad .$$

En particulier, $(q;q)_n$ (noté aussi $\Phi_n(q)$) est égal à $(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)$.

Une identité remarquable est due à Cauchy ; sous forme symétrique, elle s'écrit

$$(8) \qquad (a;q)_\infty / (b;q)_\infty = \sum_{n\geq 0} (b-a)(b-aq)\ldots(b-aq^{n-1})/\Phi_n(q) \quad ;$$

la forme dyssymétrique est la suivante

$$(9) \qquad (au;q)_\infty / (u;q)_\infty = \sum_{n\geq 0} u^n (a;q)_n / \Phi_n(q) \quad .$$

L'inverse $\prod_{i\geq 0} (1-uq^i)^{-1}$ de $(u;q)_\infty$ s'appelle aussi la q-<u>exponentielle de</u> u et se note $e(u;q)$. De la formule (9), on déduit les deux corollaires suivants dus à Euler

$$(10) \qquad e(u;q) = \sum_{n\geq 0} u^n / \Phi_n(q)$$

$$(11) \qquad e(-u;q)^{-1} = \sum_{n\geq 0} u^n q^{n(n-1)/2}/\Phi_n(q) \ .$$

Une démonstration combinatoire s'obtient facilement en revenant aux séries génératrices (1) et (3) . Par analogie avec les fonctions trigonométriques , on peut poser

$$(12) \qquad e(iu;q) = \cos(u;q) + i \sin(u;q) \quad (\text{avec } i^2 = -1) \ ,$$

et plus généralement définir les q-analogues de diverses fonctions spéciales (voir le livre de Bailey [3]).On remarquera que $\Phi_n(q)/(1-q)^n$ est le polynôme

$$(1+q)(1+q+q^2)....(1+q+...+q^{n-1})$$

en q qui prend la valeur $n!$ pour $q = 1$. Il résulte alors de la formule (10) que $\exp(u)$ s'obtient par substitution de 1 à q dans $e(u(1-q);q)$; remarque analogue pour le sinus, le cosinus et les autres fonctions spéciales .

1.4. Le coefficient du binôme $\binom{n}{m}$ a été généralisé par Gauss sous la forme

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \Phi_n(q)/\Phi_m(q)\Phi_{n-m}(q) \ ;$$

lorsque l'on fait $q = 1$, on retrouve bien $\binom{n}{m}$ d'après la remarque précédente . L'analogue du triangle de Pascal est fourni par les règles suivantes :

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q = 1 \quad , \quad \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_q + q^m \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}_q \ ,$$

d'où l'on déduit le fait que $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q$ est un polynôme en q à coefficients entiers positifs. La formule du binôme donnant $(1-u)^n$ se généralise sous la forme

$$(13) \qquad (u;q)_n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q u^m q^{m(m-1)/2} \ .$$

On peut aussi introduire les coefficients multinomiaux

$$(14) \qquad [n_1,....,n_r]_q = \Phi_n(q)/\Phi_{n_1}(q)...\Phi_{n_r}(q)$$

avec $n = n_1 +...+ n_r$ (ils sont souvent notés $\begin{bmatrix} n \\ n_1 \ ..... \ n_r \end{bmatrix}_q$). On peut donner des formules de récurrence généralisant la règle de Pascal , qui montrent que ce sont des polynômes à coefficients entiers positifs en q ; je préfère introduire une généralisation non commutative de la formule du binôme . Supposons que l'on ait des éléments $x_1,...,x_r,q$ d'un anneau A satisfaisant aux relations de commutation

$$(15) \qquad x_i x_j = q x_j x_i \qquad \text{pour} \qquad i > j \ ;$$

alors on a

(16) $$(x_1 + \ldots + x_r)^n = \Sigma\, [n_1,\ldots,n_r]_q\, x_1^{n_1}\ldots x_r^{n_r} \quad ,$$

la sommation étant étendue à tous les systèmes d'entiers positifs $n_1,\ldots,n_r$ de somme n ; la démonstration se fait par une double récurrence sur r et n .

L'interprétation combinatoire la plus évidente des coefficients de Gauss est la suivante : soient F un corps fini , q le nombre de ses éléments , et V un espace vectoriel de dimension finie n sur F ; alors $\left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}\right]_q$ est le nombre des sous-espaces vectoriels de dimension m de V . De manière analogue , $[n_1,\ldots,n_r]_q$ dénombre les suites croissantes $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_r$ de sous-espaces de V telles que V_1 soit de dimension n_1 et que V_i/V_{i-1} soit de dimension n_i pour $1 < i \leq r$.

1.5. Les coefficients q-multinomiaux ont été appliqués par MacMahon [10] à l'étude des inversions des permutations . Soit s une permutation de l'ensemble $[n]$ des entiers compris entre 1 et n ; une <u>inversion</u> de s est un couple d'éléments i,j de $[n]$ tels que $i < j$ et $s(i) > s(j)$; notons $b_i(s)$ le nombre des éléments j de $[n]$ satisfaisant aux inégalités précédentes pour i fixé dans $[n-1]$, de sorte que $b_1(s) + \ldots + b_{n-1}(s)$ soit égal au nombre $\mathrm{Inv}(s)$ des inversions de s . Or l'application $s \longmapsto (b_1(s),\ldots,b_{n-1}(s))$ est une bijection de l'ensemble S_n des permutations de $[n]$ sur l'ensemble des suites soumises aux inégalités $0 \leq b_i \leq n-i$ pour i dans $[n-1]$. On en déduit la formule

(17) $$\sum_s q^{\mathrm{Inv}(s)} = \Phi_n(q)/(1-q)^n \quad .$$

Du point de vue combinatoire, il y a souvent intérêt à identifier une permutation s de $[n]$ à la suite d'entiers $s(1),\ldots,s(n)$. Une "permutation avec répétition" est de manière analogue une suite $c = c_1,\ldots,c_n$ d'entiers ; une inversion d'une telle suite est un couple i,j d'éléments de $[n]$ tels que $i < j$ et $c_i > c_j$; une <u>descente</u> est un entier i de $[n-1]$ tel que $c_i > c_{i+1}$. Notons $\mathrm{Inv}(c)$ le nombre d'inversions de la suite c et $\mathrm{Maj}(c)$ ("indice majeur, ou du major MacMahon") la somme de ses descentes . On a alors

(18) $$\sum_c q^{\mathrm{Inv}(c)} = [n_1,\ldots,n_r]_q \quad ,$$

la sommation étant étendue aux suites c dans lesquelles 1 apparaît n_1 fois,..., r apparaît n_r fois . Le cas particulier $n_1 = \ldots = n_r = 1$ est la formule (17). Les formules (16) et (18) sont équivalentes. Par ailleurs , MacMahon a montré que l'on pouvait remplacer $\mathrm{Inv}(c)$ par $\mathrm{Maj}(c)$ dans la formule (18) . On pourra consulter à ce sujet Andrews [2,page 42] , Knuth [6,page 17] ou Foata et Schützenberger [17].

1.6. Les coefficients q-multinomiaux se prêtent à un calcul "symbolique" , où l'on calcule sur des indéterminées h_n en remplaçant $h_{n_1}\ldots h_{n_r}$ par $[n_1,\ldots,n_r]_q$. Cette recette définit en fait une application $\underline{\underline{Z}}$-linéaire de l'anneau A des polynômes à coefficients entiers en les h_n dans l'anneau $\underline{\underline{Z}}[[q]]$ de séries formelles .Soit ev_q l'homomorphisme de l'anneau A dans l'anneau $\underline{\underline{Z}}[[q]]$ qui transforme h_n en $1/\Phi_n(q)$ pour tout entier $n \geq 1$. Si l'on attribue le poids n à h_n comme au n° 1.1, on voit que tout élément F homogène de degré n dans A s'interprète comme la série $ev_q(F).\Phi_n(q)$. On peut plus prosaïquement remplacer $\underline{\underline{Z}}[[q]]$ par le corps $\underline{\underline{Q}}$ des nombres rationnels et $\Phi_n(q)$ par n! , d'où un calcul symbolique pour les coefficients multinomiaux usuels . On retrouvera cette construction au n° 2.6 .

§ 2. Fonctions symétriques

2.1. Soit K un anneau commutatif. Si n est un entier positif, on note K_n l'anneau de polynômes $K[X_1,\ldots,X_n]$ et Sym_n le sous-anneau de K_n formé des polynômes symétriques, c'est-à-dire les polynômes P tels que l'on ait

$$P(X_{s(1)},\ldots,X_{s(n)}) = P(X_1,\ldots,X_n)$$

pour toute permutation s de $[n]$. Par définition , la fonction symétrique élémentaire $a_{k,n}$ est la somme de tous les monômes $X_{i_1}\ldots X_{i_k}$ avec $i_1 < \ldots < i_k$ pris dans $[n]$.

Le théorème classique des fonctions symétriques affirme que Sym_n est l'anneau de polynômes $K[a_{1,n},\ldots,a_{n,n}]$. La démonstration la plus simple se fait par récurrence sur n . Notons j_n l'homomorphisme de K_n dans K_{n-1} qui transforme $P(X_1,\ldots,X_n)$ en $P(X_1,\ldots,X_{n-1},0)$; il induit un homomorphisme j'_n de Sym_n dans Sym_{n-1} , qui annule $a_{n,n}$ et transforme $a_{k,n}$ en $a_{k,n-1}$ pour tout k dans $[n-1]$. Le noyau de j'_n se compose des polynômes symétriques divisibles par X_n , donc c'est l'idéal engendré dans Sym_n par $a_{n,n} = X_1\ldots X_n$. Si l'on admet le théorème pour les polynômes en $n-1$ indéterminées, on voit aussitôt que tout élément de Sym_n s'écrit de manière unique sous la forme

$$P = Q(a_{1,n},\ldots,a_{n-1,n}) + a_{n,n}R$$

avec Q dans $K[Y_1,\ldots,Y_{n-1}]$ et R dans Sym_n , d'où aussitôt la propriété annoncée.

Il est commode de passer à la limite sur n . On peut pour cela recourir à

l'Analyse Non-Standard, ou plus simplement considérer des séries formelles en une suite infinie d'indéterminées X_n (pour $n \geq 1$) et introduire la somme a_k de tous les monômes qui sont le produit de k indéterminées distinctes; si l'on remplace par 0 tous les X_i avec $i > n$, on retrouve K_n et $a_{k,n}$ au moins lorsque l'on a $k \leq n$. On trouvera dans Bourbaki [4, pages IV.57 et suivantes] la preuve que l'algèbre des séries formelles symétriques s'identifie à l'algèbre des séries formelles en les a_n (pour $n \geq 1$). Pour la graduation usuelle, où chacune des indéterminées X_n a le degré 1, a_n est de degré n. On notera F_n le K-module formé des séries formelles symétriques homogènes de degré n et F la somme directe des F_n, c'est-à-dire l'anneau des polynômes à coefficients dans K en les a_n.

2.2. Les ouvrages élémentaires d'Algèbre s'arrêtent en général là, ce qui est peu explicite; pour remédier à ce déplorable état de fait, nous allons introduire plusieurs bases du K-module F_n, indexées par les partages de l'entier n. Tout d'abord, pour $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_m)$, notons k_μ la somme de tous les monômes de la forme

$$X_{i_1}^{\mu_1} \ldots X_{i_m}^{\mu_m}$$

avec des indices distincts $i_1,\ldots,i_m$, chacun de ces monômes apparaissant une seule fois. Classiquement, on désigne k_μ par l'expression $\Sigma\, X_1^{\mu_1} \ldots X_m^{\mu_m}$.

Noter qu'on a $a_n = k_{1^n}$, c'est-à-dire $a_n = k_{1\ldots1}$ avec n parts égales à 1. Notons h_n la somme de tous les monômes de degré n en les X_i, c'est-à-dire la somme de tous les k_μ où μ parcourt les partages de n. On a les séries génératrices (avec la convention $a_0 = h_0 = 1$)

$$a(u) := \sum_{n\geq 0} a_n u^n = \prod_i (1+uX_i) \tag{19}$$

$$h(u) := \sum_{n\geq 0} h_n u^n = \prod_i (1-uX_i)^{-1}, \tag{20}$$

d'où l'on déduit $a(u)h(-u) = 1$, c'est-à-dire la relation de récurrence

$$a_n - h_1 a_{n-1} + h_2 a_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} h_{n-1} a_1 + (-1)^n h_n = 0. \tag{21}$$

Il en résulte que F est aussi l'anneau des polynômes à coefficients dans K en les h_n, et qu'il existe un automorphisme involutif $u \longmapsto u^*$ de l'anneau F induisant l'identité sur K et transformant a_n en h_n pour tout entier $n \geq 1$. On posera comme au n° 1.1

$$a_\mu = a_{\mu_1} \ldots a_{\mu_m}, \qquad h_\mu = h_{\mu_1} \ldots h_{\mu_m}$$

pour tout partage $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_m)$ de n. On dispose donc de trois bases (a_μ), (h_μ) et (k_μ) de F_n indexées par les partages μ de n.

Pour le partage n de n en une part. on écrit p_n pour k_n ; c'est la somme des puissances n-ièmes des indéterminées X_i. La notation p_μ s'impose de soi, mais les p_μ ne forment pas en général une base du K-module F_n. Pour exprimer les relations classiques de Newton, introduisons la série génératrice

$$p(u) := \sum_{n>0} p_n u^n \qquad ; \tag{22}$$

elle est égale à $\sum_i uX_i/(1-uX_i)$, donc à $uh'(u)/h(u)$ en notant $h'(u)$ la dérivée de $h(u)$ par rapport à u. On a donc

$$h(u)p(u) = uh'(u) = \sum_n nh_n u^n ,$$

d'où finalement

$$p_n + h_1 p_{n-1} + \ldots + h_{n-1}p_1 = nh_n . \tag{23}$$

Si K contient le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels (comme sous-anneau), on a

$$h(u) = \exp\Big(\sum_{n\geq 1} p_n u^n/n\Big) , \tag{24}$$

F est l'algèbre des polynômes à coefficients dans K en les p_n, et les p_μ forment une base du K-module F_n.

2.3. Pour déterminer les matrices de transition entre ces diverses bases de F_n, le plus commode est d'introduire un produit scalaire $<a,b>$ dans F. Nous le caractériserons par la relation

$$<k_\mu,h_\mu> = 1 \quad , \quad <k_\mu,h_{\mu'}> = 0 \quad \text{si } \mu \neq \mu' . \tag{25}$$

Il est remarquable que ce produit scalaire soit symétrique; cela se voit en calculant le produit scalaire $<h_\mu,h_{\mu'}>$ pour $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_m)$ et $\mu' = (\mu'_1,\ldots,\mu'_{m'})$: c'est le nombre des matrices formées d'entiers positifs, à m lignes et m' colonnes, dont la i-ème ligne a pour somme μ_i et la j-ème colonne a pour somme μ'_j. Ces "nombres d'occupation" sont évidemment symétriques en μ et μ'.

On montre que $<a_\mu,a_{\mu'}>$ est égal à $<h_\mu,h_{\mu'}>$ et que $<a_\mu,h_{\mu'}>$ compte les matrices du type précédent qui ne contiennent que des 0 et des 1. Les p_μ sont deux à deux orthogonaux, et l'on a

$$<p_\mu,p_\mu> = \prod_{i\geq 1} i^{r_i} r_i! \quad \text{si } \mu = 1^{r_1}2^{r_2}\ldots \tag{26}$$

On renvoie à Doubilet [18] pour le calcul des autres produits scalaires.

2.4. D'après la formule (25), les bases (k_μ) et (h_μ) de F_n sont en dualité

pour le produit scalaire ; ce dernier définit donc un isomorphisme de F_n sur le K-module dual $\mathrm{Hom}_K(F_n,K)$. Par conséquent, la multiplication dans F , qui peut être considérée comme une application K-linéaire de $F \otimes F$ dans F , soit m , définit par dualité une comultiplication m^* de F dans $F \otimes F$. De manière explicite, la relation $m^*(f) = \sum_i f'_i \otimes f''_i$ signifie qu'on a

$$< f,uv > \;=\; \sum_i \; < f'_i,u >< f''_i,v > \tag{27}$$

pour u,v arbitraires dans F . Définissons la somme de deux partages de sorte qu'on ait $h_\mu h_{\mu'} = h_{\mu+\mu'}$. D'après la formule (27) , on a alors

$$m^*(k_\mu) \;=\; \Sigma\; k_{\mu'} \otimes k_{\mu''} \;, \tag{28}$$

la sommation étant étendue à toutes les décompositions $\mu = \mu' + \mu''$. Cela nous permet d'interpréter le coproduit : la relation $m^*(f) = \sum_i f'_i \otimes f''_i$ équivaut à

$$f(X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_m) \;=\; \sum_i \; f'_i(X_1,\ldots,X_n)f''_i(Y_1,\ldots,Y_m) \;. \tag{29}$$

En corollaire, m^* est l'unique homomorphisme d'algèbres de F dans $F \otimes F$ qui transforme h_n en $\sum_{0\le i\le n} h_i \otimes h_{n-i}$ pour tout entier n positif. Il en résulte que F est une bigèbre (ou algèbre de Hopf) pour le coproduit m^* ; on en retrouvera de nombreuses incarnations aux paragraphes 3 et 5 .

A tout élément f de F est associé un produit intérieur $i(f)$ dans F , transposé de la multiplication par f :

$$< i(f)u,v > \;=\; < u,fv > \quad . \tag{30}$$

En particulier , l'opérateur $D_n := i(h_n)$ a été souvent utilisé par MacMahon sous le nom d'opérateur de Hammond. On a la formule de Leibniz

$$D_n(uv) \;=\; \sum_{0\le i\le n} \; D_i(u)D_{n-i}(v) \;, \tag{31}$$

et pour tout élément f de F_n , le coefficient d'un monôme $X_1^{n_1}\ldots X_r^{n_r}$ dans la série de puissances f est égal à $D_{n_1}\ldots D_{n_r} f$.

Le K-module des éléments primitifs de F a pour base l'ensemble des p_n . L'opérateur $i(p_n)$ est une dérivation de F qui transforme h_r en h_{r-n} (avec la convention que h_i est nul pour $i < 0$); lorsque K contient $\mathbb{Q}$, la dérivation partielle par rapport à p_n est égale à $i(p_n)/n$.

2.5. Le K-module F_n possède encore une autre base orthonormale : elle est constituée des fonctions de Schur s_μ (notées aussi $\{\mu\}$). Elles sont définies comme

suit :

(32) $$s_\mu = \det h_{\mu_i - i+j} \qquad \text{(pour } i,j \text{ dans } [m]),$$

où le partage μ est égal à $(\mu_1,\dots,\mu_m)$. Voici une autre expression :

(33) $$s_\mu(X_1,\dots,X_n) = \det(X_i^{\mu_j+n-j})/D(X_1,\dots,X_n) \ ,$$

où l'on a $n \geq m$, i et j parcourent $[n]$, on pose $\mu_j = 0$ si $j > m$ et où $D(X_1,\dots,X_n)$ est le classique déterminant de van der Monde.

Les bases (k_μ) et (h_μ) étant en dualité pour le produit scalaire , il résulte de la formule

(34) $$\sum_\mu k_\mu(X_1,\dots,X_m)\, h_\mu(Y_1,\dots,Y_n) = \prod_{i,j} (1-X_iY_j)^{-1}$$

que l'orthonormalité de la base (s_μ) équivaut à la classique formule de Cauchy

(35) $$\sum_\mu s_\mu(X_1,\dots,X_m)\, s_\mu(Y_1,\dots,Y_n) = \prod_{i,j} (1-X_iY_j)^{-1} \ ;$$

c'est là un bel exercice sur les déterminants .

La nouvelle base (s_μ) introduit de nouveaux produits scalaires; les nombres $K_\mu^{\mu'} = \langle h_\mu, s_{\mu'} \rangle$ s'appellent les nombres de Kotzka et satisfont aux relations

(36) $$s_{\mu'} = \sum_\mu K_\mu^{\mu'} k_\mu \qquad , \qquad h_\mu = \sum_{\mu'} K_\mu^{\mu'} s_{\mu'} \ .$$

Quant aux produits scalaires $\langle s_\mu, p_{\mu'} \rangle$, où μ et μ' sont des partages de l'entier n , ce ne sont autres que les valeurs des caractères du groupe S_n (voir le n° 3.2).

2.6. On peut jouer le jeu des q-analogues de deux manières distinctes. Tout d'abord, remplaçons dans une fonction symétrique f chaque indéterminée X_i par q^{i-1} (pour $i \geq 1$) ; on obtient un homomorphisme de l'algèbre F dans l'algèbre $K[[q]]$ qui envoie h_n sur $1/\Phi_n(q)$ pour tout n ; c'est donc l'homomorphisme ev_q défini au n° 1.6 . Les images des s_μ par ev_q ont été baptisées fonctions q-spéciales par Littlewood [8] ; Désarménien a tiré récemment un grand profit de cette méthode dans [19] .

Considérons maintenant le cas où l'anneau de base K est $\underline{\mathbb{Z}}[[q]]$ et définissons de nouvelles fonctions symétriques $h_n(q)$ par la relation

(37) $$\sum_{n\geq 0} h_n(q)u^n = h(u)/h(qu) = \prod_i (1-quX_i)/(1-uX_i) \ .$$

On montre facilement qu'il existe un automorphisme J_q de la bigèbre F transfor-

mant h_n en $h_n(q)$ pour tout n . En particulier, on a $J_q(p_n) = (1-q^n).p_n$. L'opérateur J_q est symétrique, c'est-à-dire qu'il vérifie la relation

$$< J_q(a),b > \; = \; < a,J_q(b) > \qquad (a,b \text{ dans } F) \; ; \tag{38}$$

on définit donc un nouveau produit scalaire symétrique sur F par la formule $< a,b >_q = < J_q^{-1}(a),b >$ qui se réduit à $< a,b >$ par la substitution $q = 0$. Par exemple, si $\mu = 1^{r_1}2^{r_2}\ldots$, on a

$$< p_\mu,p_\mu >_q \; = \; \prod_{i\geq 1} i^{r_i}\, r_i!/(1-q^i)^{r_i} \tag{39}$$

et $< p_\mu,p_{\mu'} >_q = 0$ lorsque μ et μ' sont distincts.

Les <u>fonctions de Littlewood</u> sont les fonctions symétriques $Q_\mu(q)$ à coefficients dans $\underline{Z}[[q]]$ définies par

$$Q_\mu(X_1,\ldots,X_n;q) \; = \; (1-q)^n\Phi_n(q)^{-1} \sum_s s(X_1^{\mu_1}\ldots X_n^{\mu_n} \prod_{i<j} \frac{X_i - qX_j}{X_i - X_j}) \tag{40}$$

la sommation étant étendue aux permutations s de $[n]$, avec les conventions de la formule (33) . Par comparaison avec cette dernière formule , on voit que l'on a $Q_\mu(0) = s_\mu$. De plus, les $Q_\mu(q)$ sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire $< a,b >_q$ et $< Q_\mu(q),Q_\mu(q) >_q$ est égal à $b_\mu(q) = \Phi_{r_1}(q)\ldots\Phi_{r_s}(q)$ lorsque le partage μ est de la forme $1^{r_1}\ldots s^{r_s}$. On montre alors que le quotient

$$P_\mu(q) \; = \; Q_\mu(q)/b_\mu(q)$$

est un polynôme à coefficients entiers en $q,h_1,h_2,\ldots$ Il existe par suite des polynômes $X^\mu_{\mu'}(q)$ à coefficients entiers en q caractérisés par la formule

$$s_{\mu'} \; = \; \sum_\mu \; X^\mu_{\mu'}(q).P_\mu(q) \quad ; \tag{41}$$

ce sont les polynômes que Green a introduit dans l'étude des caractères des groupes finis $GL(n,q)$.

Lorsque l'on fait $q = 0$, $P_\mu(q)$ se réduit à s_μ , alors que pour $q = 1$, il se réduit à k_μ . En particulier, on a $X^\mu_\mu(0) = 1$ et $X^\mu_{\mu'}(0) = 0$ si $\mu \neq \mu'$.

Pour plus de détails, on pourra consulter MacDonald [9] , Green [23] et les articles de Morris et Thomas dans [1] .

§ 3. Applications à la théorie des groupes

3.1. Si G est un groupe fini, on note $R_+(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations du groupe G (de dimension finie sur le corps $\underline{\underline{C}}$ des nombres complexes). Si $u_1,\dots,u_h$ sont les classes des représentations irréductibles de G, tout élément de $R_+(G)$ s'écrit de manière unique sous la forme $c_1.u_1 + \dots + c_h.u_h$ avec des coefficients $c_1,\dots,c_h$ qui sont des entiers positifs, l'addition dans $R_+(G)$ correspondant à la somme directe. Donc $R_+(G)$ se plonge dans le groupe commutatif libre de base $u_1,\dots,u_h$, qu'on note $R(G)$, et qu'on appelle le groupe de Grothendieck des représentations de G. On munit $R(G)$ du produit scalaire pour lequel la base $(u_1,\dots,u_h)$ est orthonormale. Le groupe de Grothendieck $R(G \times G')$ s'identifie de manière naturelle à $R(G) \otimes R(G')$, le produit tensoriel étant pris sur l'anneau $\underline{\underline{Z}}$.

Soit H un sous-groupe de G. Par restriction des représentations de G à H, on définit un homomorphisme Res_H^G de $R(G)$ dans $R(H)$; l'induction au sens de Frobenius et Mackey définit un homomorphisme Ind_H^G de $R(H)$ dans $R(G)$ et l'on a la formule d'adjonction

$$(42) \qquad < \mathrm{Res}_H^G a, b > \; = \; < a, \mathrm{Ind}_H^G b >$$

pour a dans $R(G)$ et b dans $R(H)$ ("réciprocité de Frobenius").

3.2. Considérons maintenant la suite des groupes symétriques S_n, posons $R_n = R(S_n)$ et notons R la somme directe des R_n. Pour $0 \leq m \leq n$, identifions le groupe $S_m \times S_{n-m}$ au sous-groupe de S_n formé des permutations qui appliquent l'intervalle $[m]$ de $[n]$ dans lui-même. Par restriction de S_n à $S_m \times S_{n-m}$, on définit un homomorphisme de R_n dans $R(S_m) \otimes R(S_{n-m})$, et par passage à la somme directe on obtient un homomorphisme m^* de R dans $R \otimes R$. De manière analogue, l'induction de $S_m \times S_{n-m}$ à S_n définit par passage à la somme directe un homomorphisme m de $R \otimes R$ dans R. D'après la formule (42), m et m^* sont en dualité si l'on munit R du produit scalaire pour lequel les R_n sont deux à deux orthogonaux.

La transitivité de l'induction montre que m est la multiplication d'une structure d'anneau commutatif sur R. On montre ensuite, mais c'est plus délicat, que m^* est un homomorphisme d'anneaux de R dans $R \otimes R$: cela dépend du théorème de Mackey sur la décomposition d'une représentation de la forme $\mathrm{Res}_H^G(\mathrm{Ind}_L^G(u))$, où H et L sont des sous-groupes du groupe G et u une représentation de L.

Le point essentiel, explicité pour la première fois par Geissinger dans [1] est que la bigèbre R est isomorphe à la bigèbre F du n° 2.4 . Notons e_n la représentation unité du groupe S_n (dont le caractère est la fonction constante 1). Il est clair qu'on a $< e_n,e_n > = 1$, que les e_n sont deux à deux orthogonaux et que l'on a $m^*(e_n) = e_0 \otimes e_n + e_1 \otimes e_{n-1} + \ldots + e_n \otimes e_0$. Cette information suffit pour calculer les produits scalaires $< e_\mu,e_{\mu'} >$ (avec la convention usuelle pour le monôme e_μ associé au partage μ) . On constate que l'on a

$$< e_\mu,e_{\mu'} > \; = \; < h_\mu,h_{\mu'} >$$

d'où un isomorphisme isométrique de F sur la sous-algèbre R' de R engendrée par les e_n , transformant h_n en e_n ; on note ch l'isomorphisme réciproque de R' sur F et l'on pose $\chi_\mu = \mathrm{ch}^{-1}(s_\mu)$. Alors la famille des χ_μ , où μ parcourt l'ensemble des partages de n , est orthonormale dans R_n ; autrement dit, les χ_μ sont des représentations irréductibles de S_n , et comme leur nombre est égal au nombre des classes de conjugaison de S_n , on a toutes les représentations irréductibles de S_n , d'où $R' = R$. Donc R est isomorphe à F .

3.3. L'isomorphisme $\mathrm{ch} : R_n \longrightarrow F_n$ de groupes commutatifs était connu de Schur et Frobenius. On a par construction $\mathrm{ch}(e_n) = h_n$; si σ_n est l'homomorphisme de signature de S_n , on a $\mathrm{ch}(\sigma_n) = a_n$. D'après la définition des fonctions de Schur, on a la formule

$$\chi_\mu = \det e_{\mu_i-i+j} \tag{43}$$

avec les mêmes notations que dans la formule (32) . Pour effectuer le calcul, on développe d'abord le déterminant en combinaison linéaire des monômes e_μ en les e_n , puis l'on remarque que e_μ est la représentation de S_n associée à l'action de S_n par permutations sur l'ensemble S_n/S_μ , où $S_\mu = S_{\mu_1} \times \ldots . \times S_{\mu_m}$ est considéré de la manière naturelle comme un sous-groupe de S_n . L'automorphisme de dualité dans F qui échange a_n et h_n (voir le n° 2.2) définit une dualité $u \longmapsto u^*$ dans l'ensemble des représentations de S_n ; on a $\chi_\mu^* = \chi_{\mu^*}$ si μ^* est le partage dual du partage μ , et l'on a $u^* = u \otimes \sigma_n$ en général .

Soient u une représentation de S_n et χ son caractère; alors $< u,e_\mu >$ est la moyenne de χ sur le sous-groupe S_μ de S_n , tandis que $< u,p_\mu >$ est la valeur de χ sur la classe de conjugaison des éléments dont les cycles ont pour longueurs $\mu_1,\ldots,\mu_m$.

3.4. Dans sa thèse [20] , Schur a découvert le lien entre les représentations des groupes symétriques S_n et celles des groupes linéaires $GL(n,\underline{C})$. On trouve dans le livre [9] de MacDonald une version (à peine) modernisée, que nous résumons.

Soient K un corps de caractéristique 0 et $\underline{V}$ la catégorie des espaces vectoriels V de dimension finie sur le corps K . Soit u une représentation du groupe S_n , agissant dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\underline{Q}$ (un tel modèle rationnel des représentations du groupe S_n existe toujours d'après les résultats rappelés ci-dessus). On fait agir le groupe S_n sur le produit tensoriel $V^{\otimes n}$ de n espaces vectoriels égaux à V par la règle

$$s(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = x_{s^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes x_{s^{-1}(n)} \quad ,$$

et l'on pose $T^u(V) = \mathrm{Hom}_{S_n}(E,V^{\otimes n})$. Si u est un élément "effectif" de R , c'est-à-dire de la forme $u = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ avec u_j dans $R_+(S_j)$, on pose plus généralement $T^u(V) = T^{u_0}(V) + \dots + T^{u_n}(V)$ (somme directe) .

Alors , pour tout élément effectif u de R , T^u est un foncteur de la catégorie $\underline{V}$ dans elle-même, polynomial au sens suivant: si V et V' sont deux objets de $\underline{V}$, l'application $f \longmapsto T^u(f)$ de $\mathrm{Hom}_K(V,V')$ dans $\mathrm{Hom}_K(T^u(V),T^u(V'))$ est polynomiale. Le théorème fondamental affirme que <u>tout foncteur polynomial de $\underline{V}$ dans $\underline{V}$ est isomorphe à l'un des T^u et un seul</u>.

Les opérations dans la bigèbre R s'interprètent facilement en termes de foncteurs polynomiaux : la somme correspond à la somme directe et le produit au produit tensoriel; quant au coproduit, il se décrit par la formule

$$T^u(V_1 + V_2) = \sum_i T^{u'_i}(V_1) \otimes T^{u''_i}(V_2) \quad , \tag{44}$$

avec $m^*(u) = \sum_i u'_i \otimes u''_i$. La considération de $T^u(V_1 \otimes V_2)$ conduit à un autre homomorphisme de R dans $R \otimes R$ (voir Hoffman [21] et Lascoux [22]). Naturellement , $T^{e_n}(V)$ (resp. $T^{\sigma_n}(V)$) est la puissance symétrique (resp. extérieure) d'ordre n de V . Comme le composé de deux foncteurs polynomiaux est évidemment un foncteur polynomial , on définit une nouvelle opération $u \circ u'$ entre éléments effectifs de R , appelée "plethysm" par Littlewood [8] , caractérisée par la règle

$$T^u \circ u'(V) = T^u(T^{u'}(V)) \quad ; \tag{45}$$

on sait peu de choses sur ces "plethysms" .

Hoffman [21] a récemment donné une nouvelle présentation des λ-anneaux de Grothendieck, où il fait agir toute la structure de R , y compris les "plethysms". Du point de vue topologique, il s'agit de l'étude de $[BU,BU]$ où BU est le clas-

sifiant bien connu de la K-théorie (voir au n° 5.1).

3.5. Zelevinsky [16] a étendu la construction du n° 3.2 au cas des groupes $G_n = GL(n,q)$. Posons $Zh_n = R(G_n)$ et notons Zh la somme directe des Zh_n. On définit sur Zh une structure d'anneau commutatif au moyen du produit $u \circ u'$ de Green [23]: si u est une représentation du groupe G_m et u' une représentation du groupe G_{n-m} (sous l'hypothèse $0 \leq m \leq n$), la représentation $u \circ u'$ de G_n est induite par la représentation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \longmapsto u(a) \otimes u'(c)$$

du sous-groupe $G_{m,n-m}$ de G_n formé des matrices du type précédent, où a est de type (m,m), b est de type (m,n-m) et c de type (n-m,n-m). En utilisant la transitivité de l'induction, on prouve l'associativité de ce produit; la commutativité est plus délicate à établir et résulte d'ailleurs de résultats généraux de Harish-Chandra. Le produit scalaire sur les Zh_n s'étend à Zh ; si Ω_n est l'ensemble des classes de représentations irréductibles de G_n, alors <u>la réunion Ω des Ω_n est une base orthonormale de</u> Zh <u>et les constantes de structure de</u> Zh, <u>définies par la relation</u>

$$u'u'' = \sum_u m(u;u',u'').u \tag{46}$$

<u>pour</u> u,u' <u>et</u> u'' <u>dans Ω, sont des entiers positifs</u>.

Comme Zh est munie d'une multiplication et d'un produit scalaire, on peut définir une comultiplication m* satisfaisant à la relation (27). La propriété fondamentale, reposant sur une généralisation des théorèmes de Mackey déjà cités, est que m* <u>est un homomorphisme d'anneaux de</u> Zh <u>dans</u> $Zh \otimes Zh$.

Zelevinsky a déterminé complètement la structure de la bigèbre Zh, en se servant des propriétés indiquées ci-dessus, qu'il axiomatise avec la notion de PSH-algèbre. Tout d'abord, soit e_n la représentation unité de G_n et soit Zh^u la sous-algèbre de Zh engendrée par les e_n. On définit comme dans le cas du groupe symétrique un isomorphisme de bigèbres $ch^u : Zh^u \longrightarrow F$; si un élément a de Zh satisfait à $< a,a > = 1$, alors a ou -a appartient à Ω et par suite il existe des éléments χ_μ^u de Ω_n, associés aux partages μ de n et caractérisés par la relation $ch^u(\chi_\mu^u) = s_\mu$ (fonction de Schur). Les représentations χ_μ^u de G_n ne sont autres que les représentations qui interviennent dans la décomposition de $e_1^n = \mathrm{Ind}_{B_n}^{G_n} 1$, où B_n est le sous-groupe de G_n formé des matrices trian-

gulaires supérieures; ces représentations sont assez souvent qualifiées d'unipotentes.

Pour qu'une représentation irréductible ϱ de G_m soit un élément primitif de la bigèbre Zh, il faut et il suffit qu'elle soit cuspidale. Soit alors $\Omega_n(\varrho)$ l'ensemble des composants irréductibles de la représentation ϱ^n de G_{mn}, et soit $Zh(\varrho)$ le sous-groupe additif de Zh ayant pour base la réunion des ensembles $\Omega_n(\varrho)$. Comme on a $< \varrho^2, \varrho^2 > = 2$, ϱ^2 est la somme de deux éléments $a_{2,\varrho}$ et $h_{2,\varrho}$ de Ω_{2m}. Zelevinsky construit alors une suite bien déterminée d'éléments $h_{n,\varrho}$ de $\Omega_{nm} \cap Zh(\varrho)$ satisfaisant aux relations

$$m^*(h_{n,\varrho}) = \sum_{0 \leq i \leq n} h_{i,\varrho} \otimes h_{n-i,\varrho} .$$

Le théorème fondamental de Zelevinsky affirme alors que Zh est l'algèbre des polynômes à coefficients entiers en les $h_{n,\varrho}$ pour $n \geq 1$ et ϱ cuspidale.

L'idée initiale de la méthode est due à Faddeev [24] ; elle a été étendue par Nagornyi [25] au cas des autres groupes classiques sur un corps fini.

§ 4. Tableaux de Young

4.1. L'apport de Young à la théorie est essentiellement l'invention des "tableaux" qui donne un contenu combinatoire aux calculs de Frobenius et de Schur. Ces tableaux fournissent un moyen explicite de calculer les fonctions de Schur et en particulier de décomposer le produit de deux fonctions de Schur en combinaison linéaire de fonctions de Schur.

Etant donnés deux partages μ et μ', posons $s_{\mu/\mu'} = i(s_{\mu'})s_\mu$ avec la définition du produit intérieur donnée au n° 2.4 . Par définition, on a donc les relations

$$m^*(s_\mu) = \sum_{\mu'} s_{\mu/\mu'} \otimes s_{\mu'} \tag{47}$$

$$< s_\mu, s_{\mu'}, s_{\mu''} > = < s_{\mu/\mu'}, s_{\mu''} > \tag{48}$$

et le problème de la multiplication des fonctions de Schur est donc ramené à celui de la décomposition des fonctions de Schur généralisées $s_{\mu/\mu'}$. On peut d'ailleurs définir ces fonctions par la formule

$$s_{\mu/\mu'} = \det h_{\mu_i - i + j - \mu'_j} \tag{49}$$

qui généralise la définition (32) des fonctions de Schur s_μ.

La formule précédente montre que l'on a $s_{\mu/\mu'} = 0$ sauf si $D(\mu)$ contient $D(\mu')$, auquel cas on écrit $\mu' \leq \mu$; l'ensemble $D(\mu/\mu') = D(\mu) - D(\mu')$ s'appelle la <u>forme</u> de la fonction de Schur $s_{\mu/\mu'}$.

Interprétons s_μ et $s_{\mu/\mu'}$ comme des séries formelles symétriques en des indéterminées qui parcourent un ensemble X, fini ou infini; munissons X d'une relation d'ordre total. Un <u>tableau de Young de forme</u> $D = D(\mu/\mu')$ est un couple $T = (D,f)$ où f est une application de D dans X qui est croissante le long de chaque ligne de D et strictement croissante le long de chaque colonne de D ; on dira que le tableau T est <u>standard</u> si f est une application bijective, et qu'il est <u>droit</u> si $D(\mu')$ est vide. Voici un exemple:

$X = \{1,2,3,4,5\}$
$\mu = (6,4,3,2)$
$\mu' = (1,1)$

$$T = \begin{array}{cccccc} 5 & 5 & & & & \\ 3 & 4 & 4 & & & \\ & 2 & 2 & 3 & & \\ & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}$$

Dans l'état actuel de nos connaissances, les particules nucléaires se classent en trois familles : leptons, mésons et baryons. Dans le modèle des quarks, on admet qu'un baryon est composé de 3 quarks, et qu'il existe 5 (ou 6 ?) espèces de quarks notées u,d,s,c,b. Les diverses espèces de baryons correspondent alors aux tableaux de Young de forme $\begin{array}{ccc}\cdot & \cdot & \cdot\end{array}$ ou $\begin{array}{cc}\cdot & \cdot \\ \cdot & \end{array}$, l'ensemble X étant l'ensemble des espèces de quarks. Par exemple, le proton se désigne par $\begin{array}{cc} & u \\ d & u \end{array}$ et le neutron par $\begin{array}{cc} & u \\ d & d \end{array}$.

Pour chaque tableau de Young $T = (D,f)$, on peut former le monôme $m(T)$ produit des éléments $f(c)$ situés dans les cases c de D. Littlewood [8] a montré que $s_{\mu/\mu'}$ <u>est égale à la somme de tous les monômes correspondant aux tableaux de forme</u> $D(\mu/\mu')$.

4.2. Lascoux et Schützenberger ont défini dans [26] une opération de redressement des tableaux gauches (de forme $D(\mu/\mu')$), qui ne change pas la valeur d'un monôme $m(T)$. Considérons le monoïde libre M construit sur X, dont les éléments sont les suites $w = x_1 \ldots x_n$ d'éléments de X, appelées <u>mots construits sur l'alphabet</u> X ; un tel mot est dit <u>croissant</u> si l'on a $x_1 \leq \ldots \leq x_n$, et l'on dit que le mot w majore le mot $w' = x'_1 \ldots x'_{n'}$, si l'on a $n \leq n'$ et $x_i > x'_i$ pour i dans $[n]$. Dans un tableau de Young T, chaque ligne est un mot croissant de M, et l'on

note $m^*(T)$ le produit de ces lignes dans M, en commençant par la plus haute et finissant par la plus basse. Naturellement, $m(T)$ est l'image de $m^*(T)$ par l'homomorphisme canonique de M sur le monoïde commutatif libre $\underline{\underline{N}}^{(X)}$ construit sur X; la seule différence entre $m(T)$ et $m^*(T)$ est que l'on tient compte dans $m^*(T)$ de la disposition des lettres dans le tableau de Young T, et que l'on ne se permet pas de modifier l'ordre des lettres.

L'application $T \longmapsto m^*(T)$ est une bijection de l'ensemble des tableaux de Young droits sur une partie M_o de M (remarquer que les diverses lignes d'un tableaux sont coupées par les descentes du mot $m^*(T)$). Par ailleurs, considérons dans M la plus petite relation d'équivalence compatible avec la multiplication et pour laquelle on ait

$$bca \sim bac \qquad \text{lorsque} \quad a < b \leq c$$
$$acb \sim cab \qquad \text{lorsque} \quad a \leq b < c$$

où a,b,c sont des éléments de X. Le monoïde quotient de M par cette relation d'équivalence a été appelé le "monoïde plaxique" par nos auteurs. Ceci étant, toute classe d'équivalence dans M admet un représentant unique dans M_o. On peut donc transporter à l'ensemble des tableaux droits la multiplication du monoïde plaxique. Si T est un tableau "gauche", il existe donc un unique tableau droit T' tel que $m^*(T)$ et $m^*(T')$ soient équivalents dans M ; on dit que T' est le redressé de T. Comme deux mots équivalents ne diffèrent que par l'ordre de leurs lettres, on a $m(T) = m(T')$.

Le redressement de T en T' peut se réaliser explicitement au moyen d'un algorithme simple connu sous le nom de jeu de taquin de Schützenberger.

4.3. Voici deux applications de ce qui précède.

On a tout d'abord la règle de Richardson-Littlewood-Schützenberger : le coefficient $< s_\mu, s_{\mu'}, s_{\mu''} >$ est égal au nombre de paires de tableaux de Young T' et T'' de formes respectives $D(\mu')$ et $D(\mu'')$, dont le produit $T'T''$ calculé par les règles énoncées ci-dessus soit égal à un tableau donné de forme $D(\mu)$; le résultat est indépendant du tableau choisi T de forme $D(\mu)$, et la règle initiale de Richardson et Littlewood supposait que toutes les lettres d'une même ligne de T étaient égales , par exemple

$$T = \begin{array}{cccccc} a & a & a & & & \\ b & b & b & b & & \\ c & c & c & c & c & c \end{array} .$$

Par ailleurs, pour tout partage μ d'un entier positif n, on peut montrer que que le degré f_μ de la représentation irréductible χ_μ de S_n est égal au nombre des tableaux de Young standard de forme $D(\mu)$ en prenant l'alphabet $X = [n]$. Dans un groupe fini, l'ordre est la somme des carrés des degrés des représentations irréductibles, d'où la relation $\Sigma f_\mu^2 = n!$, la sommation étant étendue à tous les partages μ de n. Voici une interprétation combinatoire de cette relation. A toute permutation s dans S_n, on associe un tableau en escalier, dont nous donnons la forme pour $n = 4$

$$\begin{array}{l} s(1) \\ \quad s(2) \\ \quad\quad s(3) \\ \quad\quad\quad s(4) \end{array} \quad .$$

Soit $P(s)$ le tableau standard obtenu par redressement du tableau précédent. Alors l'application $s \longmapsto (P(s),P(s^{-1}))$ est une bijection de S_n sur l'ensemble des paires de tableaux standard de taille n et de même forme (correspondance de Robinson-Schensted-Knuth).

Sur ces sujets, on pourra consulter plusieurs articles de [1], ainsi que Knuth [6].

§ 5. Applications choisies

5.1. Soit BU l'espace classifiant associé à la suite des groupes unitaires $U_n(\underline{\underline{C}})$. Si X est un espace compact, notons $Vect(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels (complexes) de base X ; on le considère comme un monoïde pour l'opération de somme directe. Le groupe des différences du monoïde commutatif $Vect(X)$ est le groupe de Grothendieck $K_o(X)$ bien connu; il s'identifie à l'ensemble $[X,BU \times \underline{\underline{Z}}]$ des classes d'homotopie d'applications continues de X dans $BU \times \underline{\underline{Z}}$. La cohomologie de BU est un anneau de polynômes à coefficients entiers en des éléments $c_1,c_2,\ldots,c_n,\ldots$, où c_n est de dimension $2n$: ce sont les classes de Chern universelles. Si E est un fibré vectoriel de base X, et f l'application continue correspondante de X dans BU, la i-ème classe de Chern $c_i(E)$ de E est par définition $f^*(c_i)$. Comme BU est un H-espace, sa cohomologie est une bigèbre ; elle est isomorphe à la bigèbre considérée au n° 2.4 par un isomorphisme qui applique c_i sur h_i pour tout entier positif i.

Il n'est donc pas étonnant que les calculs de fonctions symétriques jouent un grand rôle dans l'étude des classes de Chern en Topologie et en Géométrie algébrique. Les grassmanniennes sont des approximations de l'espace classifiant BU, et leur cohomologie est étroitement liée à celle de BU. On a plus généralement considéré la cohomologie des variétés de drapeaux et montré comment les variétés de Schubert correspondent aux fonctions de Schur. On consultera là-dessus les exposés de Stanley et Lascoux dans [1] et une note récente de Lascoux [28].

5.2. Dans la classification des groupes formels commutatifs définis sur un anneau K, un groupe particulier W joue un rôle universel. On peut le réaliser comme le groupe des séries formelles de la forme $1 + c_1u + c_2u^2 + \ldots$ pour la multiplication. L'algèbre des fonctions sur W est une algèbre de séries formelles à coefficients dans K en des indéterminées $c_1, c_2, \ldots$; une fois de plus, le coproduit correspondant à la multiplication dans W est donné par $m^*(c_n) = \sum_i c_i \otimes c_{n-i}$, et l'on retrouve donc la bigèbre F. L'autodualité de cette bigèbre correspond au fait que W est isomorphe à son dual (au sens dit "de Cartier"). Les éléments primitifs s'interprètent comme les homomorphismes du groupe formel W dans le groupe formel additif.

Si G est un groupe formel commutatif (défini sur K) et γ une courbe dans G (autrement dit, un morphisme de schémas formels de la droite affine dans G), il existe un unique homomorphisme u de W dans G transformant en γ la courbe $\gamma_o(t) = (1-ut)^{-1}$ de W. Si f est une fonction sur G, alors $f \circ u$ est une fonction sur W, dont la composante de degré n est un élément $\chi_{\gamma,f,n}$ de F_n. Lorsque K est égal à $\underline{\mathbb{Z}}$, on peut interpréter $\chi_{\gamma,f,n}$ comme un caractère du groupe symétrique S_n. Cette construction redonne en particulier celle de Foulkes [27] en prenant pour G le groupe multiplicatif à une variable, et f, γ convenables. Le cas où G est associé à une courbe elliptique est particulièrement intéressant et fournit une vaste généralisation des congruences de Kummer [29].

5.3. Dans l'étude des fluctuations des suites de variables aléatoires, on rencontre une identité due à Baxter [30]

$$P(aP(b)) + P(bP(a)) = P(a)P(b) - P(ab) \tag{50}$$

(P est une application linéaire définie dans une algèbre commutative). J'ai déterminé la structure des algèbres de Baxter universelles dans [31]. Dans le cas d'un générateur, on trouve l'algèbre des séries formelles en une suite d'indéterminées $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ avec l'opérateur

$$Pf(X_1,X_2,\ldots) = \sum_{i\geq 1} f(X_{i+1},X_{i+2},\ldots)$$

(série convergente si f est sans terme constant).

On pourra aussi consulter à ce sujet l'article de Thomas dans [1] .

BIBLIOGRAPHIE

A. Le volume suivant, assez récent, contient un aperçu de la plupart des directions actives de recherche :

[1] D. FOATA (éditeur) - Combinatoire et représentation du groupe symétrique, Lecture Notes in Math. vol. 579, Springer-Verlag, 1977.

B. Ouvrages de référence :

[2] G. ANDREWS - The theory of partitions, Encycl. of Math. vol. 2, Addison-Wesley, 1976.

[3] W. BAILEY - Generalized hypergeometric functions, Cambridge Univ. Press, 1964 (2e édition).

[4] N. BOURBAKI - Algèbre, chapitres 4 à 7, Masson, 1981.

[5] G. JAMES et A. KERBER - The representation theory of the symmetric group, Encycl. of Math. vol. 16, Addison-Wesley, 1981.

[6] D. KNUTH - The art of computer programming, vol. 3 ("Sorting and searching"), Addison-Wesley, 1975.

[7] D. KNUTSON - λ-rings and the representation theory of symmetric groups, Lecture Notes in Math. vol. 380, Springer-Verlag, 1973.

[8] J.E. LITTLEWOOD - The theory fo group characters and matrix representations of groups, Oxford, 1950 (2e édition).

[9] I.G. MACDONALD - Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford University Press, 1979.

[10] P. MACMAHON - Combinatory Analysis, 2 volumes, Cambridge University Press, 1915/16 (réimprimé par Chelsea, 1960).

[11] P. MACMAHON - Collected Papers, vol. 1, M.I.T. Press, 1978.

[12] F. MURNAGHAN - The theory of group representations, Dover Publ., 1963 (réimpression).

[13] G. de B. ROBINSON - Representation theory of the symmetric group, University of Toronto Press, 1961.

[14] H. WEYL - The classical groups, their invariants and representations, Princeton University Press, 1939.

[15] A. YOUNG - Collected Papers, University of Toronto Press, 1977.

[16] A. ZELEVINSKY - Representations of finite classical groups (A Hopf approach), Lecture Notes in Math. vol. 869, Springer-Verlag, 1981.

C. Articles supplémentaires :

Pour le paragraphe 1, voir

[17] D. FOATA et M.P. SCHÜTZENBERGER - Théorie géométrique des polynômes eulériens, Lecture Notes in Math. vol. 138, Springer-Verlag, 1970.

Pour le paragraphe 2, voir :

[18] P. DOUBILET - On the foundations of combinatorial theory VII : Symmetric functions through the theory of distribution and occupancy, Studies in Appl. Math. 51(1972), 377-396.

[19] J. DÉSARMENIEN - Fonctions symétriques associées à des suites classiques de nombres, Annales Sci. E.N.S. 16(1983),

Pour le paragraphe 3, voir :

[20] I. SCHUR - Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen, in Gesammelte Abhandlungen, tome 1, p. 1-70, Springer-Verlag, 1973.

[21] P. HOFFMAN - τ-rings and wreath product representations, Lecture Notes in Math. vol. 746, Springer-Verlag, 1979.

[22] A. LASCOUX - Classes de Chern d'un produit tensoriel, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris t. 286, série A(1978), 385-387.

[23] J. GREEN - The characters of the finite general linear group, Trans. Amer. Math. Soc. 80(1955), 402-447.

[24] D.K. FADDEEV - The complex representations of the general linear group over a finite field, Zapiski Nauchn. LOMI, 46(1974), 64-88.

[25] S.V. NAGORNYI - Complex representations of classical groups over a finite field, Zapiski Nauchn. LOMI, 86(1979), 135-156.

Pour le paragraphe 4, voir :

[26] A. LASCOUX et M.P. SCHÜTZENBERGER - Le monoïde plaxique, in Noncommutative structures in algebra and geometric combinatories, p. 129-156, Quaderni Ricerca Scientifica n° 109, 1981.

Pour le paragraphe 5, voir :

[27] H.O. FOULKES - Eulerian numbers, Newcomb's problem and representations of symmetric groups, Discrete Math. 30(1980), 3-49.

[28] A. LASCOUX - Classes de Chern des variétés de drapeaux, Comptes rendus Acad.

Sci. Paris t. 295, série I(1982), 393-398.

[29] P. CARTIER - Groupes formels, représentations des groupes symétriques et congruences de Kummer, Sém. Théorie des Nombres, Paris 1982-83, à paraître dans Progress in Math., Birkhäuser.

[30] G. BASTER - An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity, Pac. Journ. Math. 10(1960), 731-742.

[31] P. CARTIER - La série génératrice exponentielle, Publication I.R.M.A., Strasbourg, 1972.

Pierre CARTIER
École Polytechnique
Centre de Mathématiques
F-91128 PALAISEAU CEDEX