Astérisque

GÉRARD IOOSS

Modélisation de la transition vers la turbulence

Astérisque, tome 105-106 (1983), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 607, p. 179-197
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1982-1983__25__179_0>

© Société mathématique de France, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
35e année, 1982/83, n°607

Février 1983

MODÉLISATION DE LA TRANSITION VERS LA TURBULENCE

•

par Gérard IOOSS

I. Résultats expérimentaux

Les premières études concernant la turbulence remontent à plus d'un siècle dans la littérature scientifique : Rayleigh (1879), Reynolds (1883). Cela reste néanmoins un gros problème d'actualité où sont impliqués mathématiciens, mécaniciens (y compris météorologues), physiciens, et même chimistes, sans compter les ingénieurs qui doivent l'appréhender tous les jours.

Tous les scientifiques ne s'accordent pas sur une définition de la "Turbulence", il faut toutefois admettre qu'à l'origine ce terme désigne un phénomène hydrodynamique. Commençons l'exposé par la description d'une expérience très classique qui illustre spectaculairement le phénomène de transition vers la turbulence de façon *progressive* (souvent appelé "Turbulence faible"). C'est l'expérience de convection de Rayleigh-Bénard (1901).

On considère une boîte parallélépipédique dont le diamètre des faces horizontales est moins de dix fois égal à la hauteur. Cette boîte contient un liquide visqueux incompressible pour lequel on tient compte de la variation de masse volumique en fonction de la température (eau, mercure, hélium liquide, huile de silicone, etc...). On impose à la paroi inférieure une température supérieure à celle de la paroi supérieure; la différence de ces températures, non dimensionalisée sous la forme du nombre de Rayleigh, constitue le paramètre essentiel du problème. Les autres paramètres dépendent de la forme de la boîte et de la nature du fluide. Dans les expériences on considère des valeurs croissantes du nombre de Rayleigh Ra ce qui provoque un échauffement relatif de particules de fluide situées en-dessous de particules plus froides. Ceci entraîne un phénomène de convection, freiné par la viscosité du milieu. De nouvelles avancées technologiques ont permis très récemment des mesures dont la précision n'a rien de commun avec les expériences antérieures, notamment en ce qui concerne le contrôle des conditions aux limites, les mesures elles-mêmes et leur analyse par ordinateur fournissant par exemple le spectre Fourier d'une quantité mesurée en fonction du temps, ou même l'obtention directe d'une projection d'application de Poincaré [9].

Lorsqu'on augmente Ra, au passage d'une valeur critique $Ra^{(1)}$ le fluide primitivement au repos, se met en mouvement stationnaire - ce qu'on voit à un endroit donné est indépendant de t. Ce mouvement est sous la forme d'une juxtaposition d'un petit nombre de rouleaux d'axes horizontaux, parallèles à un des côtés de la boîte. Selon les valeurs des autres paramètres, il peut encore arriver une autre valeur critique $Ra^{(2)}$ où le mouvement stationnaire a une structure spatiale différente. En tout cas lorsqu'on fait croître Ra, cette convection stationnaire disparaît en $Ra^{(3)}$ et laisse place à une convection périodique dans le temps de fréquence ω_1, bien que les contraintes extérieures soient stationnaires. C'est alors, que la transition vers la turbulence peut prendre des formes très différentes selon le chemin parcouru dans l'espace des paramètres. On a en fait l'une des options suivantes :

Option 1. On obtient une suite (finie)de valeurs critiques $Ra^{(n)}$ telles qu'au passage de ces valeurs se produit un "dédoublement de période" de l'écoulement périodique. On a pu ainsi observer la suite de dédoublements $\omega_1 \to \omega_{1/2} \to \omega_{1/4} \to \omega_{1/8} \to \omega_{1/16}$

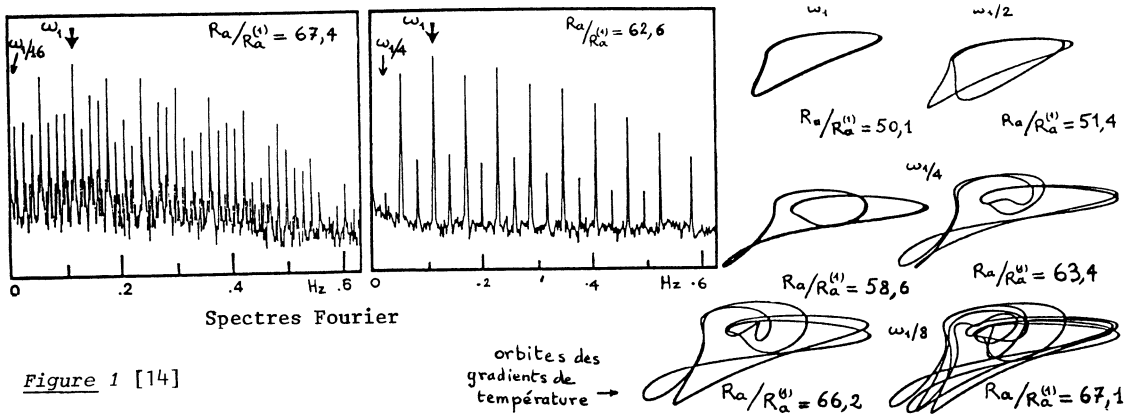


Figure 1 [14]

Les derniers dédoublements sont obtenus pour des valeurs très rapprochées de Ra, réalisant de façon étonnante la suite en progression géométrique prévue par la théorie pour les applications de l'intervalle [8]. Après ces dédoublements on obtient un état chaotique dont on peut dire simplement que le spectre de Fourier d'une observable est continu.

Option 2. On obtient au passage d'une valeur $Ra^{(4)}$ de Ra la disparition de l'écoulement périodique (ω_1), et l'apparition d'un écoulement "quasi-périodique" à 2 fréquences fondamentales ω_1, ω_2, qu'on observe sur le spectre de Fourier d'une observable (ici par exemple la température en un point déterminé).

Option 2.a. Pour des valeurs croissantes de Ra, il se produit une succession d'"accrochages de fréquences", c'est-à-dire que l'écoulement redevient périodique avec une fréquence en rapport rationnel avec ω_1 (ω_1 dépendant aussi des paramètres). Lors d'un dernier "accrochage" se produit alors le phénomène de dédoublements successifs de période décrits à l'option 1. Enfin le chaos s'installe [30](voir fig.2).

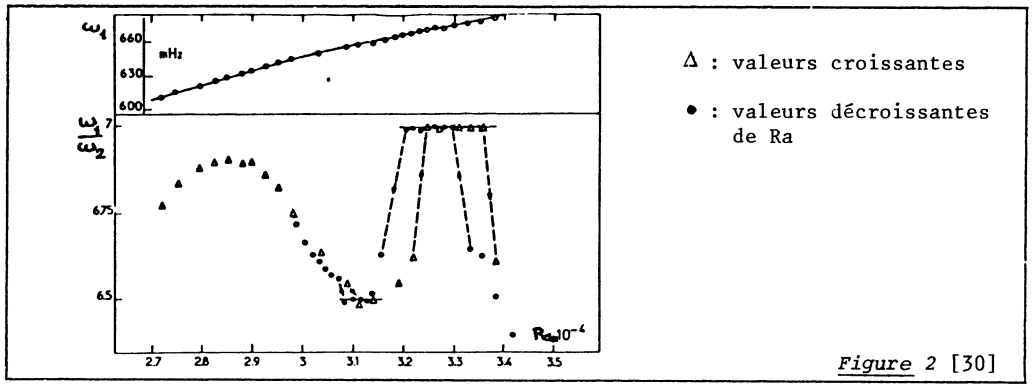
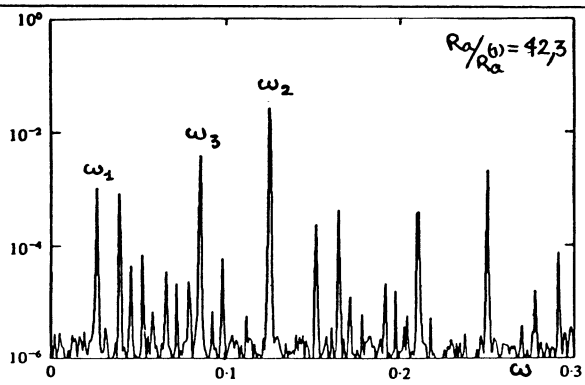


Figure 2 [30]

Option 2.b. Au passage d'une valeur critique $Ra^{(5)}$, une troisième fréquence ω_3 apparaît. Sa mise en évidence n'est pas simple, mais elle ne fait pas de doute pour les expérimentateurs [15](voir figure 3).



ω (Hz)	F (Hz)	σ (Hz)	m_1	m_2	m_3
0·026704	0·026693	0·000005	1	0	0
0·039810	0·039817	0·000002	0	1	−1
0·046183	0·046179	0·000017	0	−1	2
0·053409	0·053386	0·000016	2	0	0
0·066547	0·066510	0·000028	1	1	−1
0·072381	0·072427	0·000037	−2	1	0
0·085991	0·085996	0·000002	0	0	1
0·093232	0·093203	0·000037	2	1	−1
0·099121	0·099120	0·000001	−1	1	0
0·112690	0·112689	0·000072	1	0	1
0·125813	0·125813	0·000001	0	1	0
0·152521	0·152506	0·000009	1	1	0
0·165637	0·165630	0·000008	0	2	−1
0·171985	0·171992	0·000047	0	0	2
0·179197	0·179199	0·000006	2	1	0
0·192336	0·192323	0·000026	1	2	−1
0·198224	0·198240	0·000018	−2	2	0
0·205467	0·205447	0·000074	0	3	−2
0·211805	0·211809	0·000007	0	1	1
0·219048	0·219016	0·000060	2	2	−1
0·251626	0·251626	0·000003	0	2	0
0·278288	0·278319	0·000025	1	2	0
0·291445	0·291443	0·000016	0	3	−1

Figure 3 [15]

ω= fréquences des pics du spectre Fourier
$F = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + m_3 \omega_3$
σ = estimation de l'erreur sur ω.

Cet écoulement à 3 fréquences laisse place, pour des valeurs de Ra très rapprochées, à un état turbulent.

Option 3. Au passage d'une valeur critique $Ra^{(4)}$, l'écoulement périodique laisse la place à un état "intermittent". L'écoulement semble périodique sur un grand nombre de périodes, puis intervient une "bouffée de chaos", elle-même à nouveau suivie par un comportement "périodique" régulier, etc... La durée relative du comportement chaotique devient de plus en plus importante lorsque Ra croît [5](voir figure 4).

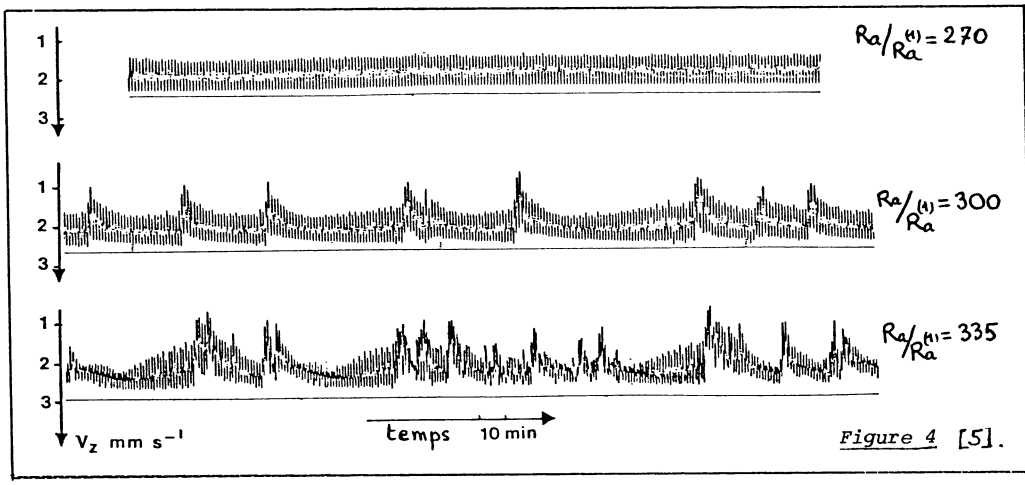


Figure 4 [5].

L'intermittence peut aussi se rencontrer après l'apparition de la deuxième fréquence. L'écoulement semble alors "quasi-périodique" quelques temps avant (et après) des moments où il est chaotique.

Les trois options précédentes pour la transition vers la turbulence se rencontrent dans d'autres exemples en mécanique des fluides, mais ceci ne représente qu'un des aspects de l'établissement de la turbulence. Celle-ci peut arriver de façon brutale lorsqu'on augmente la contrainte (Ra dans l'exemple précédent). D'autre part les phénomènes que nous avons cités plus haut se rencontrent dans d'autres domaines des sciences comme, par exemple, en dynamique chimique avec la fameuse réaction de Belousov-Zhabotinsky [37].

II. Modélisation - Motivation

L'idée qui prévalait jusqu'au début des années 70, due à Landau (1944)[24] et Hopf (1948) [19], consistait à affirmer que la turbulence, quand elle intervient progressivement, pourrait être obtenue par une succession de bifurcations de solutions quasi-périodiques, des équations de Navier-Stokes, dont le nombre de fréquences fondamentales croîtrait avec la contrainte. On se doute déjà, d'après les expériences très fines qui précèdent, que cela a été remis en question. En fait, cette idée a été caduque après l'article de Ruelle et Takens [34] remarquant, d'une part qu'une solution quasi-périodique sur un tore invariant, n'est pas structurellement stable : une petite perturbation du système suffit à la faire disparaître, ce qui est très gênant conceptuellement puisqu'on ne sera jamais sûr d'approcher parfaitement, avec les équations choisies, le système réel. D'autre part, ces auteurs ont montré qu'un état turbulent pouvait correspondre à l'apparition d'un "attracteur étrange" dans l'espace des phases, où un nombre fini de dimensions suffirait à le définir (ceci est déjà réalisable sur un tore de dimension 3).

Cette idée est à la base de la motivation pour l'étude de différents types de comportements chaotiques (robustes par perturbation) obtenus sur des équations différentielles en petite dimension. Avant d'en donner des exemples explicites nous partons du modèle le plus indiscutable a priori, sur lequel il serait idéal de pouvoir démontrer la succession des phénomènes précédents.

Un problème d'hydrodynamique incompressible est régi par le système d'équations aux dérivées partielles de Navier-Stokes dans le domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de l'écoulement, domaine supposé immobile. On a ainsi le système

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + (V\cdot\nabla)V + \nabla p = \nu\,\Delta V + f \\ \nabla\cdot V = o \\ V|_{\partial\Omega} = a \qquad \text{tel que} \quad \int_{\partial\Omega} a\cdot n\, ds = o \end{cases}$$

où $V(x,t)$ désigne la vitesse du fluide en x à l'instant t, $f(x)$ est un champ de vecteurs connu supposé régulier dans Ω (densité massique de forces extérieures), $p(x,t)$ est proportionnel à la pression, a est un champ de vecteurs connu sur la frontière $\partial\Omega$ (par exemple si la frontière est un cylindre, celui-ci peut être animé d'un mouvement de rotation sans que Ω ne change, a est alors la vitesse des points de la frontière), ν est la viscosité cinématique du milieu, ∇ le gradient, $\nabla\cdot$ la divergence, Δ le laplacien.

Le système (1) n'est pas universel; on doit tenir compte par exemple d'effets thermiques dans le problème de Rayleigh-Bénard, d'effets électromagnétiques dans d'autres exemples, etc... Il faut simplement noter que la plupart de ces problèmes

peuvent être mis sous la forme d'une équation différentielle dans un certain espace fonctionnel H :

$$\frac{dX}{dt} = F(\mu, X) \ , \ X(t) \in \mathscr{D} \ , \ \mu \in \mathbb{R}^k . \tag{2}$$

Pour comprendre cet aspect de (1), on commence par considérer un champ de vecteurs W sur Ω tel que $\nabla \cdot W = o$ et $W|_{\partial\Omega} = a$. Ceci est possible de façon régulière [27]. On pose alors $V = U + W$ afin d'obtenir un nouveau système pour U avec des conditions aux limites homogènes. On introduit alors les espaces fonctionnels suivants :

$$H = \{ U \in [L^2(\Omega)]^3 \ ; \ \nabla \cdot U = o, \ U \cdot n|_{\partial\Omega} = o \}$$
$$\mathscr{D} = \{ U \in H \ ; \ U \in [H^2(\Omega)]^3 \ , \ U|_{\partial\Omega} = o \}$$

où $H^m(\Omega)$ est l'espace de Sobolev des fonctions dont les dérivées partielles d'ordres $\leqslant m$ sont de carré intégrable. Un résultat classique [27] est que la projection orthogonale Π_o dans $[L^2(\Omega)]^3$ sur H annule les gradients. On peut alors définir pour $U \in \mathscr{D}$:

$$G(U) = \Pi_o [\nu \Delta U - (W \cdot \nabla) U - (U \cdot \nabla) W - (U \cdot \nabla) U]$$

en effet, pour $U \in \mathscr{D}$, on montre que les quantités entre crochets sont dans $[L^2(\Omega)]^3$ (et même mieux pour la partie quadratique). Si on note maintenant

$X(t) = U(\cdot, t)$, alors (1) prend la forme

$$\frac{dX}{dt} = G(X) + \Pi_o f$$

dans H. Le problème de Cauchy consiste à chercher X continu à valeurs dans $\mathscr{D}$, et dérivable en t à valeurs dans H, la donnée initiale X_o étant donnée dans $\mathscr{D}$.
En fait, il est d'usage de non-dimensionaliser l'équation (1), ce qui fait apparaître un certain nombre de paramètres caractéristiques pour chaque problème, d'où la notation (2) de l'équation où μ représente un paramètre dans $\mathbb{R}^k$.

La difficulté principale au sujet de la résolution de l'équation (2) est commune à tous les problèmes d'évolution régis par des équations aux dérivées partielles : on n'a pas un espace fonctionnel dans lequel on travaillerait comme pour une équation différentielle ordinaire : pour $X(t) \in \mathscr{D}$, $F(\mu, X(t)) \in H$ et $\mathscr{D}$ n'est que dense dans H (métriques hilbertiennes usuelles). La majeure partie des résultats relatifs à la résolution du problème de Cauchy pour (1)-(2) se trouve dans [28] et [36]. Pour ce qui suit nous avons besoin de savoir que (2) a une solution unique dans $\mathscr{D}$, continue sur un intervalle borné en t, et que si cette solution reste bornée dans $\mathscr{D}$ quand t croît, alors elle existe sur $[o, \infty[$. Nous précisons plus loin lorsqu'un résultat supplémentaire de régularité est nécessaire, par rapport au temps, au paramètre et à la donnée initiale, ce type de résultat étant contenu dans [20].

Plusieurs démarches sont alors possibles :

1. Effectuer un calcul direct sur (1), c'est-à-dire utiliser une méthode numérique appropriée - voir par exemple [36], ou pour les écoulements instationnaires, une

méthode de simulation à haute résolution. Il est clair que cela revient à considérer de façon plus ou moins explicite l'équation (2) dans un sous-espace de dimension finie. Celle-ci peut être très élevée : $(256)^3$ dans [6]. Ce type de simulation, pour le problème de la convection de Bénard permet à présent, grâce que énormes progrès récents des capacités de calcul, d'atteindre les régimes chaotiques (mais pas encore dans des conditions comparables aux expériences) [18]. Il faut aussi remarquer que cette démarche est peu satisfaisante pour le mathématicien qui ne sera pas sûr d'approcher la vraie solution de son problème, en considérant la "solution numérique", même si celle-ci est en accord avec l'observation expérimentale. A ce sujet il faut citer un résultat de Foias & Prodi [11] en dimension 2, étendu ensuite à la dimension 3 [12]. Il en résulte une estimation du nombre de modes à considérer dans une méthode de Galerkin (ce qui correspond à la dimension du système différentiel qu'on résout). Ce nombre est lié au comportement quand $n \to \infty$ des valeurs propres (ordonnées) λ_n du problème de Stokes linéaire :

$$\begin{aligned} &\Delta U + \nabla q + \lambda U = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ &\nabla \cdot U = 0 \\ &U|_{\partial\Omega} = 0 \end{aligned}$$

Si Ω est de dimension 3 le nombre de modes est de l'ordre du cube du nombre correspondant en dimension 2 (pour un diamètre comparable). Cette dimension minimale garantit simplement le fait que si l'on projette la solution $X(t)$ sur le sous-espace de dimension finie, alors le comportement de la projection $P_n X(t)$, quand $t \to \infty$, donne des indications précises sur le comportement de $X(t)$: si $P_n X(t)$ tend vers une constante, ou une fonction périodique, ou quasi-périodique, alors $X(t)$ a aussi cette propriété. Malheureusement, ce résultat ne résout pas la question du lien entre les comportements quand $t \to \infty$ de la solution du problème approché (celle qu'on calcule) et celui de la vraie solution (ou de sa projection).

2. La démarche précédente étant limitée, on peut alors se contenter d'étudier certaines situations où plusieurs modes instables interagissent au voisinage de la perte de stabilité d'une solution stationnaire ou périodique. La multiplicité des paramètres dans les problèmes physiques rend ce genre de situation fréquente. Pour fixer les idées, un exemple d'une telle situation est le suivant :

- on suppose que $\mu \in \mathbb{R}^k$, que $F(o,X_o) = 0$ et que $D_X F(o,X_o)$ ait un spectre constitué de n valeurs propres sur l'axe des imaginaires, les autres valeurs propres étant de parties réelles $< o$ (on sait que le spectre de cet opérateur linéaire, à résolvante compacte, est constitué de valeurs propres isolées de multiplicités finies situées dans un secteur du plan complexe contenant l'axe réel $< o$ [23]. Alors pour μ voisin de o dans $\mathbb{R}^k$, la dynamique du problème est attirée au voisinage de X_o par celle sur une "variété centrale" $\mathcal{W}_\mu$ de dimension finie (somme des multiplicités des n valeurs propres

sur l'axe des imaginaires en $\mu = o$). Cette variété centrale dépend de μ régulièrement, en $\mu = o$ elle est tangente à la somme directe des sous-espaces invariants relatifs aux valeurs propres de partie réelle nulle. Si les trajectoires restent au voisinage de 0 (celui-ci est fixé indépendamment de $|\mu|$), alors on voit que l'on a obtenu un problème décrit par un champ de vecteurs en dimension finie, de façon rigoureuse. Nous revenons sur ce point plus loin avec des exemples qui fournissent des modèles de transition vers une dynamique chaotique.

Ce type de démarche peut encore se faire à partir d'une orbite périodique de (2), en considérant une application de Poincaré : on coupe l'orbite en un point par un hyperplan transverse et on considère l'application de premier retour des trajectoires au voisinage de ce point. La possibilité de construire une telle application dans un hyperplan affine de $\mathscr{D}$ nécessite un résultat de régularité par rapport à t de l'opérateur non linéaire résolvant le problème de Cauchy pour (2). En fait, la dépendance en t est analytique sur l'intervalle d'existence de la solution (voir la référence historique [13] et pour une démonstration plus courte et élémentaire [20]). Ainsi le problème se réduit à l'étude de la dynamique des itérés d'un point initial par une application régulière dans un hyperplan de $\mathscr{D}$, ayant un point fixe. On peut montrer que le spectre de l'opérateur linéaire dérivé au point fixe est constitué seulement de valeurs propres isolées de multiplicités finies, sauf peut-être 0. Alors, en jouant sur le paramètre $\mu \in \mathbb{R}^k$ on peut imaginer des situations voisines de celle où pour $\mu = o$, n valeurs propres se trouvent sur le cercle unité, les autres étant de modules <1. De façon analogue à la situation décrite pour les champs de vecteurs, le problème se réduit sur une variété centrale de dimension finie à l'étude au voisinage de 0 d'une famille d'applications dépendant de μ et à la dynamique des itérés des points de ce voisinage.

On a obtenu une démarche rigoureuse pour obtenir des systèmes dynamiques en dimension finie (champs de vecteurs ou applications), mais on paie cela en imposant de rester au voisinage de 0 (on donne des exemples plus loin).

3. Si l'on veut enfin se démarquer de la contrainte précédente, il faut se résoudre à ne comprendre les comportements des solutions de (2) que qualitativement, en imaginant des modèles, en petite dimension, qui reproduisent les phénomènes observés. C'est la démarche de loin la plus usitée, avec, il faut le souligner, un très grand succès.

Avant d'aborder les exemples, précisons qu'on dit que la dynamique est chaotique si on a une dépendance sensible par rapport aux conditions initiales : pour tout choix initial X_o, une petite erreur δX_o se propage exponentiellement au moins pendant un temps (ou un nombre d'itérations) tel que les orbites se séparent de façon significa-

tive (on dit que l'état avenir est non prévisible à long terme, cf. exemples en météorologie). Enfin, précisons que l'expérimentateur est seulement intéressé par le chaos "*visible*". Il est donc nécessaire que l'attracteur où la dynamique est chaotique ne soit pas trop petit en un sens à préciser. Un exemple bien connu est celui de la dynamique du fer à cheval [26] où l'on montre une telle dynamique chaotique sur un ensemble de mesure nulle (produit de 2 Cantor).

III. Exemples

1. Modèles de Lorenz et de Hénon

Lorenz [29] a obtenu après une troncature sévère, ne gardant que 3 modes d'une méthode du type Galerkin, pour le problème de convection de Rayleigh-Bénard, le système suivant :

$$(3) \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_3 + r x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - b x_3 , \end{cases}$$

où les paramètres sont pris tels que $\sigma=10$, $b = 8/3$ et où $r = 1$ correspond à $Ra^{(1)}$ de la théorie (perte de stabilité de 0). Ce système possède une bifurcation de Hopf inverse pour $r \cong 24{,}74$ lors de la perte de stabilité des deux points fixes symétriques $(\pm\sqrt{b(r-1)}\ , \pm\sqrt{b(r-1)}\ , r-1)$. Pour $r = 28$ Lorenz a obtenu un attracteur (devenu célèbre 12 ans après!) qui malheureusement n'a pas de rapport qualitatif avec les expériences, mais qui a une dynamique chaotique. L'étude qualitative d'un modèle géométrique du champ de vecteurs (3) est dans [38].

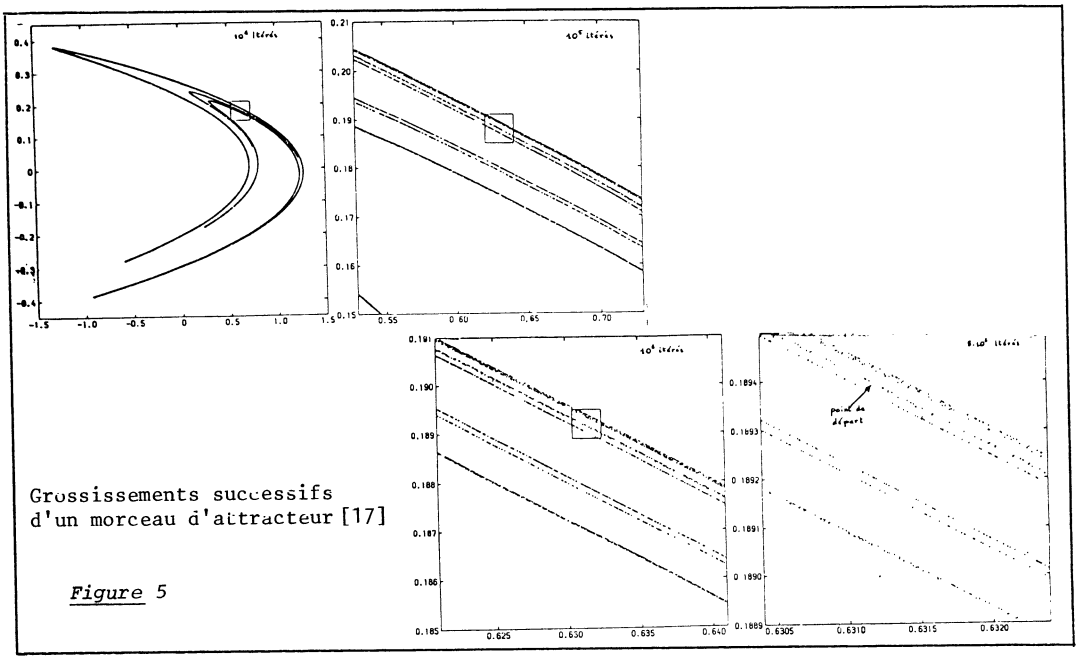
En étudiant la dynamique de l'attracteur obtenu pour des valeurs de r voisines de 220 (une orbite périodique s'épaissit) Pomeau et Ibañez isolent un comportement dynamique qui donne à Hénon la source du modèle quadratique maintenant classique [17]. Il s'agit du difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$(4) \qquad (x,y) \longmapsto (y, 1-ay^2+bx) .$$

Pour $a = 1{,}4$ et $b = o{,}3$, en itérant 10^5 fois un point quelconque, on obtient ce qu'il est convenu d'appeler "l'Attracteur de Hénon".

Il n'est pas démontré que ce qui est vu sur la figure 5 soit un "attracteur étrange" (les itérés pourraient converger vers une orbite périodique). Dans le cas présent on montre la présence d'une dynamique de fer à cheval, ce qui implique du chaos, mais pas nécessairement "visible", puisque de support de mesure nulle. Le fait remarquable ici est une conjecture, consistant à supposer que l'on aît un attracteur.

voir Fig.5
page suivante :



Grossissements successifs d'un morceau d'attracteur [17]

Figure 5

2. Dédoublements d'orbites

On a vu que certaines expériences de transition vers la turbulence montrent une suite de dédoublements d'orbites. Ce phénomène peut s'observer sur les exemples suivants.

En **dynamique des populations**, un type de modèle très usité, dû à Volterra, est le suivant :

$$\dot{x}_i=(\gamma_i-\sum_j \nu_{ij}\, x_j)x_i \ , \quad i=1,\dots,n \ ,$$

où les γ_i et ν_{ij} sont des paramètres. En dimension 3, sans trop restreindre la généralité on peut l'écrire sous la forme [1]

$$\dot{x}_i= \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}(1-x_j)x_i \ , \ i=1,2,3 \ ,$$

en prenant un point fixe en $(1,1,1)$. Si on prend des coefficients $\alpha_{ij}(\mu)$ tels que

$$(\alpha_{ij}(\mu)) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,1 \\ -0,5 & -0,1 & 0,1 \\ \mu & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$$

alors quand μ croît le point fixe subit une bifurcation de Hopf vers un cycle périodique, puis ce cycle se dédouble successivement un grand nombre de fois jusqu'en $\mu \cong 1,43$. Cet exemple fournit un moyen pour essayer de comprendre ce qui doit arriver pour des valeurs de μ supérieures. On ne peut prouver l'existence d'un "attracteur étrange" mais la dynamique s'inspire de celle qui a lieu au voisinage d'une orbite homoclinique dans le cadre d'application d'un résultat de Shil'nikov [35] qui affirme que si l'orbite homoclinique (dimension 3) est relative a un foyer-col tel que la répulsivité du col est supérieure à l'attractivité du foyer (sur la variété stable de dimension 2), alors tout voisinage de l'orbite homoclinique contient un ensemble dénombrable d'orbites périodiques instables (de type col). De plus, la dynamique (chaotique)

au voisinage d'une telle orbite homoclinique [35] est celle d'un décalage sur les suites bi-infinies à une infinité de symboles (plus compliqué que le fer à cheval où l'on n'a que 2 symboles). Le malheur est qu'on ne sait toujours pas si c'est ce qu'on voit! même numériquement. Néanmoins ce résultat est la source de nombreux modèles de comportement chaotique [2].

Un autre exemple intéressant est celui du **pendule de longueur variable** [10], amorti $(k>0)$:
$$\ddot{\theta} + \omega^2(1+2\mu\cos t)\sin\theta + k\,\dot{\theta} = 0.$$
C'est un problème en dimension 3, et l'on peut considérer l'application de Poincaré consistant à regarder $(\theta,\dot{\theta})$ pour $t = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Pour μ petit $\theta = 0$ est stable. En considérant $\omega = 1/2$, $k = o,2$ alors en $\mu = 1/4$ une solution périodique apparaît puis, lorsque μ croît, on assiste à des dédoublements successifs et pour $\mu = 3/2$ la solution est chaotique (observée numériquement).

Ces deux exemples sont frustrants, puisqu'on n'est pas capable de prouver l'existence d'une suite infinie(?) de dédoublements, bien que l'on constate l'analogie avec les résultats expérimentaux de l'option 1 décrite au §I. Le seul exemple où l'on soit sûr de l'existence de cette suite, et même de l'existence d'un chaos "visible" est du type suivant : il s'agit de la famille d'applications (non inversibles) de $[o,1]$ dans $[o,1] = x \longmapsto r\,x(1-x)$ où r varie de o à 4. Un aperçu des résultats à ce sujet se trouve dans [8] et [31] (voir aussi [25]). L'un des faits remarquables est que si l'on note $\{r_n\}$ la suite des valeurs critiques de r où apparait le dédoublement vers une orbite périodique de 2^n points alors $r_n - r_{n-1}/r_{n+1} - r_n \to 4{,}669$ ...

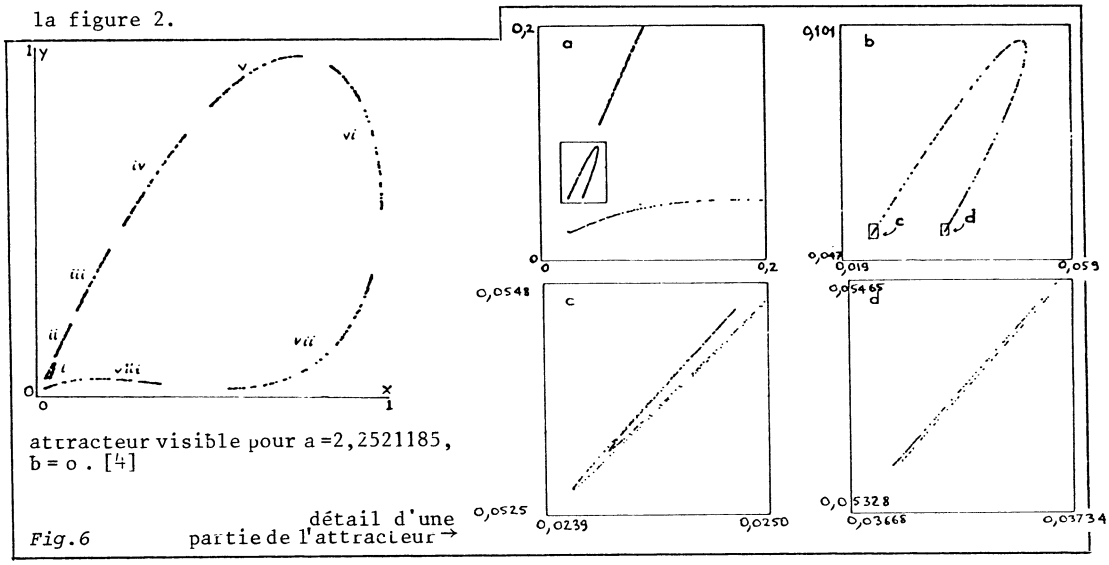
Les expérimentateurs voyant quelques dédoublements sont tentés de "vérifier" un tel résultat dans leur cas. Le fait encore plus remarquable que le précédent est que l'accord soit bon bien que l'on soit en dimension infinie, et que l'on ne puisse vérifier cela que pour 3 ou 4 bifurcations successives ! (pour [14] on obtient 4,3).

3. Illustration de l'option 2.a (accrochages et dédoublements)

La transition vers la turbulence correspondant à l'option 2a a pu récemment être obtenue [4] de façon remarquablement fidèle par l'étude d'une famille d'applications du plan, de la forme $F_{ab} : (x,y) \longmapsto (y+bx,\ ay(1-x))$. (On voit facilement que le point fixe $(a-1/a,\ (1-b)(a-1)/a)$ est attractif pour $a<2$, $o<b<1$. Si a traverse la valeur 2, on a une bifurcation de Hopf vers un cercle invariant, comme l'indique la théorie classique [21]. Si $b = o$, on passe par une racine $6^{\text{ième}}$ de l'unité, mais si l'on suit le chemin $b = o$ dans l'espace des paramètres, on ne rentre pas dans la corne de résonance faible associée à cette racine [3]. Le système entre donc dans

les cornes de résonances voisines, ayant à chaque fois une orbite périodique attractive située sur le cercle invariant, le nombre de rotations de F_{ao} sur le cercle étant rationnel. Jusque là, rien de chaotique.

En faisant croître a de 2 à 2,27, le calcul numérique montre un attracteur n'ayant rien d'extraordinaire, étant constitué pour certaines valeurs de a, d'un petit nombre de points périodiques. Pour a voisin de 2,27 on aperçoit néanmoins une structure de style "fractal" (figure 6). D'autre part, quand on fait varier a on s'aperçoit que certains points périodiques persistent en compétition avec d'autres de période différente, avec des phénomènes d'hystérésis, qui rappellent les résultats expérimentaux de la figure 2.

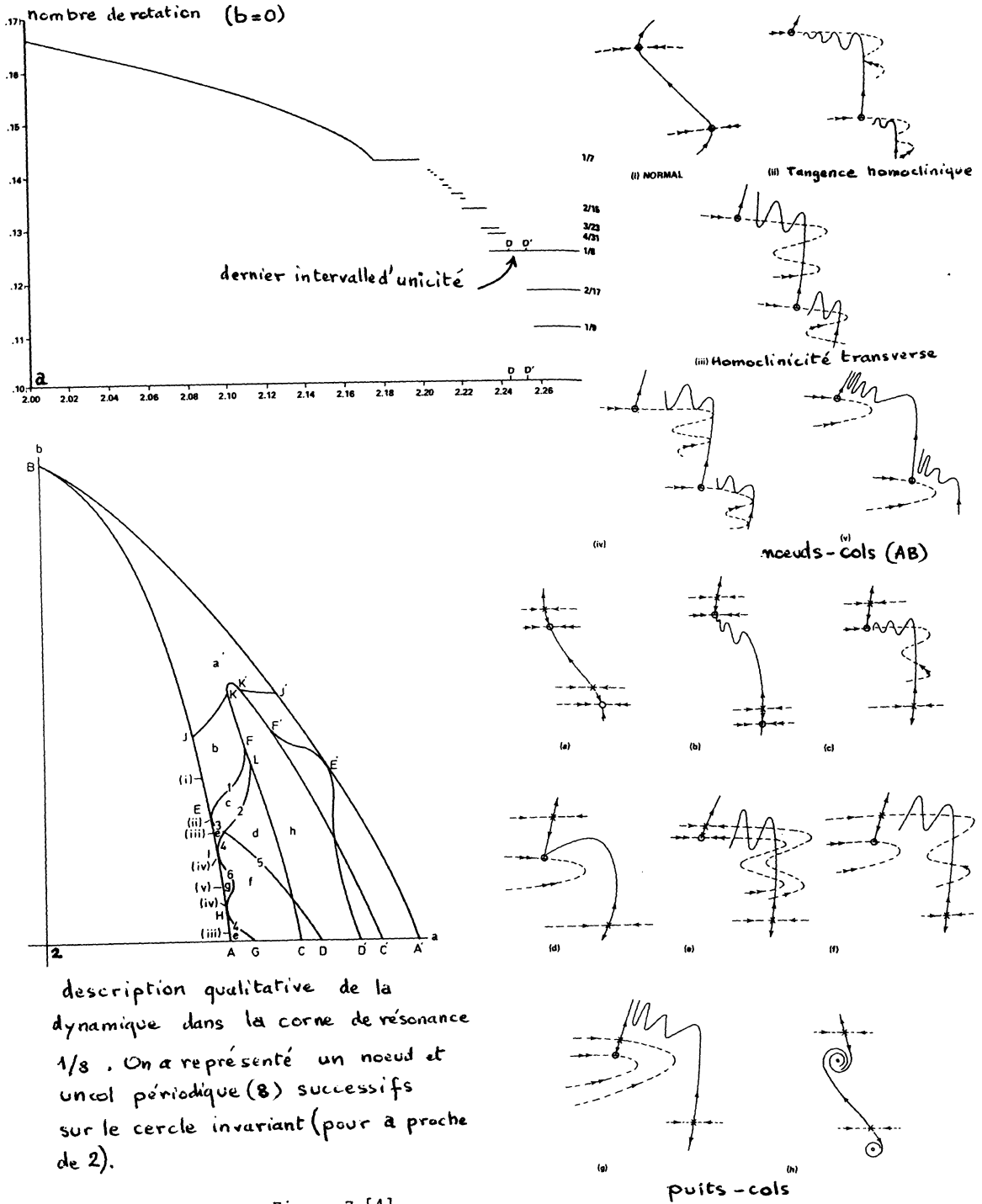


attracteur visible pour a =2,2521185, b = o . [4]

détail d'une partie de l'attracteur →

Fig.6

En étudiant d'un peu plus près une région "d'accrochage de fréquence", c'est-à-dire un intervalle de valeurs de a où l'on a une orbite périodique de période p, on observe le phénomène de dédoublements successifs de cette orbite, une zone qui semble chaotique, puis un retour en sens inverse vers une orbite périodique p. L'interprétation donnée par les auteurs [4] de ces phénomènes se résume à la figure 7. Il semble que l'on assiste à une alternance de création de points hétérocliniques et homocliniques transverses, ce qui induit une dynamique chaotique de fer à cheval, et au voisinage de la tangence homoclinique, l'existence d'une infinité de puits périodiques [32]. Enfin, au milieu d'un intervalle d' "accrochage" on observe une dynamique du type "modèle de Hénon".



description qualitative de la dynamique dans la corne de résonance 1/8. On a représenté un noeud et un col périodique (8) successifs sur le cercle invariant (pour a proche de 2).

Figure 7 [4]

4. Illustration de l'option 2.b (création d'une $3^{\text{ième}}$ fréquence)

On est naturellement conduit à envisager l'apparition de cette $3^{\text{ième}}$ fréquence comme une traduction de l'existence d'un tore invariant de dimension 3. Celui-ci ne peut pas apparaître génériquement par bifurcation à partir d'un tore invariant de dimension 2 qui perdrait son attractivité normale. En effet, si on considère une section de Poincaré, le problème se ramène au cas étudié au 3. Des conditions pour obtenir une bifurcation de tore T^2 en tore T^3 sont données dans [22] ou [21](chp.VI), il y est clair que cela n'est pas réalisé en général.

L'idée est alors de provoquer l'existence d'un tote T^3 en considérant des bifurcations très rapprochées dans l'espace des paramètres. C'est la motivation qui préside à certains problèmes de bifurcations de codimension 2. Un exemple pour les champs de vecteurs est fourni qualitativement dans [16] et il existe toute une classe d'exemples analogues pour les applications. Considérons par exemple une application de $\mathbb{R}^3 : X \longmapsto F_\mu(X)$ où $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$, et F est assez régulière. On suppose que $F_\circ(0) = 0$ et que l'opérateur linéaire $T_\circ = D_X F_\circ(0)$ a comme valeurs propres $\lambda_\circ = e^{i\omega_\circ}, \overline{\lambda}_\circ$ et -1, avec $k\omega_\circ \notin 2\pi\mathbb{N}$ pour $k = 1,2,3,4,5,6$. Ce type d'application intervient lorsqu'une famille d'orbites périodiques de champs autonomes a 3 multiplicateurs de Floquet sortant du disque unité pour des valeurs voisines du paramètre. Il suffit de considérer la dynamique réduite à une variété centrale pour obtenir F_μ, qui a un point fixe supposé en 0. On peut alors normaliser cette application par des changements de variables non linéaires au voisinage de 0, pour arriver à la forme suivante(*) pour $F_\mu : (x,y,\theta) \longmapsto (X,Y,\Theta)$ dans $\mathbb{R}^2 \times T^1$

$$\begin{cases} X = -x(1+\mu_1) + x^3 - a\,x\,y^2 + \mathscr{X}(x,y,\theta,\mu_1,\mu_2) \\ Y = \ \ y(1+\mu_2) + b\,x^2 y + y^3 + \mathscr{Y}(x,y,\theta,\mu_1,\mu_2) \\ \Theta = \theta + \omega_\circ + \epsilon + b_1\,x^2 + c_1\,y^2 + \mathscr{U}(x,y,\theta,\mu_1,\mu_2) \end{cases}$$

où $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$, $\mathscr{U}$ sont d'ordre supérieur à ce qui précède et peuvent être estimés de façon précise. Si l'on considère l'application tronquée NF_μ où l'on ne garde que les termes jusqu'à l'ordre 5 en x,y dans X et Y, et l'ordre 4 dans Θ, alors la partie angulaire se découple de la partie en x,y (la dépendance en θ n'arrive qu'à l'ordre 6). Pour l'application NF_μ il est facile de démontrer l'existence de bifurcations de cercles invariants, qui eux-mêmes bifurquent en un couple de cercles s'échangeant par F_μ. Ceux-ci peuvent même bifurquer en un couple de tores T^2 invariants par NF_μ. Dès que l'on perturbe NF_μ en rajoutant tous les termes de F_μ, on ne peut montrer la persistance du tore T^2 qu'à l'extérieur d'un petit voisinage du point de bifurcation déterminé précédemment (ceci se fait dès qu'une attractivité normale suffisante est obtenue pour le tore invariant par NF_μ). La taille de ce voisinage est très petite et il est

(*) *On a délibérément choisi l'un des 4 cas possibles pour le choix des signes.*

vraisemblable que des expériences numériques au hasard ne le voient pas. Ceci pourrait expliquer le fait qu'on observe ce type de tore dans les expériences, sans voir de chaos avant (noter qu'un tore T^2 invariant pour une application de Poincaré correspond à un tore T^3 invariant pour un champ de vecteurs). Un autre fait remarquable et général pour le type d'exemples considérés se traduit ici par la propriété suivante : en faisant un changement d'échelle de la forme $x=\tau\bar{x}$, $y=\tau\bar{y}$, $\mu_1=\tau^2$, $\bar{\mu}_2=\bar{\mu}\tau^2$, alors l'application $\bar{F}_{\tau\bar{\mu}}$ prend une forme telle qu'on ait $\bar{F}^2_{\tau\bar{\mu}}=(\bar{x},\bar{y},\theta)\longmapsto(\bar{X},\bar{Y},\Theta)$

avec $(\bar{X},\bar{Y})=\Phi_{\tau\bar{\mu}}(\bar{x},\bar{y})+0(\tau^6)$

où $\Phi_{\tau\mu}$ est "l'application temps τ^2" du champ de vecteurs

$$\begin{cases}\dot{x}=x-x^3+a\,x\,y^2+\tau^2 f_1(x,y,\bar{\mu})\\ \dot{y}=\bar{\mu}\,y+b\,x^2y+y^3+\tau^2 g_1(x,y,\bar{\mu})\end{cases}$$

Pour $\bar{\mu}_h=(b+1)(a-1)^{-1}$ et $\tau=0$, ce champ est intégrable.

Pour $\tau\neq 0$ et $\bar{\mu}$ passant par $\bar{\mu}_h$ on peut avoir la succession de situations décrites à la figure 8 pour le champ de vecteurs, c'est-à-dire aussi pour $\Phi_{\tau\bar{\mu}}$. Quand on perturbe ces situations en considérant l'application $\bar{F}_{\tau\bar{\mu}}$, alors les seuls problèmes résolus $[21]_2$ sont

a) le passage de *6* à *5* : bifurcation de Hopf d'un point périodique de période 2 vers un couple de cercles qui s'échangent par $\bar{F}_{\tau\bar{\mu}}$, puis persistance de ce couple de cercles quand ils grossissent,

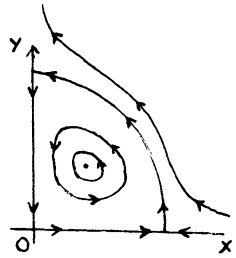
b) la persistance du couple de tores T^2(*4*) qui s'échangent par $\bar{F}_{\tau\bar{\mu}}$, dès qu'on est en dehors d'un voisinage de $\bar{\mu}_h$(situation *3*).

<u>*Les problèmes ouverts*</u> sont: ***a)***-l'étude de la dynamique au passage de *1* à *2* (un cercle "bifurquant" en un couple de cercles qui s'échangent), ***b)***-l'étude du voisinage de $\bar{\mu}_h$ (situation *3*), ***c)***- l'étude du passage de *5* à *4* (bifurcation d'un cercle en un tore T^2 invariant par l'application $\bar{F}^2_{\tau\bar{\mu}}$).

On s'attend à une dynamique chaotique dans chacune de ces situations, sans pour cela être sûr que ce chaos serait "visible", puisque par exemple la perturbation de la situation *3*, pour une application en dimension 2 crée en général une hétéroclinicité transverse, créatrice d'une dynamique de fer à cheval.

Il faut noter qu'une des difficultés à laquelle on se heurte, est de même nature que celle résolue par Chenciner [7], qui considère un problème de codimension 2 au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégénérée.

voir Fig.8
page suivante :



Champ intégrable pour $\overline{\mu} = \overline{\mu}_h$.

Intégrale : $H = \frac{x^p y^q}{q}\left(1 - x^2 + \frac{a-1}{b+1} y^2\right)$

$$p = -2\frac{b+1}{1+ab}, \quad q = \frac{2(a-1)}{1+ab}.$$

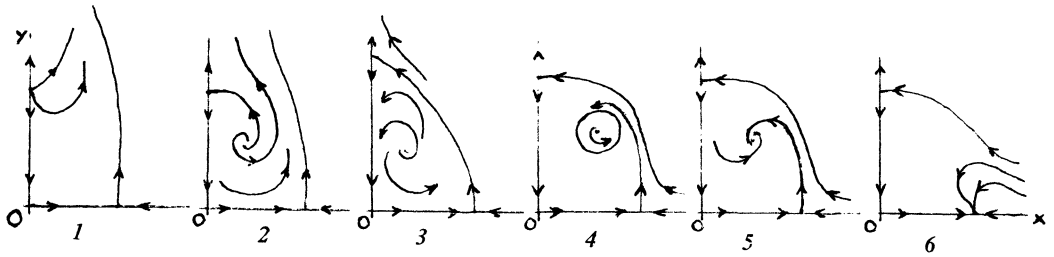
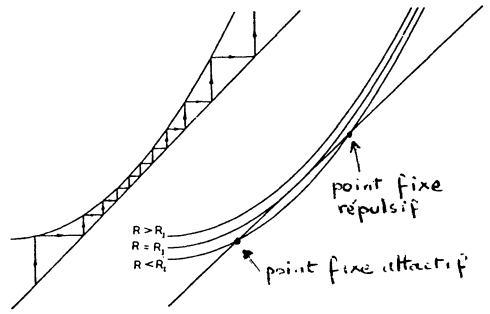


Figure 8 $ab < -1$, $b > 0$, $a < 0$.
(Compléter par symétrie)

5. Illustration de l'option 3

Récemment Pomeau et Manneville [33] on donné un modèle très séduisant pour l'intermittence qui succède à une solution périodique. Considérant l'application de Poincaré, cela revient à supposer que le point fixe, correspondant à l'orbite périodique, disparaît par bifurcation noeud-col, inverse. Cette orbite rencontrerait donc une orbite de stabilité opposée. Ce phénomène a été constaté sur le modèle de Lorenz (3) [33] au voisinage de la valeur $r = 166{,}07$ qui correspond à un noeud-col de solutions périodiques. Mathématiquement cela revient à constater qu'au voisinage de cette valeur critique, du côté où il n'y a plus de point fixe pour l'application de Poincaré, alors les itérés d'un point vont néanmoins rester longtemps (i.e. pour un grand nombre d'itérés) au voisinage du "fantôme" du point fixe. Ensuite, les effets non linéaires sont tels qu'ils ramènent un itéré d'ordre plus élevé au voisinage de ce point et le phénomène apparemment régulier reprend pour un grand nombre d'itérés (figure 9).
Dans les cas où l'intermittence succède à une solution quasipériodique, on peut penser au voisinage d'un noeud-col de tores invariants. En fait la dynamique est beaucoup plus délicate, et c'est le sujet en particulier de l'étude de Chenciner [7] sans toutefois entrer dans la région "intermittente" pour les paramètres.



Dynamique sur la variété centrale (dim 1) au voisinage du "fantôme" du point fixe.

Figure 9

Il faut enfin noter qu'on pourrait de même avoir des possibilités "d'intermittence" pour les bifurcations sous-critiques, lors d'une perte de stabilité d'orbite périodique, c'est-à-dire lorsque l'ensemble bifurqué existe seulement pour les valeurs du paramètre où il est répulsif. Il n'y a encore pas eu à ma connaissance d'étude systématique sur le sujet.

•

Bibliographie

[1] **A.Arnéodo, P.Coullet, C.Tresser,** *Occurence of strange attractors in three-dimensional Volterra equations,* Phys.Lett. 79A, 4, 259, (1980)

[2] **A.Arnéodo, P.Coullet, C.Tresser,** *Oscillators with chaotic behavior,* J.Stat.Phys., 27,1, 171, (1982)

[3] **V.Arnold,** Chapitres supplémentaires *de la Théorie des Equations Différentielles ordinaires,* MIR, Moscou, (1980)

[4] **D.G.Aronson, M.A.Chory, G.R.Hall, R.P.Mc Gehee,** *Bifurcations from an invariant circle for two-parameter families of maps of the plane,* Comm.Math.Phys. 83, 303, (1982)

[5] **P.Bergé, M.Dubois, P.Manneville, Y.Pomeau,** *Intermittency in Rayleigh-Bénard convection,* J. de Phys. Lettres 41, L341, (1980)

[6] **M.Brachet, D.Meiron, S.Orszag, B.Nickel, R.Morf, U.Frisch,** J.Fluid.Mech.,(1982), (à paraître)

[7] **A.Chenciner,** *Bifurcations de difféomorphismes de $\mathbb{R}^2$, au voisinage d'un point fixe elliptique. Chaotic behavior of deterministic systems,* Les Houches Summer school 1981, North Holland, (à paraître)

[8] **P.Collet, J.P.Eckmann,** *Iterated maps on the interval as dynamical systems,* P. Ph 1, Birkhaüser, Boston, 1980

[9] **M.Dubois, P.Bergé, V.Croquette,** *Study of non steady convective regimes using Poincaré sections,* J.de Phys.Lettres 43, L295, (1982)

[10] **J.P.Eckmann,** *Route to chaos with special emphasis on period doubling. Chaotic behavior of deterministic systems,* Les Houches Summer school 1981, North Holland, (à paraître)

[11] **C.Foias, G.Prodi,** Rend. Sem. Math., Univ. Padova 39, 1, (1967)

[12] **C.Foias,** O.P. Manley, R. Témam, I.M. Trèves, *Number of modes governing two-dimensional viscous incompressible flows,* Phys. Rev. Lett., 50, 14, p. 1031-1034, 1983.

[13] **H.Fujita, T.Kato,** *On the Navier-Stokes initial value problem I,* Arch. Rat. Mech. Anal. 16, 4 , 269, (1964)

[14] **M.Giglio, S.Musazzi, U.Perini,** *Transition to chaos via a well ordered sequence of period doubling bifurcations,* Phys.Rev.Lett. 47, 243, (1981)

[15] **J.P.Gollub, S.V.Benson,** *Many routes to turbulent convection,* J.Fluid Mech.,100, 3, 449, (1980)

[16] **J.Guckenheimer,** *On a codimension two bifurcation,* Dynamical Systems and Turbulence, p.99, Lecture Notes in Math., 898, Springer Verlag, 1981

[17] **M.Hénon, Y.Pomeau,** *Two strange attractors with a simple structure,* Turbulence and Navier Stokes equations, Orsay 1975, Lecture Notes in Math 565, (1976)

[18] J.H. Curry, J.R. Herring, J. Loncaric, S.A. Orszag, *Order and disorder in two and three dimensional Bénard convection,* (preprint).

[19] **E.Hopf,** *A mathematical example displaying features of turbulence,* Comm. Pure & Appl. Math. 1, 303, (1948)

[20] **G.Iooss,** *Sur la deuxième bifurcation d'une solution stationnaire de systèmes du type Navier-Stokes, partie II,* Arch.Rat.Mech.Anal. 64, 339, (1977)

[21] **G.Iooss,** *Bifurcation of maps and applications,* North Holland Math.Studies 36, Amsterdam, 1979

[21]$_2$ **G.Iooss**, *Persistance d'un cercle invariant par une application voisine de "l'application temps τ" d'un champ de vecteurs intégrable (I&II)*, CR.Ac.Sci.Paris A, 1982 (à paraître)

[22] **A.Chenciner, G.Iooss**, *Bifurcations de tores invariants*, Arch.Rat.Mech.Anal, 69, 2, 109-198 et 71, 301-306, (1979)

[23] **V.I.Iudovich**, *On the stability of steady flows of a viscous incompressible fluid*, D.A.N. SSSR, 161, 5, 1037, (1965)

[24] **L.Landau, E.Lifchitz**, *Mécanique des fluides*, p.131-132, MIR, Moscou 1971

[25] **O.E.Lanford III**, *Smooth transformations of intervals*, Séminaire Bourbaki, n°563, 1980

[26] **O.E.Lanford III**, *Introduction to the mathematical theory of dynamical systems, Chaotic behavior of deterministic systems*, Les Houches Summer school 1981, North Holland (à paraître)

[27] **O.A.Ladyzhenskaya**, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon & Breach (2nd ed.), New York 1969

[28] **O.A.Ladyzhenskaya**, *Mathematical analysis of Navier-Stokes equations for incompressible liquids*, Annual Rev. Fluid Mech. 7, 249, (1975)

[29] **E.N.Lorenz**, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atm. Sci. 20, 130, (1963)

[30] **J.Maurer, A.Libchaber**, *Rayleigh-Bénard experiment in liquid helium; frequency locking and the onset of turbulence*, J. de Phys.Lettres 40, L419, (1979)

[31] **M.Misiurewicz**, *Maps of an internal. Chaotic behavior of deterministic systems*, Les Houches Summer school 1981, North Holland, (à paraître)

[32] **S.E.Newhouse**, *The creation of non-trivial recurrence in the dynamics of diffeomorphisms. Chaotic behavior of deterministic systems*, Les Houches Summer school 1981, North Holland (à paraître)

[33] **Y.Pomeau, P.Manneville**, *Intermittency and the Lorenz model*, Physics Lett. 75A, 1, (1979)

[34] **D.Ruelle, F.Takens**, *On the nature of turbulence*, Comm. Math. Phys., 20, 167-192, (1971)

[35] **L.P.Shil'nikov**, Sov.Math.Dokl., 6, 163, (1965), et Mat.USSR, Sb.10, 91, (1970)

[36] **R.Témam**, *Navier-Stokes equations*, North Holland, Amsterdam, 1977

[37] **C.Vidal, A.Pacault (éd.)**, *Nonlinear phenomena in chemical dynamics*, Springer Series in Synergetics 12, Springer Verlag, (1981)

[38] **R.F. Williams**, *The structure of Lorenz attractors*, Turbulence seminar, Berkeley 1976-77, Lecture Notes in Math. 615, p.94, (1977).

Gérard IOOSS

Université de Nice
Institut de Mathématiques
Parc Valrose
F-06034 NICE CEDEX