

Astérisque

ADRIEN DOUADY

Noeuds et structures de contact en dimension 3

Astérisque, tome 105-106 (1983), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 604, p. 129-148

[<http://www.numdam.org/item?id=SB_1982-1983__25__129_0>](http://www.numdam.org/item?id=SB_1982-1983__25__129_0)

© Société mathématique de France, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOEUDS ET STRUCTURES DE CONTACT

EN DIMENSION 3

[d'après Daniel Bennequin]

par Adrien DOUADY

0. Contexte

Au siècle dernier, Darboux a montré que les structures symplectiques sur les variétés de dimension paire, les structures de contact sur les variétés de dimension impaire, n'ont pas d'invariants locaux. En 1953, Chern a posé le problème de la classification sur une variété donnée.

Pour les variétés compactes, Gray a démontré la stabilité en 1959 (chaque classe d'isomorphie est ouverte). Lutz (Thèse 1971) a montré l'existence d'une structure de contact dans chaque classe d'homotopie de champs de plans sur S^3 . Lutz et Martinet ont montré l'existence d'une structure de contact sur chaque variété orientable de dimension 3. Thurston et Winkelnkemper ont donné une autre démonstration de ce fait.

C'est Gromov qui a débloqué la question pour les variétés ouvertes. Dans sa thèse (1969), il donne la classification à homotopie près des structures de contact et des structures symplectiques. Arnold et Gromov ont posé la question de la classification à isomorphisme près, et notamment de l'existence sur $\mathbb{R}^n$ de structures de contact (pour n impair) ou symplectiques (pour n pair) exotiques. En dimension 3, des candidats pour un contre-exemple ont été proposés, notamment par Erlandsson. Ils comportent la figure de la page 04. Dans sa thèse (novembre 1982), Daniel Bennequin montre que cette figure ne peut pas apparaître dans la structure de contact standard. Ce résultat repose sur l'inégalité $\tau(\gamma) < 0$ pour γ courbe F_0 -horizontale non nouée. Cette inégalité avait été conjecturée par Thurston, et une démonstration incomplète en a été donnée par Erlandsson en 1981, par une approche différente de celle de Bennequin. Eliashberg a annoncé des résultats similaires, ainsi que le fait (question posée par Arnold et Gromov) que les difféomorphismes préservant une structure symplectique ou de contact forment un fermé dans l'ensemble des difféomorphismes d'une variété M pour la topologie C^0 . L'inéga-

lité plus précise de Bennequin a son importance propre en théorie des noeuds.

Le texte qui suit est un concentré de la thèse de Bennequin.

1. Structures de contact (en dimension 3)

Soient M une variété de dimension 3. Un système de Pfaff F , ou champ différentiable de plans sur M associe de façon C^∞ à chaque point m de M un plan F_m dans l'espace tangent $T_m M$. Si F est transversalement orientable, F est le noyau d'une forme différentielle α de degré 1. Pour que F soit le champ des plans tangents à un feuilletage de dimension 2, il faut et il suffit que $\alpha \wedge d\alpha = 0$ (Théorème de Frobenius). On dit que F est une structure de contact si, au contraire, la forme $\alpha \wedge d\alpha$ de degré 3 ne s'annule en aucun point de M . Cette propriété ne dépend que de F , et non du choix de α . On dit que α est une forme de contact si $F = \text{Ker } \alpha$ est une structure de contact, i.e. si $\alpha \wedge d\alpha$ ne s'annule en aucun point.

Exemples.— 1) Sur $\mathbb{R}^3$, la structure de contact standard F_0 est définie par $dz + xdy - ydx = 0$, ce qui en coordonnées semi-polaires s'écrit $dz + \rho^2 d\theta = 0$.

2) Sur S^3 , considérée comme sphère unité de $\mathbb{C}^2$, on définit la structure de contact $\hat{F}_0$ orthogonale à la fibration de Hopf en associant à chaque point m le plan orthogonal à $i.m$ dans $T_m S^3$.

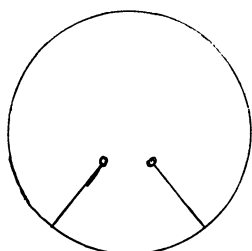
3) Soit $(q_1, q_2, p_1, p_2) \mapsto H(q, p)$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^4$ telle que $p_1 \partial H / \partial p_1 + p_2 \partial H / \partial p_2 > 0$ pour $p \neq 0$, et soit $E \in \mathbb{R}$. Alors $M = \{(q, p) \in \mathbb{R}^4 - (0 \times \mathbb{R}^2) \mid H(q, p) = E\}$ est une variété lisse de dimension 3 et la forme de Liouville $\lambda = p_1 dq_1 + p_2 dq_2$ induit sur M une forme de contact. D'où l'intérêt des structures de contact en mécanique.

On dit que deux systèmes de Pfaff F et F' sur M (ou sur deux variétés M et M') sont isomorphes s'il existe un difféomorphisme de M (sur M') transformant F en F' .

Exemples.— 1) La structure de contact F'_0 définie sur $\mathbb{R}^3$ par $dz = xdy$ est isomorphe à la structure standard par $(x, y, z) \mapsto (2y, x, z + xy)$. On est confronté aux propriétés de F'_0 chaque fois que l'on essaye de garer sa voiture, x désignant la tangente de l'angle que fait la voiture avec le bord du trottoir, y et z les coordonnées du pont arrière.

2) Soit $m_0 \in S^3$. On peut montrer que la structure de contact induite sur $S^3 - \{m_0\}$ est isomorphe à la structure standard (cf. [4]).

3) Pour toute structure de contact F sur une variété M de dimension 3 et tout point $m \in M$, il existe un voisinage U de m dans M tel que $F|_U$ soit isomorphe à la structure de



contact standard sur $\mathbb{R}^3$ (Théorème de Darboux).

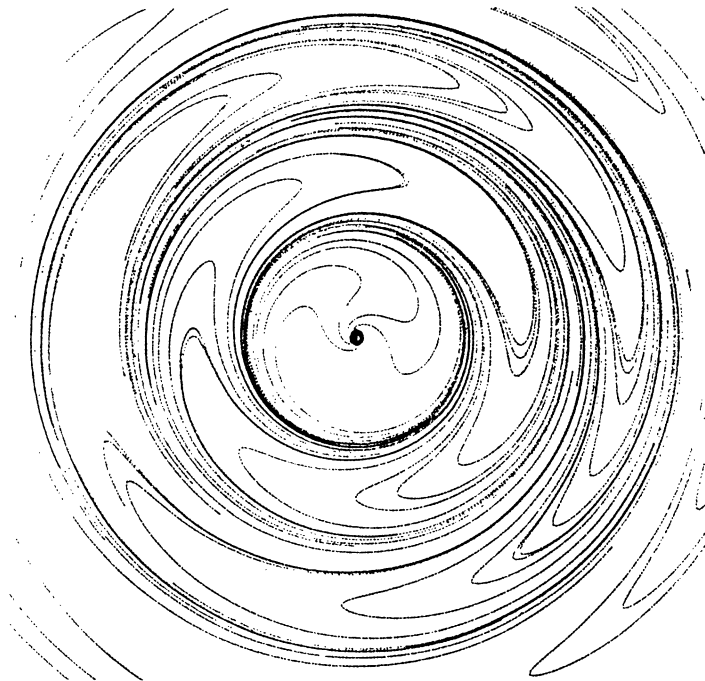
Un des résultats frappants de la thèse de Bennequin est l'existence d'une structure de contact sur $\mathbb{R}^3$ non isomorphe à la structure standard.

Soit M une variété de dimension 3, F un système de Pfaff sur M et V une surface plongée dans M . On appelle *point critique* de V relativement à F tout point m de V tel que $T_m V = F_m$. Sur $V - A$, où A est l'ensemble de ces points critiques, F induit un champ différentiable de droites, d'où un feuilletage F_V de $V - A$ en courbes. Si V est orientée, les feuilles de F_V sont les trajectoires d'un champ de vecteurs $\eta_{F,V}$ tel que $\eta_{F,V} \lrcorner \sigma = \alpha|_V$, en notant σ une 2-forme définissant l'orientation de V .

On peut construire sur $\mathbb{R}^3$ (ou sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$ difféomorphe à $\mathbb{R}^3$) une structure de contact F et un disque plongé V tel que le feuilletage F_V sur $V - A$ ait une feuille fermée. Bennequin montre que ceci n'est pas possible avec la structure standard F_0 ; par suite F n'est pas isomorphe à F_0 .

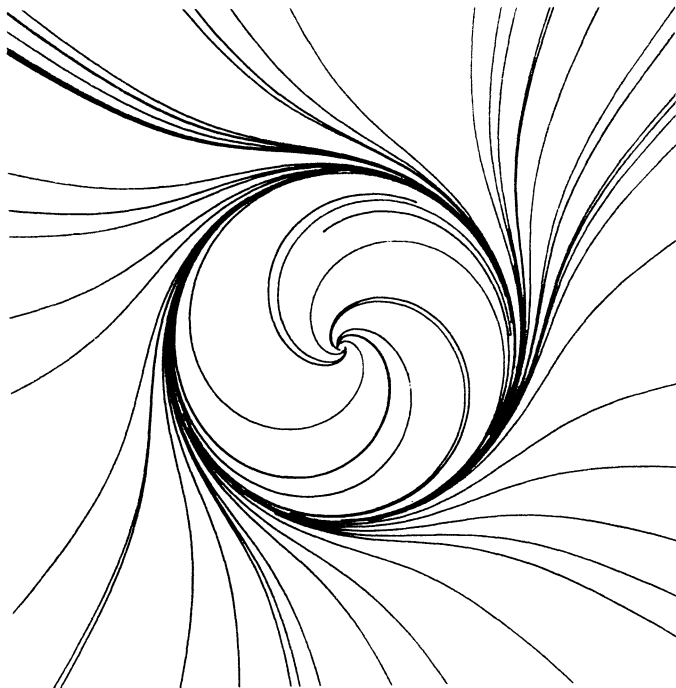
2. Structures de contact donnant une courbe fermée sur un disque plongé

Voici un exemple, donné par Erlandsson : sur $\mathbb{R}^3$, la forme $\alpha = \rho \sin \rho d\theta + \cos \rho dz$ est une forme de contact. En effet $\alpha \wedge d\alpha = \left(1 + \frac{\sin \rho \cos \rho}{\rho}\right) dx \wedge dy \wedge dz$. Le feuilletage induit sur le paraboloïde $z = \rho^2$ a l'allure suivante :



En voici un autre : soit F le système de Pfaff défini sur $\mathbb{R}^3$ par la forme $\beta = (z\rho^2 - \rho^4)d\vartheta + dz$. On a $\beta \wedge d\beta = (4\rho^2 - 2z)dx \wedge dy \wedge dz$. Pour tout $c \in \mathbb{R}$ notons P_c le parabolôïde d'équation $z = 2\rho^2 + c$. La forme β est une forme de contact sur chacune des composantes connexes U_+ et U_- de $\mathbb{R}^3 - P_0$, et les ouverts U_+ et U_- sont difféomorphes à $\mathbb{R}^3$.

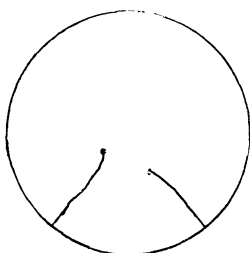
La forme induite sur P_c s'écrit $4\rho d\rho - (\rho^4 + c\rho^2)d\vartheta$. Le seul point critique est le sommet de P_c , et le feuilletage F_{P_c} a pour équation $d\rho = \frac{c\rho + \rho^3}{4} d\vartheta$. Pour $c < 0$, il a l'allure suivante :



En particulier le cercle $\rho^2 + c = 0$ est une feuille fermée.

Ce dernier exemple a un certain caractère générique. Soient en effet U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et β une forme différentielle de degré 1 sur U ne s'annulant en aucun point. Notons ω la forme $dx \wedge dy \wedge dz$, définissons $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ par $\beta \wedge d\beta = h\omega$, supposons que h s'annule transversalement sur une surface V_0 et posons $V(\lambda) = h^{-1}(\lambda)$. La forme β définit une structure de contact F sur $U - V_0$. Supposons que V_0 ait un point critique non dégénéré a_0 relativement à

F . On a alors une courbe Γ paramétrée par $\lambda \mapsto a_\lambda$, avec a_λ point critique de $V(\lambda)$. Un calcul montre que $\text{div } \eta_{F, V(\lambda)}$ s'annule en a_0 , avec une dérivée non nulle le long de Γ . Si



F_{V_0} a des trajectoires spiralant vers a_0 , la famille des $F_{V(\lambda)}$ présente une bifurcation de Hopf, donc on aura des trajectoires fermées d'un côté ou de l'autre de V_0 . Il existe un voisinage U' de a_0 dans U tel que $U' - V_0$ ait deux composantes difféomorphes à $\mathbb{R}^3$, et que $V(\lambda) \cap U'$ soit un disque plongé pour λ voisin de 0.

3. Invariants attachés à une courbe tangente à F

Soit F un système de Pfaff sur $\mathbb{R}^3$, et choisissons une forme α telle que $F = \text{Ker } \alpha$, ce qui munit F d'une orientation transverse et par suite d'une orientation. Une courbe γ de classe C^1 est dite *tangente* à F , ou *F-horizontale* si $T_x \gamma \subset F_x$ pour tout $x \in \gamma$. Si F est une structure de contact, toute courbe peut être approchée au sens C^0 par des courbes F-horizontales.

Soit ξ un champ de vecteurs continu sur $\mathbb{R}^3$, prenant ses valeurs dans F et ne s'annulant en aucun point. Si γ est une courbe orientée F-horizontale, on appelle *enroulement* de γ dans F et on note $\mu_F(\gamma)$ ou simplement $\mu(\gamma)$ le degré de l'application $x \mapsto \text{angle}(\xi(x), T_x \gamma)$ de γ dans S^1 . Ce nombre ne dépend pas du choix de ξ .

Si γ et γ' sont deux courbes fermées orientées plongées dans $\mathbb{R}^3$ de façon disjointe, on note $L(\gamma, \gamma')$ le *nombre d'enlacement* de γ et γ' : c'est le nombre d'intersection de γ' avec V si V est une surface compacte orientée immergée de bord γ . On a $L(\gamma', \gamma) = L(\gamma, \gamma')$.

Soit γ une courbe orientée F-horizontale et notons $\gamma + \varepsilon V$ une courbe obtenue en déplaçant légèrement γ suivant sa normale directe dans F . On appelle *autoenlacement* de γ dans F et on note $\tau_F(\gamma)$ ou $\tau(\gamma)$ le nombre $L(\gamma, \gamma + \varepsilon V)$.

Si F est la structure de contact standard sur $\mathbb{R}^3$, ou plus généralement si α est de la forme $dz + udx + vdy$, on peut lire $\mu(\gamma)$ et $\tau(\gamma)$ sur la projection $\pi(\gamma)$ de γ sur le plan des x, y : $\mu(\gamma)$ est l'enroulement de la courbe immergée $\pi(\gamma)$ (degré de l'immersion), et $\tau(\gamma)$ s'obtient en comptant les croisements avec les signes suivants :



4. Invariants attachés à une courbe transverse à F

Soit F un système de Pfaff sur $\mathbb{R}^3$, choisissons α telle que $F = \text{Ker } \alpha$ et soit γ une courbe de classe C^1 orientée. On dit que γ est *ascendante*

(resp. *descendante*) si α induit sur γ une forme > 0 (resp. < 0) en tout point.

Notons encore ξ un champ de vecteurs continu sur $\mathbb{R}^3$, à valeurs dans F et ne s'annulant en aucun point. Si γ est une courbe transverse à F , on note $\ell_F(\gamma)$ le nombre $L(\gamma, \gamma + \varepsilon \xi)$. Ce nombre ne dépend pas du choix de ξ .

Exemple.— Soit V une courbe $\mathbb{C}$ -analytique au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^2$, ayant en 0 une singularité isolée. Identifions S^3 à une sphère de centre 0 et de rayon petit dans $\mathbb{C}^2$, munissons S^3 de la structure de contact $\hat{F}_0$ orthogonale à la fibration de Hopf, posons $\gamma = V \cap S^3$ et soit m le nombre de Milnor. On a alors

$$\ell_{\hat{F}_0}(\gamma) = m - 1 \quad ([1], \text{Prop. 5.7.1}).$$

PROPOSITION 1 ([1], 3.5.5).— *Supposons que F soit une structure de contact, avec $\alpha \wedge d\alpha > 0$, et soit γ une courbe orientée tangente à F . Alors $\gamma + \varepsilon V$ est descendante, $\gamma - \varepsilon V$ est ascendante, et on a*

$$\ell_F(\gamma + \varepsilon V) = \tau_F(\gamma) + \mu(\gamma) \quad ; \quad \ell_F(\gamma - \varepsilon V) = \tau_F(\gamma) - \mu(\gamma) .$$

Soit V une surface orientée et α un point critique isolé de V relativement à F . L'indice $i(\alpha)$ est l'indice d'annulation en α du champ de vecteurs $\eta_{V,F}$; l'indice tordu $\tilde{i}(\alpha)$ est $i(\alpha)$ si les orientations de $T_\alpha V$ et F_α coïncident, $-i(\alpha)$ si elles sont opposées.

PROPOSITION 2 ([1], Th. 4.4.4).— *Soient γ une courbe orientée ascendante et V une surface orientée plongée telle que $\partial V = \gamma$, ayant par rapport à F des points critiques isolés $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. On a alors*

$$\ell_F(\gamma) = -\sum \tilde{i}(\alpha_j) .$$

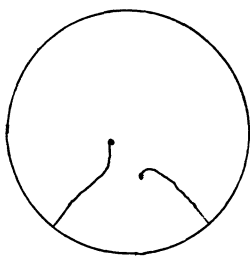
Remarque.— Cette formule est à rapprocher de celle de Poincaré, qui donne la caractéristique d'Euler de V :

$$\chi(V) = \sum i(\alpha_j) .$$

5. Tresses

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de la structure de contact standard F_0 définie par $\rho^2 d\theta + dz$. Le cercle S^1 paramétré par $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0)$ est une courbe ascendante. On appelle *tresse fermée* toute courbe fermée orientée plongée dans $\mathbb{R}^3$, évitant l'axe Oz , sur laquelle $\theta' = d\theta/dt$ est > 0 . Notons A le tore plein formé des points dont la distance à S^1 est $\leq 1/4$, et $\underline{T}(A)$ l'ensemble des tresses fermées autour de Oz contenues dans $\mathring{A}$ et satisfaisant à

$d\rho^2 + dz^2 \leq 1/4 d\theta^2$. Toute tresse fermée appartenant à $\underline{T}(A)$ est ascendante. Toute tresse fermée ascendante est isotope parmi les tresses fermées ascendantes à un élément de $\underline{T}(A)$.



A une tresse fermée γ , on associe les invariants suivants : le nombre de brins $n(\gamma)$ est le degré de la projection $\gamma \rightarrow S^1$, et la *longueur algébrique* $c(\gamma)$ est le nombre de croisements de la projection de γ sur le plan des x, y , comptés avec les signes indiqués au n° 3.

PROPOSITION 3.— Soit γ une tresse fermée ascendante. On a $\ell_{F_0}(\gamma) = c(\gamma) - n(\gamma)$.

Démonstration.— Soient r un champ radial à partir de Oz , par exemple $r(x, y, z) = (x, y, 0)$, et ξ un champ ne s'annulant pas à valeurs dans F_0 , par exemple $\xi(x, y, z) = (1, 0, y)$; on a $c(\gamma) = L(\gamma, \gamma + \varepsilon r)$ et $L(\gamma, \gamma + \varepsilon r) - L(\gamma, \gamma + \varepsilon \xi)$ est le degré de $m \mapsto \text{angle}(\xi(m), r(m))$, qui vaut $n(\gamma)$.

THÉORÈME 1.— Toute courbe ascendante relativement à F_0 est isotope parmi les courbes ascendantes à une tresse fermée ascendante.

Démonstration.— Soit Γ une courbe compacte orientée et $\iota : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$ un plongement F_0 -ascendant d'image γ . On peut supposer que γ évite l'axe Oz , ce qui permet de décrire ι par $t \mapsto (\rho(t), \vartheta(t), z(t))$, que ϑ' et z' ne s'annulent qu'en un nombre fini de points de Γ , et que la projection de γ sur le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$ des (ϑ, z) est une immersion à croisements transverses. On ne peut avoir $\vartheta' \leq 0$ qu'en un point où $z' > 0$. Parmi les composantes connexes de $\{t \in \Gamma \mid z'(t) \geq 0\}$, notons $J_1, \dots, J_{k(\gamma)}$ celles qui contiennent un point où $\vartheta' < 0$. Nous allons construire un plongement ascendant $\iota' : t \mapsto (\rho'(t), \vartheta'(t), z'(t))$ de Γ dans $\mathbb{R}^3$, évitant Oz , isotope à ι parmi les plongements ascendants n'évitant pas nécessairement Oz , avec $z'(t) = z(t)$ et $k(\gamma') = k(\gamma) - 1$.

Cela se fait en deux temps :

1) Préparation : Vu de l'axe Oz en projection sur $S^1 \times \mathbb{R}$, les croisements de J_1 en un point où $\vartheta' < 0$ avec un arc J' de γ situé devant sont de l'un des trois types suivants (on note t le point de J et t' le point de J') :

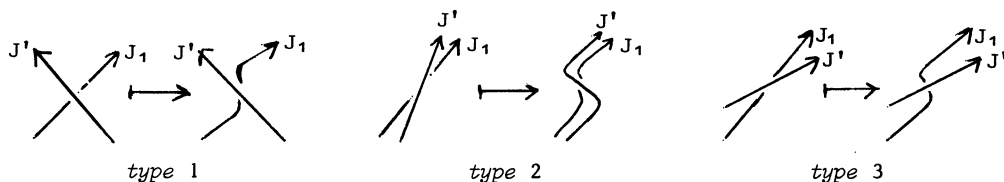
type 1 : $\vartheta'(t') > 0$ et $\frac{z'}{\vartheta'}(t') > \frac{z'}{\vartheta'}(t)$;

type 2 : $\vartheta'(t') < 0$ et $\frac{z'}{\vartheta'}(t') < \frac{z'}{\vartheta'}(t)$;

type 3 : $\vartheta'(t') < 0$ et $\frac{z'}{\vartheta'}(t') > \frac{z'}{\vartheta'}(t)$.

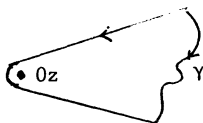
En effet le cas $\vartheta'(t') > 0$ et $\frac{z'}{\vartheta'}(t') < \frac{z'}{\vartheta'}(t)$ est impossible.

On les supprime en modifiant γ d'après la recette suivante :



On peut encore s'arranger pour que $\rho' = 0$ aux points où $\vartheta' = 0$.

2) Action : Chaque composante connexe de l'ensemble des $t \in J_1$ où $\Theta' \leq 0$ est maintenant un arc qu'on peut faire passer derrière l'axe Oz sans rencontrer γ :



Cela ne fait qu'augmenter $z' + xy' - yx'$. Comme ces mouvements ont lieu dans des tranches d'altitude disjointes, on peut les faire simultanément.

En répétant cette opération $k(\gamma)$ fois, on obtient le Théorème.

6. Surfaces de Markov

On note A un tore plein d'âme S^1 dans $\mathbb{R}^3$, $\underline{M}$ le feuilletage de A par les plans $\Theta = C^{te}$, orienté par la forme $dr \wedge dz$, et $\underline{P}$ le feuilletage de $\mathbb{R}^3 - \mathring{A}$ par les sphères centrées sur Oz et s'appuyant sur S^1 , orienté de façon que $dx \wedge dy > 0$ sur Oz .

DÉFINITION.— Soit γ une tresse fermée contenue dans $\mathring{A}$. Bennequin appelle surface de Markov de bord γ une surface orientée compacte V , de bord orienté γ , n'ayant pas de composante sans bord, satisfaisant aux conditions suivantes :

(M 1) : $V \cap (\mathbb{R}^3 - \mathring{A})$ est une réunion finie de feuilles de $\underline{P}$, munies de leur orientation dans $\underline{P}$ ou de l'orientation opposée ;

(M 2) : Dans A , V n'a relativement à $\underline{M}$ que des points critiques non dégénérés d'indice -1 .

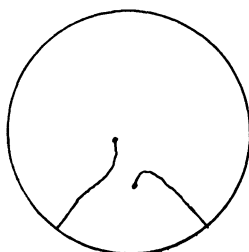
(M 3) : Les valeurs de Θ pour ces points critiques sont deux à deux distinctes.

Si γ est ascendante relativement à la structure de contact standard F_0 , et si V est une surface orientée de bord γ vérifiant (M 1), la somme des indices (resp. des indices tordus) des points critiques situés dans A est la même pour F_0 et pour $\underline{M}$. On peut en effet passer de $\underline{M}$ à F_0 par une famille continue de systèmes de Pfaff sur A transverses au bord de $V \cap A$.

Pour toute courbe compacte orientée γ plongée dans $\mathbb{R}^3$, on note $\chi(\gamma)$ la borne supérieure des caractéristiques d'Euler $\chi(V)$ pour V surface orientée compacte plongée dans $\mathbb{R}^3$, n'ayant pas de composante sans bord, telle que $\partial V = \gamma$.

THÉORÈME 2 ([1], Th. 6.3.0).— Soit γ une tresse fermée contenue dans $\mathring{A}$. Il existe une surface de Markov V de bord γ telle que $\chi(V) = \chi(\gamma)$.

Lemme 1.— Soit V une surface de bord γ . Il existe une surface V' isotopie à V parmi les surfaces de bord γ , satisfaisant à (M 1).

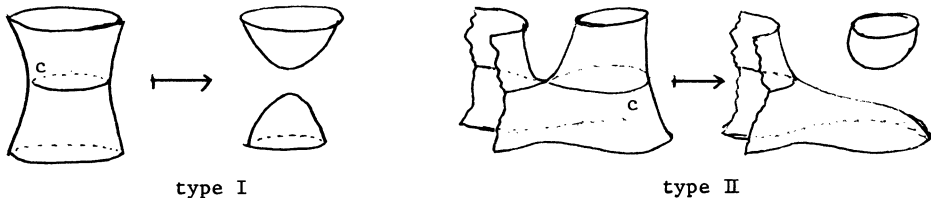


Démonstration.— On peut supposer que V est transverse à Oz , et coïncide, au voisinage de chacun de ses points d'intersection avec Oz , avec une feuille de $\underline{P}$. Soit ζ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$, nul au voisinage de γ , et qui sur $\mathbb{R}^3 - A$ suit les méridiens des feuilles de $\underline{P}$, du point sur Oz vers S^1 . En laissant évoluer V suivant ce champ de vecteurs, on obtient V' .

Démonstration du Théorème 2.— On a $\chi(\gamma) > -\infty$ car il existe une surface orientée V de bord γ ([]), et $\chi(\gamma)$ est borné par le nombre de composantes connexes de γ , donc est fini. Par suite, il existe une surface orientée V n'ayant pas de composante sans bord, telle que $\partial V = \gamma$ et $\chi(V) = \chi(\gamma)$. D'après le Lemme 1, on peut supposer que V vérifie (M 1). On peut également supposer que V satisfait à la condition de Morse suivante : V n'a dans $\hat{A}$, relativement à $\underline{M}$ que des points critiques non dégénérés, avec des valeurs de Θ deux à deux distinctes. Nous allons alors supprimer les points critiques d'indice $+1$ par une suite d'opérations qui ne peuvent que faire croître la caractéristique d'Euler-Poincaré - donc en fait la laisseront constante.

Pour $\Theta \in S^1$, posons $H_\Theta = V \cap M_\Theta$: c'est une courbe à bord orientée (la convention est fixée de façon que l'orientation soit rentrante aux points de ∂H_Θ qui proviennent de γ), pouvant avoir 1 point singulier, du type  ou point isolé. Appelons *boucle* de H_Θ une partie homéomorphe à S^1 qui est soit une composante connexe (boucle de type I), soit $J \cup \{\alpha\}$ où α est un point critique et J une composante connexe de $H_\Theta - \{\alpha\}$ (boucle de type II).

Soit C une boucle de H_Θ qui dans M_Θ n'enferme aucune autre composante de H_Θ . La *chirurgie* définie par C est l'opération décrite par les figures suivantes :



Elle supprime C et augmente $\chi(V)$ de 2. L'opération E_C est la chirurgie définie par C suivie par la suppression éventuelle des composantes sans bord qui apparaîtraient. En fait il en apparaît au plus une, sa caractéristique d'Euler est au plus deux, donc cette suppression diminue au pire $\chi(V)$ de 2, et au total E_C augmente $\chi(V)$ au sens large.

Une composante connexe de H_Θ contenant un point de γ , point rentrant de ∂H_Θ , doit aussi contenir un point sortant, donc sur ∂M_Θ . S'il n'y a pas de point isolé, une boucle ne peut enfermer que d'autres boucles, et on peut ordonner les

boucles $C_1, \dots, C_k$ de H_Θ de façon que C_j n'enferme que des C_i avec $i < j$. On définit alors l'opération E_Θ comme la composée de $E_{C_1}, \dots, E_{C_k}$.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les points critiques d'indice -1 (cols) de V relativement à $\underline{M}$, et $\vartheta_1, \dots, \vartheta_r$ les valeurs correspondantes de ϑ . La surface V' obtenue en faisant subir $E_{\vartheta_1}, \dots, E_{\vartheta_r}$ à V ne présente plus de boucle de type II. De ce fait elle ne présente plus non plus de point critique d'indice 1. En effet un tel point est la naissance ou la disparition d'une boucle de type I. Mais si une boucle naît, elle ne peut mourir sans incident car cela donnerait une composante sans bord de V , et le premier incident est nécessairement un passage au type II. On montre de même en remontant les valeurs de ϑ qu'il ne peut y avoir de mort. Ceci achève la démonstration du Théorème 2.

7. L'inégalité de Bennequin et ses conséquences

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de la structure de contact standard F_0 . Le résultat fondamental de Bennequin est l'inégalité suivante :

THÉORÈME 3 ([1], Th. E).— Soit γ une courbe F_0 -ascendante. On a

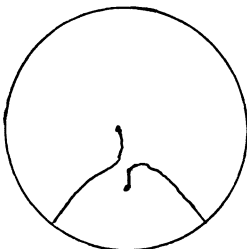
$$-\chi(\gamma) \geq l_{F_0}(\gamma).$$

Ce théorème donne, en fonction de $l_{F_0}(\gamma)$ qui est un invariant calculable, une minoration de $-\chi(\gamma)$. Si γ est connexe, $-\chi(\gamma) = 2g(\gamma) - 1$; on a donc une minoration de $g(\gamma)$, qui mesure la complication du noeud γ .

Lemme central ([1], Th. G).— Soient γ une tresse fermée contenue dans $\mathring{A}$ et V une surface de Markov de bord γ . Notons s^+ (resp. s^-) le nombre de composantes de $(\mathbb{R} - \mathring{A}) \cap V$ où l'orientation de V coïncide avec (resp. est opposée à) celle de $\underline{P}$; notons a^+ (resp. a^-) le nombre de points critiques de V par rapport à $\underline{M}$ dans $\mathring{A}$ où l'orientation de V coïncide avec (resp. est opposée à) celle de $\underline{M}$. Alors on a $s^- \leq a^-$.

Démonstration du Théorème à partir du Lemme.— Soit V une surface de Markov de bord γ telle que $\chi(V) = \chi(\gamma)$, cf. Théorème 2. On a $\chi(V) = \sum i(\alpha_j)$ et $l_{F_0}(V) = -\sum \tilde{i}(\alpha_j)$, où les α_j sont les points critiques de V relativement à F_0 (Proposition 2). Écrivons $\chi(V) = \chi' + \chi''$ et $l_{F_0}(V) = l' + l''$, où χ' et l' (resp. χ'' et l'') désignent les sommes pour α_j dans $\mathbb{R}^3 - \mathring{A}$ (resp. dans $\mathring{A}$). Les points critiques dans $\mathbb{R}^3 - \mathring{A}$ sont sur l'axe Oz et d'indice 1, d'où $\chi' = s^+ + s^-$ et $l' = -s^+ + s^-$. Pour le décompte dans $\mathring{A}$, on peut remplacer

F_0 par $\underline{M}$, puisque ces deux systèmes de Pfaff sont homotopes parmi les systèmes de Pfaff transverses au bord de $V \cap \mathring{A}$. En notant (α'_k) les points critiques de V relativement à $\underline{M}$ dans $\mathring{A}$ (qui sont d'indice -1), on a donc $\chi'' = \sum i(\alpha'_k) = -a^+ - a^-$



et $\ell'' = -\sum \tilde{i}(\alpha'_k) = a^+ - a^-$. Par suite $\chi + \ell = 2(s^- - a^-) \leq 0$, cqfd.

COROLLAIRE 1 ([1], Th. 5.5.1 et Cor. 5.5.2).— Soit γ une tresse fermée à n brins, de longueur algébrique c . On a $-\chi(\gamma) \geq |c| - n$.

En particulier, si γ n'est pas nouée, on a $|c| < n$.

Démonstration.— On peut supposer que $\gamma \in \underline{T}(A)$. Alors $\ell(\gamma) = c - n \leq -\chi(\gamma)$. Une symétrie par rapport au plan Oxy change le signe de c , mais ne change ni n ni $\chi(\gamma)$. Par suite $-c - n \leq -\chi(\gamma)$, d'où le corollaire.

COROLLAIRE 2 ([1], Th. D et C).— Soit γ une courbe F_0 -horizontale. On a

$$\tau(\gamma) \leq -\chi(\gamma) - |\mu(\gamma)|.$$

En particulier, si γ n'est pas nouée, on a $\tau(\gamma) < 0$.

Démonstration.— Si η est une courbe orientée, notons $\eta^\vee$ la courbe η munie de l'orientation opposée. On a

$$\tau_{F_0}(\gamma) + \mu(\gamma) = \ell_{F_0}(\gamma + \varepsilon\gamma) = \ell_{F_0}((\gamma + \varepsilon\gamma)^\vee) \leq -\chi(\gamma),$$

et

$$\tau_{F_0}(\gamma) - \mu(\gamma) = \ell_{F_0}(\gamma - \varepsilon\gamma) \leq -\chi(\gamma),$$

d'où le corollaire.

COROLLAIRE 3 ([1], Th. A).— Soit V un disque plongé dans $\mathbb{R}^3$. Le champ de vecteurs $\eta_{F_0, V}$ ne peut pas avoir d'orbite qui soit une courbe fermée.

En effet, une telle orbite γ serait une courbe F_0 -horizontale non nouée, avec $\tau(\gamma) = 0$.

COROLLAIRE 4.— Les structures de contact décrites au n° 2 ne sont pas isomorphes à la structure de contact standard.

Elles ne peuvent pas non plus être plongées dans la structure standard.

8. Les deux (ou quatre) graphes d'une surface de Markov

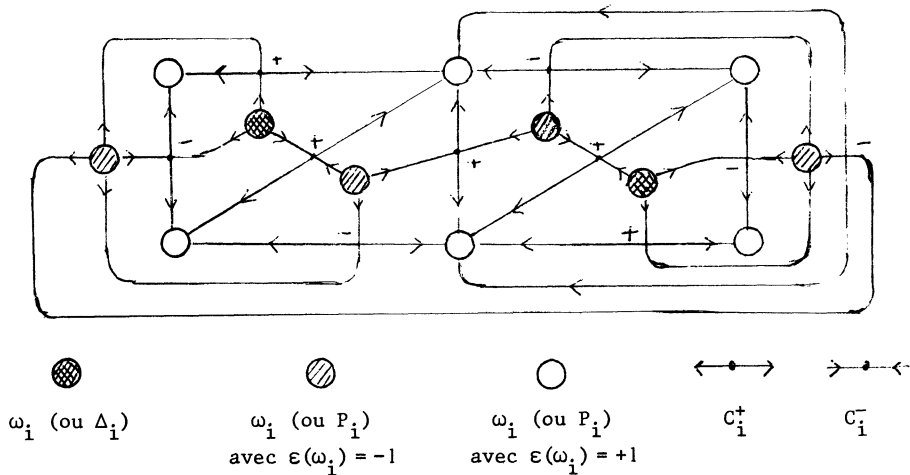
Soient γ une tresse fermée et V une surface de Markov de bord γ . Notons $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ les composantes connexes de γ , $P_1, \dots, P_s$ les composantes connexes de $V \cap (\mathbb{R}^3 - \hat{A})$ (qui sont des feuilles de $\underline{P}$), $p_1, \dots, p_s$ leur bord, $\alpha_1, \dots, \alpha_a$ les points critiques de $V \cap A$ relativement à $\underline{M}$ et $\hat{V}$ la surface abstraite obtenue en attachant à V des disques $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ suivant $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ (c'est une surface orientée compacte sans bord). On note $\delta_1, \dots, \delta_r, \omega_1, \dots, \omega_s$ les centres des disques $\Delta_1, \dots, \Delta_r, P_1, \dots, P_s$, on pose $\varepsilon(\omega_i)$ ou $\varepsilon(\alpha_j)$ égal à $+1$ ou -1 suivant qu'en ce point l'orientation de V coïncide avec ou est opposée à celle de $\underline{M}$ ou de $\underline{P}$, et $\varepsilon(\delta_i) = -1$ pour $i = 1, \dots, r$.

Pour $j = 1, \dots, a$, notons C_j^- (resp. C_j^+) la courbe stable (resp. instable) de $\eta_{V, \underline{M}}$ en α_j , prolongée au delà du γ_i ou du p_i qu'elle rencontre jusqu'en δ_i ou ω_i . On obtient ainsi sur $\hat{V}$ deux graphes en dualité de Poincaré :

- le graphe G^+ a pour sommets les ω_i tels que $\varepsilon(\omega_i) = +1$ et pour arêtes les C_j^+ ;
- le graphe G^- a pour sommets les ω_i tels que $\varepsilon(\omega_i) = -1$ et les δ_i , et pour arêtes les C_j^- .

Chacun de ces graphes est réunion de deux sous-graphes : $G^+ = G_+^+ \cup G_-^+$, $G^- = G_+^- \cup G_-^-$. G_+^+ (resp. G_+^-) est obtenu en prenant tous les sommets de G^+ et les arêtes C_j^+ pour les j tels que $\varepsilon(\alpha_j) = +1$ (resp. -1) ; de même pour G_-^+ et G_-^- .

Dans les dessins, nous utiliserons les symboles suivants :



Les flèches indiquent le sens du champ $\eta_{V, \underline{M}}$; les signes $+$ ou $-$ près des α_j indiquent $\varepsilon(\alpha_j)$.

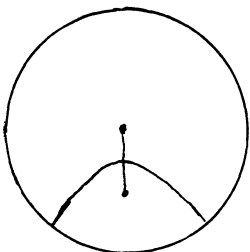
Le graphe qui joue un rôle ici est G_-^- , qui a $s^- + r$ sommets et a^- arêtes. En effet, le lemme central découle de la proposition suivante :

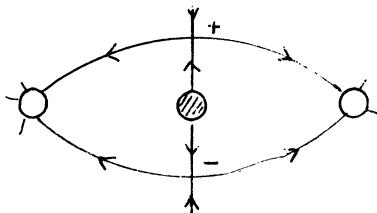
PROPOSITION 4 ([1], Th. H).— *Le graphe G_-^- ne peut avoir une composante connexe X qui soit un arbre dont tous les sommets sont des ω_i .*

Démonstration du lemme central à partir de la Proposition 4.— On a $\chi(G_-^-) = r + s^- - a^-$. Si l'on avait $s^- > a^-$, on aurait $\chi(G_-^-) > r$, le nombre des composantes connexes de G_-^- qui sont des arbres serait $> r$, donc l'une d'elles au moins ne contiendrait pas de δ_i , cqfd.

La Proposition 4 elle-même résulte, par une récurrence sur le nombre des sommets de X , des trois lemmes ci-dessous.

Appelons *extrémité élémentaire* de G_-^- une extrémité (sommets à 1 arête) de G_-^- qui se trouve dans la situation suivante :





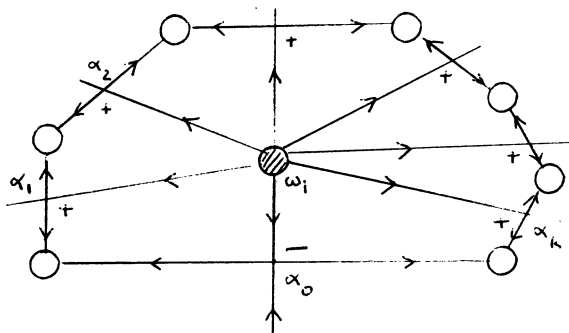
Lemme 1.— Soit $i \in \{1, \dots, s\}$ tel que ω_i soit une extrémité de G^- . Alors il existe une tresse γ' isotope à γ et une surface de Markov V' de bord γ' , isotope à V parmi les surfaces vérifiant (M 1) et (M 2), telles que le graphe G_1^- défini par V' soit isomorphe à G^- , l'extrémité ω_i étant devenue élémentaire.

Lemme 2.— Soit i tel que ω_i soit une extrémité élémentaire de G^- . Alors il existe une tresse γ' , et une surface de Markov V' de bord γ' , difféomorphe à V , telle que le graphe G_1^- présente une composante X' isomorphe au graphe obtenu en supprimant dans X le sommet ω_i et l'arête qui y mène.

Remarque.— La tresse γ' n'est pas nécessairement isotope à γ parmi les tresses, mais on s'en moque éperdûment.

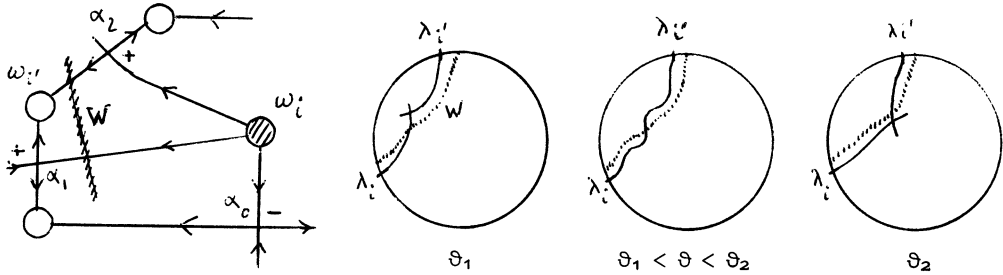
Lemme 3.— Le graphe G^- ne peut avoir une composante réduite à un sommet ω_i .

Démonstration du lemme 1.— Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ les points critiques sur les arêtes de ω_i dans G^- , pris en tournant dans le sens des ϑ croissants (sens négatif autour de ω_i) avec $\varepsilon(\alpha_0) = -1$, $\varepsilon(\alpha_1) = \dots = \varepsilon(\alpha_k) = +1$; notons $\vartheta_0, \dots, \vartheta_k$ les valeurs correspondantes de ϑ . Nous allons indiquer comment réduire k si $k \geq 2$.

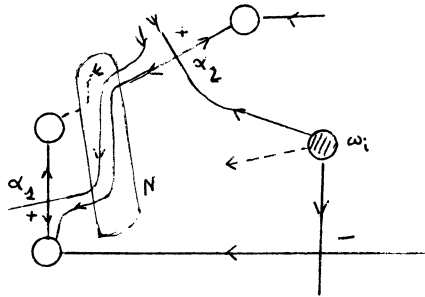


Si J est un arc de S^1 , appelons *cloison* sur J dans A l'image W d'un plongement $J \times I \rightarrow A$ respectant la coordonnée ϑ , avec $I = [0, 1]$ et $W \cap \partial A = J \times \partial I$. On construit dans A une cloison W sur $[\vartheta_1 - \varepsilon, \vartheta_2 + \varepsilon]$ dont

les traces sur V et sur les M_Θ donnent :

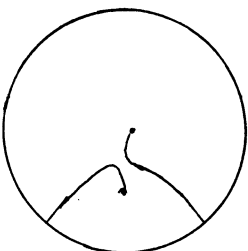
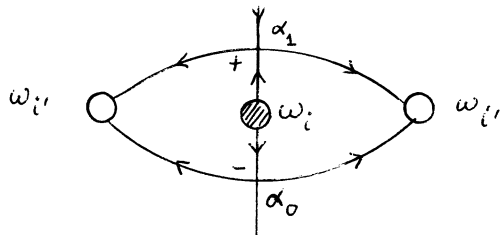


Par une isotopie, on se ramène au cas où W est de la forme $J \times \Gamma$ dans $A = S^1 \times M_0$. Soient N un voisinage de W ne contenant pas de ω_j et ϕ un difféomorphisme de A de la forme $(\Theta, m) \rightarrow (\Theta', m)$ avec $\Theta' = \Theta$ si $\Theta \notin J = [\Theta_1 - \varepsilon, \Theta_2 + \varepsilon]$, $\Theta' > 1/2(\Theta_1 + \Theta_2)$ si $\Theta = \Theta_1$ et $m \in A - N$ du même côté de W que α_1 , $\Theta' < 1/2(\Theta_1 + \Theta_2)$ si $\Theta = \Theta_2$ et $m \in A - N$ du même côté que α_2 . Posons $V' = \phi(V)$. Le feuilletage $\underline{M}_{V'}$ prend (du moins pour un choix convenable de ϕ) l'allure suivante :



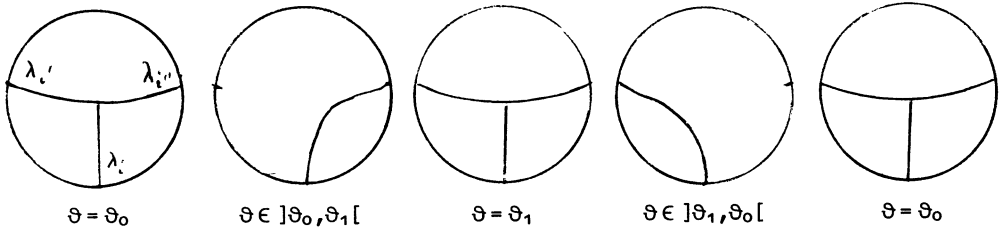
Le nombre k a diminué de 1, cqfd.

Démonstration du lemme 2.— Soient α_0 et α_1 les points critiques sur les arêtes de ω_1 dans G^- , soient Θ_0 et Θ_1 les valeurs correspondantes de Θ , notons $\hat{E}$ la région de V limitée par C_0^+ et C_1^+ , $\omega_{i'}$ et $\omega_{i''}$ les extrémités de ces arêtes, disposées comme dans la figure ci-dessous :

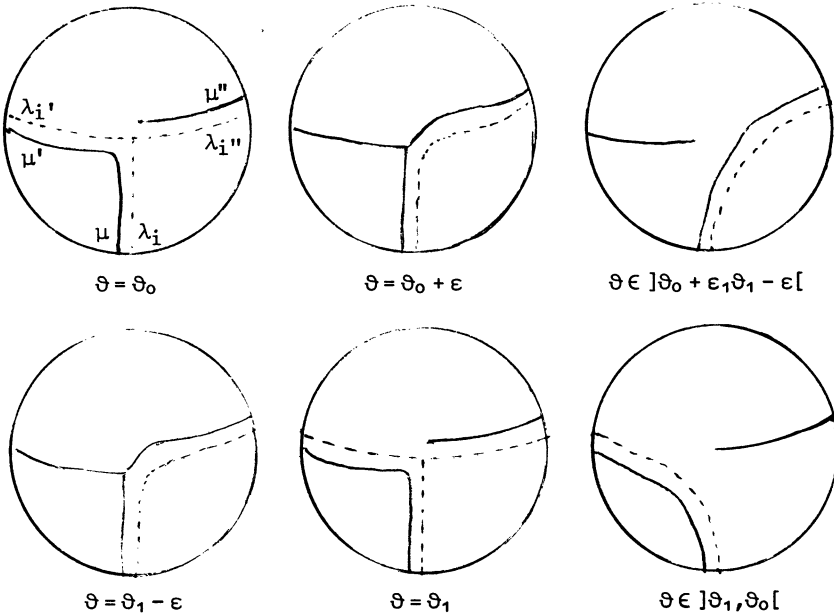


STRUCTURES DE CONTACT

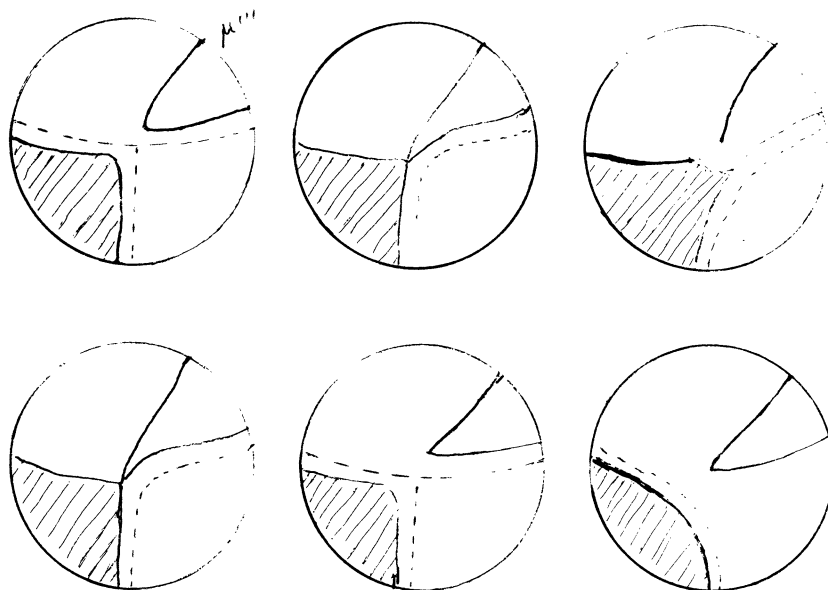
Posons $E = \hat{E} \cap A$. Les intersections de E avec les M_ϑ donnent quand ϑ varie le "film" suivant :



Soit T un fermé de A ne rencontrant pas V et donnant le film suivant :

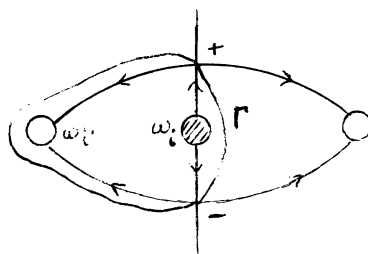


Soit ψ un plongement localement croissant de $S^1 - \{\mu, \mu', \mu''\}$ dans lui-même tel que $\psi([\mu', \mu]) =]\mu'', \mu'''[$ avec $\mu''' \in]\mu'', \mu[$, coïncidant avec l'identité sur $]\mu, \mu''[$, tel que $\psi([\mu'', \mu']) =]\mu''', \mu'[$ et laissant fixe λ_1 . On construit un plongement Ψ de $A - T$ dans lui-même préservant la coordonnée ϑ , coïncidant avec l'identité sur E et induisant sur le bord de A l'application $(\vartheta, \lambda) \mapsto (\vartheta, \omega(\lambda))$. L'image de Ψ donne le film suivant :

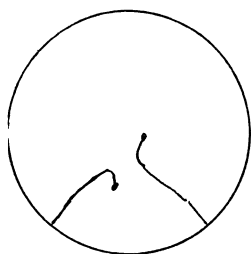


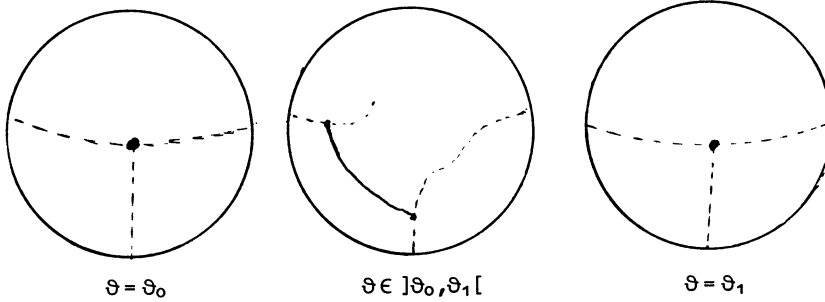
(L'image de Ψ_A est le disque fermé privé des traits marqués et de la zone hachurée.)

L'image de $V \cap A$ par Ψ est de la forme $V'' \cap A$, où V'' est une surface de Markov, et on a un difféomorphisme $\hat{\Psi} : V \rightarrow V''$ coïncidant avec Ψ sur $V \cap A$. Considérons sur V'' la courbe Γ :



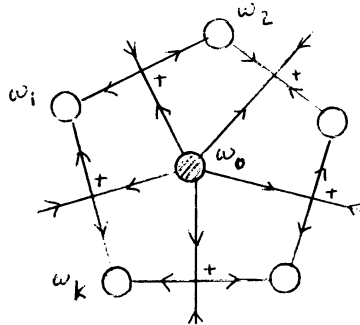
On peut plonger dans A un disque D de façon que $D \cap V'' = \Gamma$, suivant le film ci-après :





En faisant subir à V'' la chirurgie définie par D , on obtient une surface ayant deux composantes connexes : l'une est une sphère contenant P_i et $P_{i'}$, l'autre est une surface de Markov V' qui répond à la question, cqfd.

Démonstration du lemme 3.— On doit avoir la figure :



Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les latitudes dans ∂A des parallèles $p_1, \dots, p_k$ et λ_0 celle de p_0 . Dans $S^1 - \{\lambda_0\}$, on doit avoir $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k > \lambda_1$, ce qui est impossible puisque c'est un intervalle, cqfd.

Ceci achève la démonstration du théorème 3.

9. Questions ouvertes

QUESTION 1 (réciproque du Corollaire 3).— Pour toute structure de contact F sur $\mathbb{R}^3$ non isomorphe à F_0 , existe-t-il un disque plongé V tel que $\eta_{V,F}$ ait une trajectoire fermée ?

Soit F une structure de contact sur $\mathbb{R}^3$ et notons $\text{Diff}(\mathbb{R}^3, F)$ le groupe des difféomorphismes de $\mathbb{R}^3$ préservant F . On peut montrer à partir du Cor. 3

que, même si $F = F_0$, l'ensemble $\text{Diff}(\mathbb{R}^3, F)$ n'est pas dense dans $\text{Diff}_+(\mathbb{R}^3)$ pour la topologie C^0 ([1], 2.3.5).

QUESTION 2.— Le groupe $\text{Diff}(\mathbb{R}^3, F)$ est-il C^0 -fermé dans $\text{Diff}(\mathbb{R}^3)$?

QUESTION 3 ("Problème des chaînes de vélo" de Thurston).— Classifier les courbes F_0 -horizontales dans $\mathbb{R}^3$.

QUESTION 4.— Soient β une 1-forme générique sur $\mathbb{R}^3$ et V la surface formée des points où $\beta \wedge d\beta$ s'annule. Donner une description de la structure de contact définie par $\beta|_U$ pour chaque composante connexe U de $\mathbb{R}^3 - V$.

QUESTION 5.— Pour la structure de contact standard sur $\mathbb{R}^{2n+1}$, est-il impossible d'avoir une variété plongée W isomorphe à $V \times S^1$ avec V une variété compacte de dimension n , telle que les $V \times \{t\}$ soient des variétés de Legendre deux-à-deux non enlacées ?

QUESTION 6 (Arnold, Gromov).— Pour la structure de contact standard sur $\mathbb{R}^{2n+1}$, est-il vrai qu'une variété de Legendre compacte ne se projette jamais sans croisement sur le $\mathbb{R}^{2n}$ symplectique ?

QUESTION 7.— Soit F une structure de contact (resp. symplectique) sur $\mathbb{R}^n$ avec n impair (resp. pair). Le groupe $\text{Diff}(\mathbb{R}^n, F)$ est-il C^0 -fermé dans $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$? Sa fermeture est-elle au contraire $\text{Diff}_+(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\text{Diff}(\mathbb{R}^n, \omega)$ où ω est la forme volume) ?

QUESTION 8.— Soit $\gamma \subset S^3 = \partial B^4$ une courbe transverse à $\hat{F}_0$, et notons $\chi'(\gamma)$ la caractéristique maximum d'une surface plongée orientable $V \subset B^4$ telle que $\partial V = \gamma$. A-t-on $-\chi'(\gamma) \geq \ell_{\hat{F}_0}(\gamma)$?

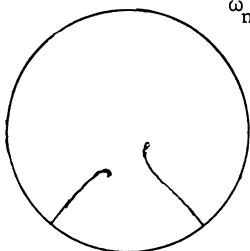
10. Structures de contact sur S^3

Notons $\underline{S}$ l'ensemble des classes d'isomorphie directe de structures de contact sur S^3 . Le théorème de stabilité de Gray (cf. n° 0) et le théorème de Cerf ($\text{Diff}_+(S^3)$ est connexe) montrent que $\underline{S}$ est aussi l'ensemble des composantes connexes de l'espace des structures de contact sur S^3 . On peut définir sur $\underline{S}$ une opération de somme connexe.

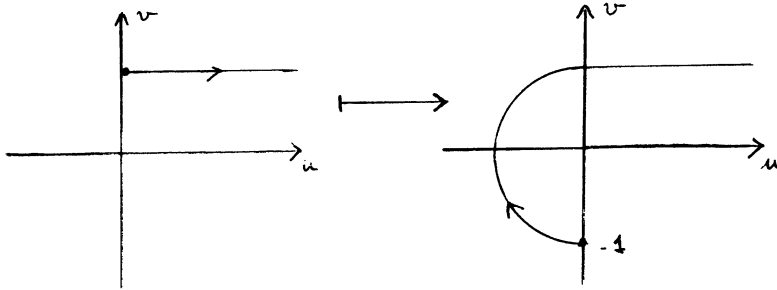
D'après un résultat de Lutz, l'application naturelle de $\underline{S}$ dans l'ensemble $\underline{F}$ des classes d'homotopie de champs de plans est surjective. Il résulte du Corollaire 3 du Théorème 3 qu'elle n'est pas injective. Plus précisément, pour tout $n > 0$, la forme de contact ω_n donnée par la formule de Varela :

$$\omega_n = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi(x_3^2 + x_4^2)\right)(x_1 dx_2 - x_2 dx_1) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi(x_3^2 + x_4^2)\right)(x_3 dx_4 - x_4 dx_3)$$

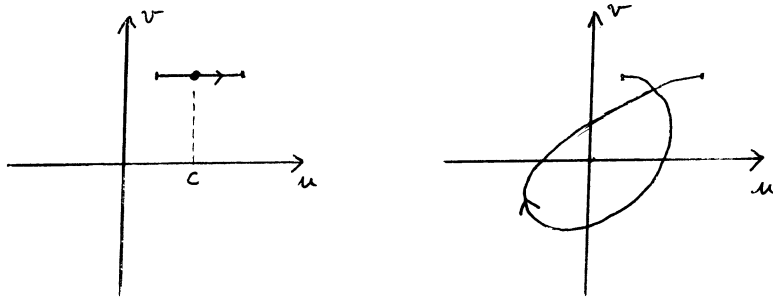
définit une structure de contact homotope à $\hat{F}_0$ parmi les champs de plans, mais non isomorphe à $\hat{F}_0$.



Soit F une structure de contact sur S^3 . Si γ est une courbe F -ascendante, on peut trouver un tore plein A d'âme γ avec des coordonnées $(\rho, \vartheta, \varphi)$ telles que F soit défini sur A par la forme $\alpha = \rho^2 d\vartheta + d\varphi$. La *modification de Lutz* centrée sur γ consiste à remplacer α sur A par $u(\rho)d\vartheta + v(\rho)d\varphi$, où $(u, v) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ paramètre une courbe ayant l'allure suivante :



Soit T un tore plongé dans S^3 , défini dans un voisinage N par $h = c$, où h est une fonction sur N et $c \in \mathbb{R}$. Supposons F défini sur N par $\alpha = h d\vartheta + d\varphi$. La *modification de Lutz* centrée sur T consiste à remplacer α sur N par $u(h)d\vartheta + v(h)d\varphi$, où la courbe (u, v) a l'allure suivante :



QUESTION 9.— a) Toute structure de contact sur S^3 peut-elle être obtenue à partir de $\hat{F}_0$ par une suite de modifications de Lutz ?

b) Les courbes et les tores sur lesquels ces modifications sont centrés peuvent-ils être pris disjoints ? (Ceci permettrait de les faire simultanément.)

c) A quelle condition deux familles de courbes et de tores donnent-elles des structures de contact isomorphes ?

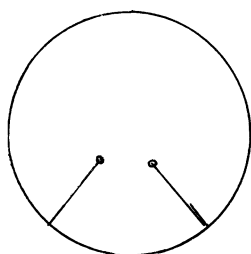
BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. BENNEQUIN - Entrelacements et équations de Pfaff, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris VII, 24 novembre 1982.
- [2] S.S. CHERN - *Pseudo-groupes continus infinis*, Coll. Internat. CNRS Géom. Diff., Strasbourg, 1953, 119-135.
- [3] J. ELIASBERG - *Rigidity of symplectic and contact structures*, preprint 1981.
- [4] T. ERLANDSSON - Geometry of contact transformations in dimension 3, Doctoral Dissertation, Uppsala, 1981.
- [5] J.W. GRAY - *Some global properties of contact structures*, Ann. of Math. 69 (1959), 421-450.
- [6] M. GROMOV - Stable maps of foliations in manifolds, Thesis, Leningrad, 1970, et Izv. Akad. Nauk CCCP, 33(1969), 707-734.
- [7] R. LUTZ - Sur quelques propriétés des formes différentielles en dimension 3, Thèse, Strasbourg 1971.
- [8] R. LUTZ - *Structures de contact sur les fibrés principaux en cercles de dimension 3*, Ann. Inst. Fourier Grenoble XXVII(1977).
- [9] A.A. MARKOV - *Über die freie Äquivalenz der geschlossenen Zöpfe*, Recueil de la Soc. Math. de Moscou 43(1936), 73-78.
- [10] J. MARTINET - *Formes de contact sur les variétés de dimension 3*, Proc. Liverpool Singularities Symp. II, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 209 (1971), 142-163.
- [11] J. MILNOR - Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Study n° 61, Princeton, 1968.
- [12] D. ROLFSEN - Knots and links, Publish or perish n° 7, 1976.
- [13] W. THURSTON and H.E. WINKELNKEMPER - *On the existence of contact forms*, Proc. Amer. Math. Soc. 52(1975), 345-347.

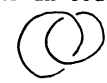
Adrien DOUADY

Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
F-75230 PARIS CEDEX 05

& Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
F-91405 ORSAY



Film : Surface de Markov pour une boucle simple .

En passant ce film 2 fois (resp. 3 fois) dans un tour, on a une surface de Markov pour un enlacement simple  (resp. un noeud de trèfle ).