LÊ DŨNG TRÁNG

Faisceaux constructibles quasi-unipotents

Astérisque, tome 92-93 (1982), Séminaire Bourbaki, exp. nº 581, p. 45-57
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1981-1982__24__45_0>

Séminaire BOURBAKI
34e année, 1981/82, n° 581 Novembre 1981

FAISCEAUX CONSTRUCTIBLES QUASI-UNIPOTENTS

par LÊ Dũng Tráng

Dans cet exposé nous rappelons des résultats concernant les faisceaux constructibles quasi-unipotents sur des espaces analytiques complexes et nous donnons la démonstration par O. Gabber d'un critère de quasi-unipotence de M. Kashiwara. Dans ce contexte nous énonçons le théorème de la monodromie. Le récent intérêt des faisceaux constructibles provient de ce que les "solutions" d'un système différentiel holonome sont constructibles (cf. [11]) et de la généralisation dans [16] aux faisceaux constructibles du problème de Riemann-Hilbert qui à un système local associe une connexion régulière (cf. P. Deligne [5]).

1. Rappels

Dans ce paragraphe nous rappelons quelques définitions et résultats bien connus (cf. [10], [22], [2] Exp. IX, [1], [5] I.1). Le lecteur trouvera les démonstrations des résultats les moins triviaux dans [10] ou [22].

(1.1) Soit X un espace analytique complexe. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau d'espaces vectoriels complexes sur X. On dit que $\mathcal{F}$ est un *faisceau constructible* s'il existe une suite décroissante $\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces analytiques de X tels que :

1) $X_0 = X$ et $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} X_j = \emptyset$

2) La restriction de $\mathcal{F}$ à $S_j := X_j - X_{j+1}$ $(j \in \mathbb{N})$ est un système local, i.e. la restriction de $\mathcal{F}_{|S_j}$ est, localement sur S_j, isomorphe à l'un des faisceaux constants $\mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

On a les propriétés suivantes :

(1.1.1) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau d'espaces vectoriels complexes sur X. On suppose qu'il existe un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ par des ouverts de X tel que $\mathcal{F}_{|U_i}$ soit constructible, alors $\mathcal{F}$ est constructible (comparer à [2] Prop. (2.4) (ii)).

(1.1.2) Soit $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux constructibles sur X. Le noyau et le conoyau de f sont des faisceaux constructibles sur X (comparer à [2] Lemme (2.1)).

(1.1.3) Soit $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ une suite exacte de faisceaux d'espaces vectoriels complexes sur X, si $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ sont constructibles, $\mathcal{F}$ est constructible (comparer à [2] Lemme (2.1)).

(1.1.4) Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques, si $\mathcal{G}$ est un faisceau constructible sur Y , $f^{-1}\mathcal{G}$ est constructible sur X (comparer à [2] Prop. (2.4) (iii)).

(1.1.5) Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre d'espaces analytiques. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau constructible sur X , les faisceaux $R^j f_* \mathcal{F}$ $(j \in \mathbb{N})$ sont constructibles sur Y .

(1.2) Soit X un espace topologique localement connexe par arcs et localement simplement connexe par arcs. Soit $\mathcal{F}$ un système local sur X . Soit $\varphi : [0,1] \longrightarrow X$ un lacet de X en x_0 , i.e. φ est continu et $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$. Comme $\varphi^{-1}\mathcal{F}$ est constant sur $[0,1]$, on obtient un automorphisme linéaire de $\mathcal{F}_{x_0}$ qui ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet φ et qu'on appelle la *monodromie de* $\mathcal{F}$ *le long du lacet* φ . Ceci définit une représentation $\rho(\mathcal{F})$ de $\pi_1(X,x_0)$ dans $\mathrm{Aut}\ \mathcal{F}_{x_0}$. On a (cf. [5] Cor. I.1.4) :

(1.2.1) Si X est connexe, le foncteur qui à $\mathcal{F}$ fait correspondre la représentation $\rho(\mathcal{F})$ sur $\mathcal{F}_{x_0}$ est une équivalence entre la catégorie des systèmes locaux sur X et la catégorie des espaces vectoriels complexes munis d'une action du groupe $\pi_1(X,x_0)$.

(1.2.2) Cas particulier : Soit D un disque ouvert dans $\mathbb{C}$ centré en 0 et soit $\mathcal{F}$ un faisceau constructible sur D . Si $\delta > 0$ est assez petit, la restriction de $\mathcal{F}$ sur $D_\delta - \{0\}$, où D_δ est le disque de $\mathbb{C}$ centré en 0 et de rayon δ , est un système local. Soit $t \in D_\delta - \{0\}$ et φ le lacet en t [1] qui engendre $\pi_1(D_\delta - \{0\},t)$. La monodromie T de $\mathcal{F}$ le long de φ est appelée *la monodromie de* $\mathcal{F}$ *autour de* 0 . On dit que cette monodromie est *quasi-unipotente* si ses valeurs propres sont des racines de l'unité, i.e. s'il existe m et ℓ tels que :

$$(T^m - \mathrm{Id})^\ell = 0 .$$

(1.2.3) DÉFINITION.— *Un faisceau constructible* $\mathcal{F}$ *sur* X *est* quasi-unipotent *en* $x \in X$ *si pour toute application analytique* $p : D \to X$ *d'un disque ouvert de* $\mathbb{C}$ *centré en* 0 *dans* X *telle que* $p(0) = x$ *, la monodromie de* $p^{-1}\mathcal{F}$ *autour de* 0 *est quasi-unipotente. Si* $\mathcal{F}$ *est quasi-unipotent en tout point* $x \in X$ *, on dit que* $\mathcal{F}$ *est* quasi-unipotent *sur* X .

(1.3) On a les propriétés suivantes des faisceaux constructibles quasi-unipotents (cf. [10] §1).

(1.3.1) Les systèmes locaux sur un espace analytique X sont quasi-unipotents.

(1.3.2) Soit $\mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ une suite exacte de faisceaux constructibles sur un espace analytique X , si $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ sont quasi-unipotents, $\mathcal{F}$ est quasi-unipotent.

[1] d'orientation positive

(1.3.3) Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques et $\mathcal{G}$ un faisceau constructible quasi-unipotent sur Y, $f^{-1}\mathcal{G}$ est constructible et quasi-unipotent sur X.

(1.3.4) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau constructible sur un disque ouvert D de $\mathbb{C}$ centré en 0, si la monodromie de $\mathcal{F}$ autour de 0 est quasi-unipotente, le faisceau $\mathcal{F}$ est quasi-unipotent en 0.

(1.3.5) Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques. Supposons que la topologie de Y est la topologie quotient de X. Alors un faisceau constructible $\mathcal{G}$ sur Y est quasi-unipotent si et seulement si $f^{-1}\mathcal{G}$ est quasi-unipotent sur X.

(1.3.6) Soit $f : X \to Y$ un morphisme *fini* d'espaces analytiques et $\mathcal{F}$ un faisceau constructible sur X. Alors $\mathcal{F}$ est quasi-unipotent si et seulement si $f_*\mathcal{F}$ est quasi-unipotent sur Y.

(1.3.7) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau constructible sur un espace analytique X. L'ensemble des points de X où $\mathcal{F}$ n'est pas quasi-unipotent est un sous-ensemble analytique fermé de X nulle part dense.

(1.3.8) Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre d'espaces analytiques. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau constructible quasi-unipotent sur X, $R^j f_*\mathcal{F}$ est constructible et quasi-unipotent sur Y pour tout $j \in \mathbb{N}$.

2. Un critère de quasi-unipotence

Dans [10], M. Kashiwara démontre le théorème suivant qui nous donne un critère pour savoir si un faisceau constructible est quasi-unipotent :

(2.1) THÉORÈME (M. Kashiwara).— *Soient* X *un espace analytique irréductible,* Y *un sous-espace analytique de* X *et* Z *un sous-espace analytique de* X *de codimension* ≥ 2. *Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau d'espaces vectoriels complexes sur* X *tel que* $\mathcal{F}_{|X-Y}$ *et* $\mathcal{F}_{|Y}$ *soient des systèmes locaux. Si* $\mathcal{F}_{|X-Z}$ *est quasi-unipotent, alors* $\mathcal{F}$ *est quasi-unipotent.*

Nous allons donner deux démonstrations de ce théorème, l'une due à O. Gabber qui m'a été communiquée par P. Deligne, l'autre de M. Kashiwara. Celle de O. Gabber peut se généraliser à des situations algébriques sur des schémas noethériens. La démonstration de M. Kashiwara fait intervenir une jolie construction combinatoire associée au groupe fondamental du complémentaire de certaines courbes planes.

(2.1.1) Tout d'abord nous ramenons le problème au cas où X est une surface normale : soit $x \in Z$; il suffit de montrer que pour tout chemin analytique $\varphi : D \to X$ tel que $\varphi(0) = x$, la monodromie de $\varphi^{-1}\mathcal{F}$ autour de 0 est quasi-unipotente ; on peut supposer que ce chemin analytique est ni constant, ni contenu dans Y ; ce chemin est donc contenu dans un germe de surface (X_1, x) contenu dans (X,x) tel que $X_1 \cap Z = \{x\}$ et $\operatorname{codim}_X Y = \operatorname{codim}_{X_1} Y \cap X_1$; si le théorème (2.1) est établi pour une surface, la monodromie de $\varphi^{-1}\mathcal{F}$ autour de 0 est quasi-unipotente ; la propriété (1.3.5) ci-dessus montre qu'il suffit de démontrer la propriété de quasi-unipotence dans le cas d'une surface normale.

(2.2) Nous donnons maintenant la démonstration de O. Gabber du théorème (3.1). Nous supposons donc le germe (X,x) normal et de dimension 2 , $Z = \{x\}$ et Y est de dimension un au plus. Il existe une résolution des singularités $\pi : \tilde{X} \to X$ de X où $\pi^{-1}(x)$ est un diviseur à croisements normaux ainsi que $\pi^{-1}(Y)$ si $x \in Y$ et $\dim_x Y = 1$, et tel que $(C_i . C_j) = 0$ ou 1 pour $i \neq j$ (nous notons $(C_i)_{1 \le i \le m}$ les composantes de $|\pi^{-1}(x)|$ et $(Y_k)_{1 \le k \le r}$ celles de la transformée stricte de Y quand $x \in Y$).

(2.2.1) La matrice $(C_i . C_j)_{1 \le i,j \le m}$ est définie négative (cf. [18] § 1 p. 6).

(2.2.2) Nous appelons encore X un représentant assez petit de (X,x) tel que le groupe fondamental local en x de $X - Y \cup \{x\}$ soit le groupe fondamental de $X - Y \cup \{x\}$.

(2.2.3) Comme dans [18] § 1 p. 6-13, on peut construire dans $\tilde{X}$ des voisinages tubulaires T_i de C_i , des points $x_i \in U_i$, avec $U_i := T_i - \bigcup_{1 \le j \le m} C_j \bigcup_{1 \le k \le r} Y_k$ et un chemin $\gamma : [0,1] \to U$, avec $U := \bigcup_{1 \le i \le m} U_i$, qui joint $x_1, \ldots, x_m$, i.e. il existe $t_1 := 0 \le t_2 \le \ldots \le t_m := 1$ tels que $\gamma(t_i) = x_i$, tels que :

a) $\bigcup_{1 \le i \le m} T_i - \bigcup_{1 \le j \le m} C_j$ a le type d'homotopie de $X - \{x\}$;

b) U a le type d'homotopie de $X - Y \cup \{x\}$;

c) On a un homomorphisme ξ_i de $\pi_1(U_i, x_i)$ dans $\pi_1(U, x_1)$, qui à la classe d'homotopie d'un lacet de U_i en x_i fait correspondre la classe d'homotopie du lacet de U en x_1 obtenu à l'aide du chemin γ ;

d) soit α_i la classe d'homotopie du lacet en x_1 obtenu en composant le chemin γ_i obtenu de γ qui joint x_1 et x_i , le lacet δ_i de U en x_i qui "tourne" une fois autour de C_i et le chemin inverse de γ_i (cf. [18] § 1 p. 11) ; soit C_{i_k} l'unique composante de $\pi^{-1}(x)$ intersectée par Y_k et soit β_k la classe d'homotopie du lacet en x_1 obtenu en composant le chemin γ_{i_k} , le lacet ε_k de U en x_i qui "tourne" une fois autour de Y_k et le chemin inverse de γ_{i_k} ; entre les α_i $(1 \le i \le m)$ et les β_k $(1 \le k \le r)$ on a les relations suivantes (cf. [18] § 1 p. 12) :

l'élément $\alpha_1^{(C_1 . C_i)} \ldots \alpha_m^{(C_m . C_i)} \beta_1^{(Y_1 . C_i)} \ldots \beta_r^{(Y_r . C_i)}$ est un commutateur de $\pi_1(U, x_1)$ pour $1 \le i \le m$;

l'élément δ_i est central dans $\pi_1(U_i, x_i)$, car U_i est un fibré en disques épointés sur $C_i - \bigcup_{j\neq i} C_j \bigcup_{1\leq k\leq r} Y_k$.

(2.2.4) Nous considérons le faisceau constructible $\pi^{-1}\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}$ sur $\widetilde{X}$. Les hypothèses nous disent que la monodromie de $\widetilde{\mathcal{F}}$ le long de β_k $(1 \leq k \leq r)$ est quasi-unipotente. Nous allons montrer que le fait que la matrice $((C_i.C_j))_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq m}}$ soit définie négative implique que la monodromie de $\widetilde{\mathcal{F}}$ le long de α_i $(1 \leq i \leq m)$ est quasi-unipotente. Ceci démontrera notre théorème parce que tout chemin analytique $\varphi : D \to X$, tel que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(D - \{0\}) \subset X - Y \cup \{x\}$, se relève en un chemin analytique $\widetilde{\varphi} : D \to \widetilde{X}$ tel que $\widetilde{\varphi}(0) \in \pi^{-1}(x)$ et $\widetilde{\varphi}(D - \{0\}) \subset U$ et que le groupe fondamental local de U en $\widetilde{\varphi}(0)$ est abélien et engendré par des éléments le long desquels $\widetilde{\mathcal{F}}$ est quasi-unipotent.

(2.2.5) La restriction de $\widetilde{\mathcal{F}}$ [1] à U étant un système local, on a une représentation $\rho : \pi_1(U,x_1) \longrightarrow \mathrm{Aut}\, \widetilde{\mathcal{F}}_{x_1}$ de $\pi_1(U,x_1)$ sur la fibre $\widetilde{\mathcal{F}}_{x_1}$. En composant avec ξ_i , on obtient une représentation $\rho_i = \rho \circ \xi_i$ de $\pi_1(U_i,x_i)$. Nous voulons montrer que $\rho(\alpha_i)$ $(1 \leq i \leq m)$ est un automorphisme quasi-unipotent de $\widetilde{\mathcal{F}}_{x_1}$. Pour cela nous allons montrer que, pour tout homomorphisme $\chi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{Q}$ du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ dans le groupe additif $\mathbb{Q}$ qui s'annule sur le sous-groupe U des racines de l'unité de $\mathbb{C}^*$, l'image par χ des valeurs propres de $\rho(\alpha_i)$ $(1 \leq i \leq m)$ est nulle. Soit Λ_i l'ensemble des valeurs propres de $\rho(\alpha_i)$ et on note λ_i et μ_i des valeurs propres de $\rho(\alpha_i)$ telles que $S(i) = \mathrm{Sup}\ \chi(\Lambda_i) = \chi(\lambda_i)$ et $I(i) = \mathrm{Inf}\ \chi(\Lambda_i) = \chi(\mu_i)$.

Comme δ_i est central dans $\pi_1(U_i,x_i)$ la représentation ρ_i de $\pi_1(U_i,x_i)$ sur $\widetilde{\mathcal{F}}_{x_1}$ se décompose en une somme de représentations non triviales sur des sous-espaces V_ℓ de $\widetilde{\mathcal{F}}_{x_1}$ $(\ell = 1,\ldots,s_i)$ telles que la restriction de $\rho_i(\delta_i)$ à V_ℓ n'ait qu'une seule valeur propre. Soient V_{ℓ_i} et $V_{\ell_i'}$ les sous-espaces où cette valeur propre est respectivement λ_i et μ_i .

Comme $(C_j.C_i) \neq 0$ (resp. $(Y_k.C_i) \neq 0$) est différent de 0 , si α_j (resp. β_k) appartient à l'image de ξ_i , on peut considérer les restrictions de $\vartheta_i = \delta_1^{(C_1.C_i)}\ldots\delta_m^{(C_m.C_i)}\varepsilon_1^{(Y_1.C_i)}\ldots\varepsilon_r^{(Y_r.C_i)}$ à V_{ℓ_i} et $V_{\ell_i'}$. L'élément ϑ_i est un commutateur dans $\pi_1(U_i,x_i)$. On obtient alors :

$$\frac{1}{\dim V_{\ell_i}}\left[\sum_{(C_j,C_i)\neq 0}(C_j.C_i)\chi\left(\det\rho(\delta_j)_{|V_{\ell_i}}\right) + \sum_{(Y_k,C_i)\neq 0}(Y_k.C_i)\chi\left(\det\rho(\varepsilon_k)_{|V_{\ell_i}}\right)\right] = 0 ,$$

$$\frac{1}{\dim V_{\ell_i'}}\left[\sum_{(C_j,C_i)\neq 0}(C_j.C_i)\chi\left(\det\rho(\delta_j)_{|V_{\ell_i'}}\right) + \sum_{(Y_k,C_i)\neq 0}(Y_k.C_i)\chi\left(\det\rho(\varepsilon_k)_{|V_{\ell_i'}}\right)\right] = 0 .$$

Comme $\rho(\varepsilon_k)$ est quasi-unipotent $(1 \leq k \leq r)$, que

$$\frac{1}{\dim V_{\ell_i}}\chi\left(\det\rho(\delta_i)_{|V_{\ell_i}}\right) = S(i) \quad \left(\text{resp. } \frac{1}{\dim V_{\ell_i'}}\chi\left(\det\rho(\delta_i)_{|V_{\ell_i'}}\right) = I(i)\right) ,$$

et que pour $(C_j.C_i) \neq 0$ on a :

---

[1] On suppose $\widetilde{\mathcal{F}} \neq 0$.

$$\frac{1}{\dim V_{\ell_i}}\ \chi\left(\det\rho(\delta_j)_{|V_{\ell_i}}\right) \le S(j) \quad \left(\text{resp. } \frac{1}{\dim V_{\ell'_i}}\ \chi\left(\det\rho(\delta_j)_{|V_{\ell'_i}}\right) \ge I(j)\ \right),$$

on a :

$$\sum_{j=1}^{m} (C_j.C_i)S(j) \ge 0$$

et

$$\sum_{j=1}^{m} (C_j.C_i)I(j) \le 0 .$$

Donc en posant $\Delta(j) = S(j) - I(j)$ qui est ≥ 0 , on a :

$$\sum_{j=1}^{m} (C_j.C_i)\Delta(j) \ge 0 .$$

Ce qui donne $\sum_{i=1}^{m}\left(\Delta(i)\ \sum_{j=1}^{m}(C_j.C_i)\Delta(j)\right) \ge 0$. Or la matrice symétrique $((C_j.C_i))_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}}$ étant définie négative, ceci n'est possible que si $\Delta(j) = S(j) - I(j) = 0 \quad (j = 1,\dots,m)$, ce qui donne $S(j) = I(j) = 0 \quad (j = 1,\dots,m)$. Ceci achève la démonstration de (2.1) proposée par O. Gabber.

(2.3) Dans ce paragraphe nous allons rapidement esquisser la démonstration de M. Kashiwara dans [10] (§ 3 et 4) du théorème (2.1).

D'après (2.1.1) on peut supposer que X est une surface normale. On considère un chemin analytique $\varphi : D \to X$ tel que $\varphi(0) = x$ et on veut démontrer que sous les hypothèses de (2.1) le faisceau $\varphi^{-1}\mathcal{F}$ est quasi-unipotent en 0 . On peut supposer que φ ne soit pas constant et que $\varphi(D - \{0\}) \subset X - Y \cup \{x\}$. On trouve alors une projection finie $p : (X,x) \longrightarrow (\mathbb{C}^2,0)$ assez générale du germe de X en x sur $(\mathbb{C}^2,0)$ telle que l'union de $p(Y \cup \{x\})$ et du discriminant de p soit un germe de courbe plane $(\Gamma,0)$ de $(\mathbb{C}^2,0)$ et que l'image de $(D,0)$ par $p\circ\varphi$ ne soit pas contenue dans $(\Gamma,0)$. On appelle X et U des représentants assez petits de (X,x) et $(\mathbb{C}^2,0)$ et p induit un morphisme fini de X sur U .

D'après la propriété (1.3.6) le faisceau constructible $\mathcal{F}$ est quasi-unipotent si et seulement si $p_*\mathcal{F}$ est quasi-unipotent. D'autre part $\varphi^{-1}\mathcal{F}$ est quasi-unipotent en 0 si $(p\circ\varphi)^{-1}p_*\mathcal{F}$ est quasi-unipotent en 0 . Comme $p_*\mathcal{F}$ est un système local sur $U-\Gamma$, il suffit de démontrer que le faisceau constructible $\mathcal{G}$ qui est égal à $p_*\mathcal{F}$ sur $U-\Gamma$ et qui est 0 sur Γ est quasi-unipotent.

En choisissant des coordonnées x et y de $\mathbb{C}^2$ en 0 convenables et un entier N , par le morphisme $(\mathbb{C}^2,0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2,0)$ défini par $(x,y) \longmapsto (x^N,y)$ l'image inverse de $(\Gamma,0)$ est une courbe $(\Gamma',0)$ de $(\mathbb{C}^2,0)$ qui est l'union d'un nombre fini de composantes non singulières (mais souvent tangentes). On est ramené à démontrer le résultat suivant :

(2.3.1) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau constructible sur U qui est un système local sur

$U-\Gamma$ où Γ est une union de courbes non singulières en 0 et qui est nul sur Γ. Soit C une branche analytique qui passe par 0 et qui n'est pas contenue dans Γ, la restriction de $\mathcal{F}$ à C est quasi-unipotente en 0.

(2.3.1.1) On démontre d'abord ce résultat dans le cas particulier où C est non singulière en 0 et transverse à Γ en 0. Ensuite en éclatant l'origine on constate que ceci donne que la monodromie est quasi-unipotente autour d'un point lisse du diviseur exceptionnel. On applique à nouveau le résultat dans le cas particulier traité aux points de la transformée stricte de Γ au-dessus de 0 et on procède ainsi jusqu'à ce que l'on ait résolu la singularité de Γ en 0 par $\pi : \tilde{U} \to U$ et que l'image inverse totale $\tilde{\Gamma}$ de Γ soit un diviseur à croisements normaux. On obtient ainsi que la monodromie autour de chacune des composantes de $\tilde{\Gamma}$ est quasi-unipotente ce qui démontre le résultat ci-dessus puisque $\tilde{U}-\tilde{\Gamma}$ est isomorphe à $U-\Gamma$ et, π étant propre, on peut relever les chemins analytiques.

Pour démontrer (2.3.1) quand C est non singulière en 0 et transverse à Γ en 0, M. Kashiwara donne une description combinatoire du groupe fondamental local de $U-\Gamma$ en 0 dans le cas où Γ est une union de courbes non singulières en 0. Pour cela on remarque qu'un résultat de O. Zariski et M. Lejeune-Jalabert donne dans ce cas particulier où les composantes de Γ sont non singulières en 0 que le groupe fondamental local en 0 de $U-\Gamma$ est déterminé par les nombres d'intersection $(\Gamma_i.\Gamma_j)$ en 0 $(i \neq j)$ des composantes $(\Gamma_i)_{1\leq i\leq m}$ de Γ en 0.

Remarquons que ces nombres d'intersection vérifient :

$$(\Gamma_i.\Gamma_j) = (\Gamma_j.\Gamma_i) > 0 \qquad (i \neq j)$$

et avec la convention $(\Gamma_i.\Gamma_i) = +\infty$:

$$(\Gamma_i.\Gamma_k) \geq \inf\left((\Gamma_i.\Gamma_j),(\Gamma_j.\Gamma_k)\right) \qquad (1 \leq i,j,k \leq n) .$$

Nous allons construire le groupe fondamental cherché de façon combinatoire (cf. [10]). Nous pouvons supposer $n \neq 0$.

(2.3.2) Soit $J = \{1,\dots,n\}$. Soit $m : J \times J \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ telle que :

1) $m(i,i) = +\infty \quad i \in J$,
2) $m(i,j) > 0 \quad i,j \in J$,
3) $m(i,j) = m(j,i) \quad i,j \in J$,
4) $m(i,j) \geq \inf(m(i,k),m(k,j)) \quad i,j,k \in J$.

On définit $m(i) = \max\limits_{j\neq i}\{m(i,j)\}$ (avec la convention si $n = 1$ que $m(1) = 0$). Soit $\mathfrak{S}_0$ l'ensemble des paires $\sigma = (I,p)$ où $I \subset J$ et $I \neq \emptyset$ et p est un entier positif ou nul tels que :

Il existe $i \in I$ tel que $p \leq m(i) + 1$ et $I = \{j \in J, m(i,j) \geq p\}$. On note $|\sigma| = I$ et $p(\sigma) = p$ si $\sigma = (I,p)$. On a $(J,0) = \sigma_0 \in \mathfrak{S}_0$ et c'est l'unique élément tel que $p(\sigma) = 0$.

On remarque :

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_0$, $\sigma \neq \sigma_0$, il existe un élément $A(\sigma) \in \mathfrak{S}_0$ unique tel que $|A(\sigma)| \supset |\sigma|$ et $p(A(\sigma)) = p(\sigma) - 1$.

En connectant σ et $A(\sigma)$ par une arête, on définit sur $\mathfrak{S}_0$ une structure d'arbre dans laquelle σ_0 et $\sigma_j = (\{j\}, m(j)+1)$ $(j = 1,\dots,n)$ sont les bouts.

(2.3.3) Soit $\mathfrak{S}$ un arbre fini[1]. On dit qu'un point $\sigma \in \mathfrak{S}$ est *intérieur* si σ n'est pas un bout. On dit que $\mathfrak{S}$ est *orienté* si pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}$ qui est intérieur on se donne sur l'ensemble $L(\sigma)$ des points de $\mathfrak{S}$ connectés à σ un ordre cyclique $L(\sigma) = \{\tau_1,\dots,\tau_N\}$. On dit que $\mathfrak{S}$ est enraciné si on pointe un bout σ_0 de $\mathfrak{S}$.

Si $(\mathfrak{S},\sigma_0)$ est un arbre fini orienté enraciné, on définit un groupe $G_0(\mathfrak{S},\sigma_0)$ engendré par les g_σ $(\sigma \in \mathfrak{S})$ avec les relations :

$$g_{\sigma_0} = 1,$$

$$g_\sigma g_\tau = g_\tau g_\sigma \quad \text{si } \sigma \text{ et } \tau \text{ sont connectés,}$$

$$g_\sigma^N = g_{\tau_1}\cdots g_{\tau_N} \quad \text{si } \sigma \text{ est intérieur et } L(\sigma) = \{\tau_1,\dots,\tau_N\} .$$

On remarque que la classe d'isomorphisme de $G_0(\mathfrak{S},\sigma_0)$ ne dépend pas de l'orientation sur $\mathfrak{S}$.

On a (cf. [10]) :

(2.3.4) Le groupe fondamental local de $U - \Gamma$ en 0 est isomorphe à $G_0(\mathfrak{S}_0,\sigma_0)$ où $\mathfrak{S}_0$ est le graphe défini dans (2.3.2) avec $m(i,j) = (\Gamma_i,\Gamma_j)$ $(i \neq j)$.

La démonstration de ce résultat utilise la description géométrique de $U - \Gamma$ et fait apparaître des configurations analogues aux carroussels de [15] (comparer aussi à [19]).

(2.3.5) Soit $\mathfrak{S}$ un arbre fini orienté. On définit le groupe $G(\mathfrak{S})$ engendré par les g_σ $(\sigma \in \mathfrak{S})$ avec les relations $g_\sigma g_\tau = g_\tau g_\sigma$ si σ et τ sont connectés et $g_\sigma^N = g_{\tau_1}\cdots g_{\tau_N}$ si σ est intérieur et $L(\sigma) = \{\tau_1,\dots,\tau_N\}$.

Notons $\gamma_\sigma = g_\sigma g_\tau^{-1}$ si σ est un bout de $\mathfrak{S}$ et τ est l'unique point de $\mathfrak{S}$ connecté à σ .

On a le résultat crucial :

(2.3.6) Soit $\mathfrak{S}$ un arbre fini orienté. Soit ρ une représentation de $G(\mathfrak{S})$ sur un espace vectoriel complexe V . Si $\rho(\gamma_\sigma)$ est quasi-unipotent pour tout bout de $\mathfrak{S}$, alors, pour tout couple de points connectés σ et τ , $\rho(g_\sigma g_\tau^{-1})$ est quasi-unipotent.

Pour démontrer ce dernier résultat on peut supposer que la représentation ρ est irréductible. On appelle I l'ensemble des valeurs propres des $\rho(g_\sigma)$ $(\sigma \in \mathfrak{S})$. Il existe alors un homomorphisme χ de $(\mathbb{C}^*,\times)$ dans $(\mathbb{Q},+)$ tel que, pour tout $a, b \in I$ tel que ab^{-1} ne soit pas une racine de l'unité on ait $\chi(a) \neq \chi(b)$.

Soit I' l'ensemble des valeurs propres des $\rho(g_\sigma)$ quand σ est intérieur

[1] ayant au moins deux éléments.

dans $\mathfrak{S}$. L'hypothèse de (2.3.6) implique que $\chi(I') = \chi(I)$ quand $\mathfrak{S}$ a au moins trois points. Pour montrer (2.3.6) il suffit de montrer que $\chi(I)$ ne contient qu'un point. Soit $c = \operatorname{Sup} \chi(I) = \operatorname{Sup} \chi(I')$.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}$. On note $V(\sigma)$ le sous-espace vectoriel des $v \in V$ pour lesquels il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ dont les racines sont dans $\chi^{-1}(c)$ et pour lequel $P(\rho(g_\sigma))(v) = 0$.

Comme g_σ et g_τ commutent si σ et τ sont connectés on a :

$$\rho(g_\tau)V(\sigma) = V(\sigma)$$

dans ce cas. Si σ est intérieur :

$$g_\sigma^N = \prod_{i=1}^{N} g_{\tau_i}$$

si $L(\sigma) = \{\tau_1,\ldots,\tau_N\}$. Donc :

$$\det\left(\rho(g_\sigma)_{|V(\sigma)}\right)^N = \prod_{i=1}^{N} \det\left(\rho(g_{\tau_i})_{|V(\sigma)}\right) .$$

Soient $d = \dim V(\sigma)$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_d$ les valeurs propres de $\rho(g_\sigma)_{|V(\sigma)}$ et $\mu_{1,i},\ldots,\mu_{d,i}$ celles de $\rho(g_{\tau_i})_{|V(\sigma)}$ on a :

$$N \sum_{i=1}^{d} \chi(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{d} \chi(\mu_{j,i}) .$$

Or $\chi(\lambda_i) = c \geq \chi(\mu_{j,i})$, $i = 1,\ldots,N$, $j = 1,\ldots,d$, donc $\chi(\mu_{j,i}) = c$, d'où $V(\sigma) \subset V(\tau_j)$. Donc si σ et τ sont connectés $V(\sigma) \subset V(\tau)$, donc $V' = V(\sigma)$ ne dépend pas du point $\sigma \in \mathfrak{S}$ intérieur. Donc V' est invariant par $\mathfrak{S}$ d'où $V' = V$ puisque ρ est irréductible et que $c \in \chi(I')$ implique $V' \neq 0$. D'où $\chi(I) = \{c\}$.

Le théorème (2.1) résultera alors du corollaire :

(2.3.7) *Soit* $(\mathfrak{S},\sigma_0)$ *un arbre fini orienté et enraciné et soit* ρ *une représentation complexe de* $G_0(\mathfrak{S},\sigma_0)$ *de dimension finie. Si* $\rho(\gamma_\sigma)$ *est quasi-unipotent pour tous les bouts* $\sigma \neq \sigma_0$, *alors pour tous* σ , τ *connectés,* $\rho(g_\sigma g_\tau^{-1})$ *est quasi-unipotent.*

Le théorème (2.1) résulte de (2.3.7) en remarquant que la courbe C non singulière en 0 dans (2.3.1.1) donne dans le groupe fondamental local de $U - \Gamma$ en 0 l'élément g_σ qui correspond à l'unique σ connecté à σ_0 dans l'arbre $\mathfrak{S}_0$ de (2.3.2).

La preuve de (2.3.7) est immédiate en considérant l'arbre $\mathfrak{S}''$ obtenu comme union de $\mathfrak{S} - \{\sigma_0\}$ et de l'arbre fini orienté et enraciné $(\mathfrak{S}',\sigma_0)$ obtenu à partir de $\mathfrak{S}$ avec l'orientation opposée. On a alors un homomorphisme $\xi : G(\mathfrak{S}'') \to G_0(\mathfrak{S},\sigma_0)$ tel que $\xi(g_\sigma) = g_\sigma$ si $\sigma \in \mathfrak{S} - \{\sigma_0\}$ et $\xi(g_\sigma) = g^{-1}$ si $\sigma \in \mathfrak{S}'$. On utilise alors le résultat de (2.3.6) appliqué à $\mathfrak{S}''$.

3. Le théorème de la monodromie

Dans le "langage" des faisceaux constructibles quasi-unipotents on peut énoncer le théorème de la monodromie.

(3.1) Pour cela nous allons définir le niveau d'unipotence d'un faisceau constructible quasi-unipotent (cf. [6]) :

(3.1.1) DÉFINITION.— *Soit* X *un espace analytique complexe. Soit* $Y \subset X$ *un sous-espace analytique fermé*[1]*. Soit* $\mathcal{L}$ *un système local sur* $X - Y$ *. On dit que* $\mathcal{L}$ *est quasi-unipotent* de niveau d'unipotence m le long de Y *si dans une résolution des singularités* $\pi : \tilde{X} \to X$ *de* X *telle que* $\pi^{-1}(Y)$ *soit un diviseur à croisements normaux, les transformations de monodromie* T *autour des composantes de* $\pi^{-1}(Y)$ *vérifient :*

$$\exists\, N \ , \quad (T^N - \mathrm{Id})^{m+1} = 0 \ .$$

(3.1.2) DÉFINITION.— *Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau constructible sur* X *et* $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ *une stratification de* X *par des sous-espaces analytiques complexes non singuliers tels que* $\mathcal{F}_{|X_\alpha}$ *soit un système local. On dit que* $\mathcal{F}$ est quasi-unipotent de niveau m *si le système local* $\mathcal{F}_{|X_\alpha}$ *est quasi-unipotent de niveau* m *le long de* $\overline{X}_\alpha - X_\alpha$.

Le théorème géométrique de la monodromie démontré par C.H. Clemens dans [4] ou A. Landman dans [13] peut s'énoncer :

(3.1.3) THÉORÈME (Théorème de la monodromie).— *Soit* $f : X \to D$ *un morphisme analytique propre d'une variété analytique complexe sur un disque* D *de* $\mathbb{C}$ *centré en* 0 *. Les faisceaux* $R^p f_* \mathbb{C}_X$ *sont constructibles sur* D *et quasi-unipotents de niveau* $\inf(p, 2n-p)$ *en* 0 *où* $n = \dim X - 1$.

La démonstration de ce théorème utilise la résolution des singularités d'Hironaka. Une version algébrique est obtenue par A. Grothendieck dans [9].

La version "faible" de ce théorème qui ne concerne que la quasi-unipotence (et non pas son niveau) est conséquence du résultat plus général (cf. [10] § 2 ou [6]) déjà signalé en (1.3.8) :

(3.1.4) THÉORÈME.— *Soit* $f : X \to Y$ *une application analytique propre et soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau constructible quasi-unipotent sur* X *, les faisceaux* $R^p f_* \mathcal{F}$ *sont constructibles et quasi-unipotents sur* Y *pour tout* $p \in \mathbb{N}$.

Un avatar de ce dernier théorème, avec le théorème de fibration de Milnor (cf. [17]) donne que la monodromie locale d'une singularité d'hypersurface dans $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ est quasi-unipotente (comparer à [3] et [8]). La méthode de C.H. Clemens donne également dans ce cas le niveau de quasi-unipotence $\leq n$. En fait pour un germe de fonction analytique $f : (X,x) \longrightarrow (\mathbb{C},0)$, on a aussi un théorème de fibration locale (cf. [14]), et la monodromie locale des faisceaux constructibles $R^p f_* \mathbb{C}_X$ est quasi-unipotente. La méthode des carroussels de [15] donne

[1] *nulle part dense.*

que le niveau d'unipotence est égal à p . On a donc :

(3.1.5) THÉORÈME (Théorème de la monodromie locale).— *Soit* $f : (X,x) \longrightarrow (\mathbb{C},0)$ *un germe de fonction analytique. Si* $f : X \to D$ *est un représentant convenable de* (X,x) *, le faisceau* $R^p f_* \mathbb{C}_X$ *est constructible sur un voisinage* D *de* 0 *dans* $\mathbb{C}$ *et est quasi-unipotent de niveau* p *en* 0 *.*

Dans cet énoncé on n'a plus l'hypothèse que X est non singulier ou que les fibres génériques de f sont non singulières.

(3.2) Les techniques de [15] conduisent en fait à :

(3.2.1) THÉORÈME.— *Soit* $f : (X,x) \longrightarrow (\mathbb{C},0)$ *un germe de fonction analytique sur* (X,x) *. Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau constructible sur* X *quasi-unipotent de niveau* m *en* x *. Si* X *est un représentant convenable de* (X,x) *, le faisceau* $R^p f_* \mathcal{F}$ *est constructible sur un voisinage* U *de* 0 *dans* $\mathbb{C}$ *et est quasi-unipotent de niveau* $m+p$ *.*

(3.2.2) On a une version algébrique de ce résultat démontrée par P. Deligne dans [6] et N. Nilsson dans [20].

(3.3) Nous n'aborderons pas ici les estimations du niveau d'unipotence obtenues sous certaines hypothèses analytiques comme dans [12] (comparer à [8] conjecture (8.4) et [21]). Signalons aussi la relation entre la monodromie et la b-fonction obtenue par B. Malgrange : ceci donne aussi la quasi-unipotence de la monodromie et des renseignements sur les diviseurs élémentaires.

Je remercie N. A'Campo, O. Gabber et J.-L. Verdier pour m'avoir signalé des corrections à faire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. ANGENIOL *Théorème de finitude en cohomologie étale (d'après P. Deligne)*, in Séminaire Douady-Verdier, Exposé VII, 1974-75, Astérisque 36-37.

[2] M. ARTIN *Faisceaux constructibles. Cohomologie d'une courbe algébrique*, in Séminaire de Géométrie Algébrique (SGA IV), Springer-Verlag, Lecture Notes n° 305, Berlin and New York, 1973.

[3] E. BRIESKORN *Die Monodromie der isolierter Singularitäten von Hyperflächen*, Manuscripta Math. 29(1970), 103-162.

[4] C.H. CLEMENS *Picard-Lefschetz theorem for families of non singular algebraic varieties acquiring ordinary singularities*, Trans. Amer. Math. Soc. 136 (1969), 93-108.

[5] P. DELIGNE *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, Springer-Verlag, Lecture Notes n° 163, Berlin and New York, 1970.

[6] P. DELIGNE *Lettre à N. Nilsson du 9 juillet 1971*, et *Exposant de monodromie* (manuscrit non publié).

[7] P.A. GRIFFITHS *Periods of integrals on algebraic manifolds*, Mimeographed notes at Berkeley (1965-66), 315 pages including 30 examples.

[8] P.A. GRIFFITHS *Periods of integrals on algebraic manifolds : summary of results and discussion of open problems*, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 228-296.

[9] A. GROTHENDIECK Séminaire de Géométrie Algébrique (SGA VII-1), Résumé des premiers exposés de A. Grothendieck, rédigé par P. Deligne, Springer-Verlag, Lecture Notes 288, Berlin and New York, 1972.

[10] M. KASHIWARA *Quasi-Unipotent constructible sheaves*, preprint, R.I.M.S. Kyoto University (1980).

[11] M. KASHIWARA *On the maximally overdetermined systems of linear differential equations* I, Publ. R.I.M.S. 10, Kyoto University (1975), 563-579.

[12] N. KATZ *Nilpotent connections and the monodromy theorem. Applications of a result of Turittin*, Publ. I.H.E.S. 39(1970), 175-132.

[13] A. LANDMAN *On Picard-Lefschetz transformation for algebraic manifolds acquiring general singularities*, Trans. Amer. Math. Soc. 181(1973), 89-126.

[14] LÊ D.T. *Remarks on relative monodromy*, in Real and complex singularities, Ed. by P. Holm, Nordhoff Publ. 1977.

[15] LÊ D.T. *The geometry of the monodromy theory*, in C.P. Ramanujam, a tribute, Stud. in Math. n° 8, Tata Institute, Bombay (1978), 157-173, et *Le théorème de la monodromie singulier*, C.R. Acad. Sci. 288(1979), 985-988.

[16] Z. MEBKHOUT Thèse, Université Paris VII, 1979, et *Sur le problème de Hilbert-Riemann*, C.R. Acad. Sci. Paris 290(1980), 415-417.

[17] J. MILNOR *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. Math. Stud. 61, Princeton (1968).

[18] D. MUMFORD *The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity*, Publ. I.H.E.S. 9(1961), 5-246.

[19] N. NILSSON *Some growth and ramification properties of certain integrals on algebraic manifolds*, Ark. för Math. 5(1965), 463-476.

[20] N. NILSSON *Monodromy and asymptotic properties of certain multiple integrals*, Ark. för Math. 18(1980), 181-198.

[21] J. SCHERK *On the monodromy theorem for isolated hypersurface singularities*, Inv. Math. 58(1980), 181-198.