JOHN W. MORGAN

Actions de groupes finis sur S^3 : la conjecture de P. A. Smith

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. nº 578, p. 277-289

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1980-1981__23__277_0>

Séminaire BOURBAKI
33e année, 1980/81, n° 578

ACTIONS DE GROUPES FINIS SUR S^3 : LA CONJECTURE DE P.A. SMITH [d'après Thurston et Meeks-Yau]

par John W. MORGAN

I- Remarques préliminaires : Soit S^3 la sphère de rayon unité dans $\mathbb{R}^4$: $S^3 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 1\}$. Soit $\phi : S^3 \to S^3$ un difféomorphisme (non-identité) qui soit périodique ($\phi^n = \mathrm{id}$ pour un certain n) et qui conserve l'orientation de S^3. On note par $F(\phi)$ l'ensemble des points fixes de ϕ. P.A. Smith a montré que $F(\phi)$ est soit vide soit un noeud, c.-à.-d. l'image du cercle par un plongement différentiable dans S^3. Il a posé la question suivante : lorsque $F(\phi)$ est un noeud, est-il nécessairement trivial? (Un noeud trivial est un noeud isotopique au plongement linéaire de S^1 dans S^3.) L'affirmative s'appelle LA CONJECTURE DE SMITH.

Nous utiliserons souvent par la suite le lemme de Dehn démontré par Papakyriakopoulos.

Lemme de Dehn: Soit V une variété différentiable de dimension 3 avec bord ∂V. Supposons que $\pi_1(\partial V) \to \pi_1(V)$ ait un noyau non-trivial. Alors, il existe un plongement $i:(D^2,\partial D^2) \hookrightarrow (V,\partial V)$ tel que $i(\partial D^2) \subset \partial V$ représente un élément non-trivial dans $\pi_1(\partial V)$.

Comme conséquence de ce lemme on obtient l'équivalence des trois énoncés suivants pour un noeud K dans S^3 :

(1) Il est trivial.

(2) Il est le bord d'un disque plongé dans S^3.

(3) Le complémentaire d'un voisinage tubulaire de K est difféomorphe à $S^1 \times D^2$.

Supposons maintenant que $F(\phi)$ soit non-vide. Il est évident que, si l'action du groupe engendré par ϕ sur S^3, $\langle\phi\rangle$, est conjuguée par un difféomorphisme de S^3 à une action orthogonale (c.-a.-d. l'action d'un sous-groupe de $SO(4)$ sur S^3), alors $F(\phi)$ sera un noeud trivial. Montrons la réciproque. Il est possible de choisir une métrique riemannienne sur S^3 qui soit invariante par ϕ (on prend n'importe quelle métrique et forme la moyenne sous l'action de ϕ). Pour $\varepsilon>0$ convenable, le ε-voisinage $\overline{U}_\varepsilon$ de $F(\phi)$ est un tore solide. De plus, on peut choisir un difféomorphisme $\bar{\upsilon}_\varepsilon \approx S^1 \times D^2$ tel que l'action de ϕ devienne $\phi(\theta,z) = (\theta,(\exp(2\pi ik/n))z)$ où n est la période de ϕ et $(k,n) = 1$. Soit r un entier tel que $rk = 1(n)$. Le difféomorphisme ϕ^r est aussi périodique et, selon le théorème de Smith [10], $F(\phi^r)$ est également un cercle. Donc $F(\phi) = F(\phi^r)$. En remplaçant ϕ par ϕ^r, on peut supposer que l'action de ϕ sur $\bar{\upsilon}_\varepsilon$ soit donnée par $\phi:(\theta,z) \to (\theta,(\exp(2\pi i/n))z)$. L'action du groupe engendré par ϕ, $\langle\phi\rangle$, sur $S^3 - \upsilon_\varepsilon$ est libre. Le quotient Q est une variété de dimension 3 avec un revêtement cyclique d'ordre n qui est un tore solide. En appliquant à nouveau le lemme de Dehn, on obtient que Q lui-même est un tore solide. Ceci entraine qu'il existe un difféomorphisme $S^3 - \upsilon_\varepsilon \approx S^1 \times D^2$ tel que ϕ soit donné par $\phi(\theta,z) = (\theta+(2\pi/n),z)$. Or, nous avons une décomposition de S^3 invariante par ϕ : $S^3 \approx S^1 \times D^2 \cup D^2 \times S^1$. L'action de $\langle\phi\rangle$ induite sur les deux éléments de cette décomposition est standard, ce qui permet de voir que $\langle\phi\rangle$ est conjugué à un groupe de difféomorphismes orthogonaux sur S^3.

II - <u>Les énoncés</u> : Soit $\Phi : G \times S^3 \to S^3$ une action différentiable du groupe G sur S^3. Cette action est dite <u>linéaire</u> si et seulement s'il existe un difféomorphisme $\Psi : S^3 \to S^3$ tel que la conjuguaison de Φ par Ψ donne une action par difféomorphismes orthogonaux sur S^3. De la discussion précédente, il est clair que la conjecture de Smith est une conséquence du théorème suivant:

<u>Théorème 1</u>: <u>Soit</u> G <u>un groupe fini abélien</u>. <u>Soit</u> $\Phi : G \times S^3 \to S^3$ <u>une action effective</u>, <u>différentiable</u>, <u>conservant l'orientation</u>. <u>Si l'action est non-libre</u>, <u>alors elle est linéaire</u>.

L'idée de la preuve de ce théorème est due à Thurston. Elle repose, d'une manière fondamentale, sur son théorème de l'existence de structures hyperboliques pour des variétés de dimension trois. La preuve repose aussi sur un théorème de Bass sur des sous-groupes de $GL_2(\mathbb{C})$ (théorie arboréale de Bass -Serre), inspiré par P. Shalen, et sur un théorème de Meeks-Yau (version équivariante du lemme de Dehn). En se servant des mêmes idées et d'un théorème de Dickson sur les sous-groupes de $PSL_2(\mathbb{F})$, où $\mathbb{F}$ est un corps fini, on montre un autre résultat du même genre:

Théorème 2: Soit G un groupe fini et soit $\Phi : G \times S^3 \to S^3$ une action effective, différentiable et conservant l'orientation. Supposons que, pour tout x dans S^3, le groupe G_x, qui laisse invariant x, soit cyclique ou dihédral et supposons qu'un des G_x cycliques soit d'ordre différent de 1,2,3, ou 5. Alors l'action est linéaire.

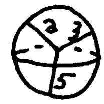
Ce théorème dans le cas où tous les G_x sont cycliques et au moins l'un d'eux est d'ordre > 5 est dû à M. Davis-J.Morgan [2]. Les autres cas sont dus à M. Feighn [5].

Remarque: Toutes les actions connues de groupes finis sur S^3 sont linéaires.

III - Généralités sur les actions de groupes finis sur une variété de dimension 3 :

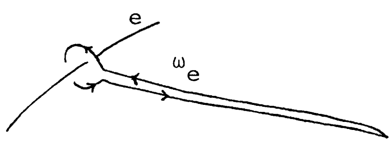
Soit $\tilde{V}$ une variété de dimension trois et soit $G \times \tilde{V} \to \tilde{V}$ une action différentiable, effective, proprement discontinue et conservant l'orientation. Le sous-groupe $G_x \subset G$ agit sur l'espace tangent à x, $T\tilde{V}_x$, d'une manière linéaire et effective. Donc, G_x a une représentation fidèle dans $GL_3^+(\mathbb{R})$. Comme l'action est proprement discontinue, G_x est fini. Il s'ensuit que G_x est cyclique, dihédral, tetrahédral, octahédral ou icosahédral. La liste suivante donne la structure locale de $\tilde{V}/G$ dans un voisinage de l'image de x:

GROUPE G_x	QUOTIENT AUTOUR DE x
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	
dihédral d'ordre 2n	
tétrahédral	
octahédral	

icosahédral 

Les arcs sont les orbites non-libres, et les entiers associés sont les ordres de leurs groupes d'isotropie (qui sont toujours cycliques).

Une conséquence de cette liste est que $\tilde{V}/G$ est une variété fermée de dimension trois. L'ensemble de points exceptionnels $\{x \mid G_x \neq e\}$ est un graphe dans V. A chaque côté de ce graphe est associé un entier ≥ 2. Dans un voisinage d'un sommet, on retrouve une des situations de la liste précédente (à un isomorphisme près). Ici, notre "graphe" peut avoir plusieurs composantes. Parmi ces composantes, il peut y avoir des cercles, considérés comme composantes ayant un côté et pas de sommets. Soit V une variété, X un graphe dans V, α une application qui, à chaque côté du graphe associe un entier. Notons (V,X,α) le triplet ainsi formé. Si (V,X,α) est localement isomorphe à l'un des triplets décrits précédemment, alors il est appelé "orbifold". Définissons son groupe fondamental, noté $\pi_1^{orb}(V,X,\alpha)$. Soit $\Gamma = \pi_1(V-X)$. Pour chaque côté e de X, il y a un élément ω_e dans Γ défini à une conjuguaison et à une inversion près :



Nous définissons $\pi_1^{orb}(V,X,\alpha)$ par $\Gamma/\{\omega_e^{\alpha(e)} \mid e$ est un côté de X$\}$. Ce groupe est le groupe qui classifie les revêtements de V ramifiés au dessus de X, l'indice de ramification au-dessus de e étant un diviseur de $\alpha(e)$. On a un revêtement universel de ce type: $\tilde{V}_{univ} \to V$. Le groupe $\pi_1^{orb}(V,X,\alpha)$ est le groupe d'automorphismes de $\tilde{V}_{univ}$ sur V. Le quotient de $\tilde{V}_{univ}$ par ce groupe est V et le groupe d'isotropie au-dessus de e est cyclique, d'ordre divisant $\alpha(e)$. Si, pour chaque côté e de X, l'ordre du groupe d'isotropie au-dessus de e est égal à $\alpha(e)$, on dit que (V,X,α) est un <u>bon orbifold</u>. Dans ce cas, le triplet défini par l'action de $\pi_1^{orb}(V,X,\alpha)$ sur $\tilde{V}_{univ}$ redonne (V,X,α).

Soit K un sous-groupe de $\pi_1^{orb}(V,X,\alpha)$. Le quotient $\tilde{V}_{univ}/K$ est un orbifold; notons-le (V_K,X_K,α_K). On a un revêtement ramifié au-dessus de X , $p_K:V_K \to V$. Quand (V,X,α) est un bon orbifold, on a pour chaque côté e_K de X_K la formule suivante :

$$\alpha(p_K(e_K) = (\alpha_K(e_K)).(\text{l'ordre de ramification de } p_K \text{ à } e_K).$$

L'étude d'actions des groupes finis (qui conservent l'orientation) sur les variétés fermées et simplement connexes de dimension 3 revient à l'étude de bons orbifolds (V,X,α), ayant un groupe fondamental fini.

IV - Un cas spécial : On commence la démonstration des Théorèmes 1 et 2 en considérant le cas spécial suivant:

Théorème 3: Soit V^3 une variété fermée, simplement connexe ; soit $X \subset V$ un noeud tel que V-X soit irréductible* ; soit n un entier ≥ 2 associé à X . Supposons que $\pi_1^{orb}(V,X,n)$ soit un groupe fini. Alors le revêtement universel de V est difféomorphe à S^3 et l'action de $\pi_1^{orb}(V,X,n)$ sur S^3 est linéaire si l'une des conditions suivantes est vérifiée:

(a) $\pi_1^{orb}(V,X,n)$ est abélien.

(b) $n \neq 2,3,$ ou 5.

L'idée de la démonstration: On montre que V - X a une structure de fibration de Seifert [7]. Il est facile d'en déduire que $\tilde{V}_{univ}$ est difféomorphe à S^3 et que l'action est linéaire. Il suffit de regarder la classification de ces fibrations. Esquissons ici la démonstration que V-X a une structure de fibration de Seifert.

Supposons qu'il existe une sphère $S \subset V$ qui coupe X transversalement en deux points. Cette sphère définit une décomposition $(V,X) \cong (V_1,X_1)\#(V_2,X_2)$**. La paire (V,X) est dite réductible s'il existe une telle décomposition où ni (V_1,X_1) ni (V_2,X_2) n'est homéomorphe à la paire linéaire (S^3,S^1). Il est facile de voir que (V,X) se décompose en un nombre fini de paires irréductibles: $(V,X) \cong (V_1,X_1)\#\cdots\#(V_t,X_t)$. Les groupes fondamentaux se décomposent aussi de la manière suivante:

$$\pi_1^{orb}(V,X,n) = \pi_1^{orb}(V_1,X_1,n) \underset{Z/nZ}{*} \cdots \underset{Z/nZ}{*} \pi_1^{orb}(V_t,X_t,n).$$

Comme $\pi_1^{orb}(V,X,n)$ est fini, tous les groupes de cette décomposition,

* i.e. chaque sphère $S^2 \subset V-X$ est le bord d'une boule $B^3 \subset V-X$.

** Pour former $(V_1,X_1) \# (V_2,X_2)$ on enlève de chaque paire standard (D^3,D^1) et puis on les recolle le long des bords.

sauf un, doivent être isomorphes à Z/nZ. Ce dernier est isomorphe à $\pi_1^{orb}(V,X,n)$. Il suffit donc de montrer le Théorème 3 pour (V,X,n) avec (V,X) irréductible.

On suppose maintenant que (V,X) soit irréductible. Si $\tilde{V}$ est le revêtement cyclique d'ordre n de V ramifié au dessus de X, alors on a la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \pi_1(\tilde{V}) \longrightarrow \pi_1^{orb}(V,X,n) \longrightarrow Z/nZ \longrightarrow 1.$$

Par conséquent, $\pi_1^{orb}(V,X,n)$ est fini si et seulement si $\pi_1(\tilde{V})$ est fini. Le groupe Z/nZ agit sur $\tilde{V}$ avec points fixes $\tilde{X}$, image réciproque de X dans $\tilde{V}$. Soit U le complémentaire dans V d'un voisinage tubulaire de X. Soit $\tilde{U}$ son image réciproque. On sait que U est une variété compacte dont le bord est un tore. D'après un théorème de Jaco-Shalen [7] et de Johannson [8], trois possibilités se présentent:

(1) U a une structure de fibration de Seifert.

(2) Il existe un tore dans U qui n'est pas parallèle au bord de U et qui est incompressible (c.-a.-d. son groupe fondamental s'injecte dans $\pi_1(U)$).

(3) Chaque sous-groupe abélien mais non-cyclique de $\pi_1(U)$ est conjugué à un sous-groupe de l'image de $\pi_1(\partial U)$ dans $\pi_1(U)$.

D'après le grand théorème de Thurston [12], nous pouvons remplacer la propriété (3) ci-dessus par son équivalent:

(3') L'intérieur de U a une structure hyperbolique complète et de volume fini.

Nous démontrons l'existence d'une structure de fibration de Seifert sur U (ou sur $V-X$) en montrant que les cas (2) et (3') sont impossibles. Or, ceux-ci sont contenus dans les deux cas suivants:

(a) U contient une surface fermée, orientable et suffisamment grande Z (c.-à.-d. $\pi_1(Z) \neq 1$ et $\pi_1(Z) \to \pi_1(U)$ est une injection) et non-parallèle au bord de U.

(b) U a une structure hyperbolique et ne contient pas de surface à la fois suffisamment grande et non-parallèle au bord.

Pour exclure (a) nous nous servons du Lemme de Dehn Equivariant dû à Meeks-Yau [9].

<u>Lemme de Dehn Equivariant</u>: <u>Soit</u> W <u>une variété de dimension</u> 3; <u>soit</u> $G \times W \to W$ <u>une action différentiable d'un groupe fini; soit</u> $Y \subset W$ <u>une surface fermée et invariante par</u> G. <u>Supposons qu'il existe une composante de</u> Y <u>qui soit compressible dans</u> W. <u>Alors, il existe une union disjointe de disques dans</u> W <u>invariante par</u> G, <u>telle que:</u>

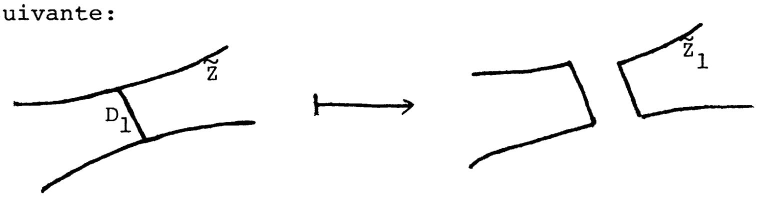
(i) <u>L'intersection de cette union avec</u> Y <u>est l'union des bords des disques</u>.

(ii) <u>Chaque bord d'un disque représente un élément non-trivial dans</u> $\pi_1(Y)$.

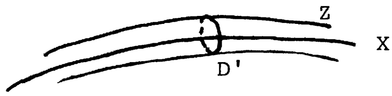
Admettons ce lemme.

Si l'action de G sur W est effective et conserve l'orientation, alors le sous groupe G_o de G qui laisse invariante une composante D de l'union est cyclique. Si G_o est non trivial, son action sur D admet un point fixe.

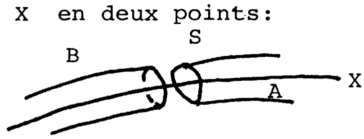
Revenons à notre situation. On a une surface connexe et incompressible $Z \subset U$. Considérons $\tilde{Z} \subset \tilde{U} \subset \tilde{V}$. Comme $\pi_1(\tilde{V})$ est fini, il existe une composante de Z qui est compressible. Comme $\tilde{Z} \subset \tilde{U}$ est incompressible, chaque disque qui satisfait aux conditions (i) et (ii) du Lemme de Dehn Equivariant doit rencontrer X. Alors, d'après ce lemme, il existe un disque $(D_1, \partial D_1) \subset (\tilde{V}, \tilde{Z})$ invariant par l'action de Z/nZ qui satisfait aux conditions (i) et (ii) ci-dessus. Nous formons $\tilde{Z}_1$ par la chirurgie suivante:



Evidemment $\tilde{Z}_1$ est encore invariante par Z/nZ. Si $\tilde{Z}_1$ a une composante non simplement connexe, répétons le même procédé. Après un nombre fini d'opérations $\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \ldots, \tilde{Z}_t$, on obtient une surface $\tilde{Z}_t$ invariante par Z/nZ qui est une union de sphères. Comme chaque disque $D_1, D_2, \ldots, D_t$ dans ce procédé doit rencontrer $\tilde{X}$ en un point, il s'ensuit que chaque composante de $\tilde{Z}_i$, $i \geq 1$, doit rencontrer $\tilde{X}$, et, par conséquent, est invariante par Z/nZ. Finalement, chaque sphère de $\tilde{Z}_t$ est invariante par Z/nZ et l'action de Z/nZ a deux points fixes sur chaque sphère. Supposons qu'il y ait d composantes de $\tilde{Z}_t$. Alors, $\tilde{Z}_t \cap X$ consiste en $2d$ points. Comme $\#(\tilde{Z}_i \cap \tilde{X}) = \#(\tilde{Z}_{i-1} \cap \tilde{X}) + 2$, on a : $t = d$. Chaque chirurgie ajoute deux à la caractéristique d'Euler. Or, $\chi(\widetilde{Z}_t) = 2d + \chi(\widetilde{Z})$. D'autre part, on sait que $\chi(\widetilde{Z}_t) = 2d$. Il s'ensuit que $\chi(\widetilde{Z}) = 0$, et donc que $\chi(Z) = 0$, c.-à.-d. Z est un tore. Soit $D' \subset V$ l'image du disque $D_1 \subset \widetilde{V}$. L'intersection $D' \cap X$ est transversale et consiste en un point:



Si on fait une chirurgie sur Z en utilisant D', on obtient une sphère $S \subset V$ qui coupe X en deux points:



Soient A et B les deux composantes connexes de $V-S$. Parce que (V,X) est irréductible, on sait que, soit $(A, A \cap X)$, soit $(B, B \cap X)$ est homéomorphe à la paire linéaire (D^3, D^1). Si c'est $(A, A \cap X)$, on voit immédiatement que Z est parallèle au bord de U. Si c'est $(B, B \cap X)$, on voit que Z n'est pas incompressible dans $V-X$ et, par conséquent, Z n'est pas incompressible dans U. Ceci démontre que le cas (a) est impossible.

Considérons maintenant le cas (b). La structure hyperbolique sur $V - X$ donne une représentation fidèle de $\pi_1(V-X) = \Gamma$ dans $PSL_2(\mathbb{C})$. D'après un théorème de Bass [1] il y a, à priori, quatre possibilités:

(i) Il existe une surjection de Γ dans $\mathbb{Z}$ dont le noyau contient tous les éléments de Γ dont l'image dans $PSL_2(\mathbb{C})$ est unipotente.

(ii) Γ (considéré comme sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{C})$ via la représentation) est conjugué à un groupe de matrices triangulaires.

(iii) Γ se décompose non trivialement sous la forme $\Lambda_1 *_H \Lambda_2$ où H s'injecte dans Γ de sorte que chaque sous-groupe unipotent de Γ soit conjugué à un sous-groupe de Λ_1 ou de Λ_2.

(iv) Γ est conjugué à un sous-groupe de $PSL_2(\mathcal{O}_K)$ où $\mathcal{O}_K$ est l'anneau des entiers d'un corps de nombres $K \subset \mathbb{C}$.

Les possibilités (i), (ii), et (iii) ne sont pas réalisables dans notre situation (cas(b)). Comme $\pi_1(V) = 1$, Γ est normalement engendré par l'élément ω_X (le méridien autour de X). Cet élément est unipotent sous la représentation donnée par la structure hyperbolique.

Donc, (i) est impossible. Comme Γ est le groupe fondamental d'une variété hyperbolique complète de volume fini, il ne peut pas être résolu. Ceci contredit la possibilité (ii). Si Γ se décomposait comme dans la possibilité (iii), d'après un théorème de Stallings [11] et d'Epstein [4], il existerait une surface fermée $Z \subset V - X$, à la fois incompressible et non parallèle au bord. C'est exclu par l'hypothèse (b).

Il ne reste que la possibilité (iv): Γ dans $PSL_2(\mathbb{C})$ est conjugué à un sous-groupe de $PSL_2(\mathcal{O}_K) \subset PSL_2(K) \subset PSL_2(\mathbb{C})$. Nous changeons la représentation de Γ de sorte que Γ devient un sous-groupe de $PSL_2(\mathcal{O}_K)$. Soit $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ un idéal premier contenant n. Considérons l'application:

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma & \longrightarrow & PSL_2(\mathcal{O}_K) & \longrightarrow & PSL_2(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \omega_X & & \longrightarrow & & \nu \end{array}$$

Le quotient $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ est un corps fini, noté F. La caractéristique de F est p où $(p) = \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$. Evidemment $p|n$. L'élément $\omega_X \in \Gamma$ est de trace 2 dans $PSL_2(\mathcal{O}_K)$ et donc son image $\nu \in PSL_2(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})$ est aussi de trace 2. Ceci implique que ν est conjugué à une matrice de la forme:

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour un certain $x \in F$. Soit H l'image de Γ dans $PSL_2(F)$. Il est normalement engendré par ν. D'après un théorème de Dickson [3], il y a quatre possibilités pour H:

(α) H est cyclique.

(β) H est conjugué à $PSL_2(F')$, où F' est un sous corps de F.

(γ) $p = 3$ et H est isomorphe au groupe simple d'ordre 60, A_5.

(δ) $p = 2$ et H est isomorphe à A_5 ou bien à un groupe dihédral.

Nous considérons ces quatre possibilités et montrons que, sous les hypothèses du Théorème 3, chacune d'elles est impossible. Cela montrera que $V - X$ n'a pas de structure hyperbolique complète de volume fini. Comme $\nu \in H$ est de trace 2, $\nu^p = 1$. Il s'ensuit que $\nu^n = 1$. Donc, la représentation $\Gamma \longrightarrow PSL_2(F)$ se factorise comme $\Gamma \longrightarrow \Gamma/\{\omega_X^n\} \longrightarrow PSL_2(F)$. Mais $\Gamma/\{\omega_X^n\}$ est exactement $\pi_1^{orb}(V,X,n)$, noté G par la suite. La représentation $G \twoheadrightarrow H \longrightarrow PSL_2(F)$ nous donne un revêtement de V ramifié au-dessus de X: notons le (V',X',α). Maintenant on est prêt à considérer les quatre possibilités.

(α) H <u>est cyclique</u>: Dans ce cas, $\pi : V' \to V$ est un revêtement cyclique d'ordre p ou 1. Il est facile de voir que $H_1(V'; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$. Soit

U' la variété $V' - \pi^{-1}(X)$. Le groupe fondamental de U', Γ', est le noyau de $\Gamma \longrightarrow PSL_2(\mathcal{O}_K) \longrightarrow PSL_2(F)$. Donc, Γ' consiste en matrices congruentes à l'identité modulo $\mathfrak{p}$. Un tel groupe est résiduellement p-nilpotent. D'autre part, $\Gamma'/[\Gamma',\Gamma'] = H_1(U')$. Parce que $H_1(V';\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est nul, il s'ensuit que $H_1(U') \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si un groupe satisfait à ces deux propriétés, alors il est abélien. Or, Γ', étant le groupe fondamental d'une variété hyperbolique de volume fini, ne peut pas être abélien. Le cas (α) ne se présente donc pas.

(β pour $p > 5$) $p > 5$ et H est non cyclique: Dans ce cas, le revêtement ramifié $V' \to V$ est normal de groupe d'automorphismes $PSL_2(F')$ où F' est un corps de caractéristique p. De plus, un élément d'ordre p dans F' agit avec un cercle de points fixes. Le normaliseur d'un tel élément opère librement sur un tore qui est le bord d'un voisinage tubulaire équivariant de ses points fixes. Cela implique que le normaliseur d'un élément d'ordre p est abélien, ce qui n'est pas vrai pour $p > 5$. Ce cas est donc exclu.

(β,γ et δ pour $p \leq 5$) $p \leq 5$ et H est non cyclique: Comme n est différent de 2,3, et 5, on a que $p \neq n$. Soit h l'ordre de H et soit q l'ordre du normaliseur d'un élément d'ordre p dans H. On sait que X' a h/q composantes. De plus, l'application α associe à chaque composante de X' le nombre n/p. Comme $\pi_1^{orb}(V',X',\alpha)$ est fini, il est impossible pour X' d'avoir trois composantes si $n/p > 2$, ou d'avoir quatre composantes si $n/p = 2$. Supposons, par exemple, que X' ait trois composantes et $n/p = r > 2$. Il y aurait une surjection $\pi_1^{orb}(V',X',\alpha) \longrightarrow (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})$. L'orbifold associé au noyau de cette application aurait au moins r cercles, chacun avec l'entier r associé. On pourrait, alors, répéter cette construction indéfiniment, ce qui contredit le fait que $\pi_1^{orb}(V',X',\alpha)$ est fini. Un raisonnement similaire exclut le cas où X' a quatre composantes et $n/p = 2$.

D'autre part, dans les cas (β), (γ), (δ), $h/q \geq 3$. D'après la discussion précédente, la seule possibilité est : $h/q = 3$ et $n/p = 2$. Elle ne se présente que si $p = 2$, $n = 4$ et H est dihédral d'ordre 6. Supposons que l'ensemble des orbifolds, qui satisfont aux hypothèses du Théorème 3 et qui se trouvent dans ce cas (c.-à.-d- tels que H est le groupe non abélien d'ordre 6) soit non vide. Parmi les orbifolds de cet ensemble, choisissons-en un dont l'ordre du groupe fondamental soit minimal. Notons le $(V,X,4)$. Soit $(V',X',2)$ l'orbifold correspondant au noyau de l'application $\pi_1^{orb}(V,X,4) \to H \to 1$. La variété X' consiste en trois cercles Choisissons un élément ζ d'ordre 2 dans H. Soit $(V",X",\alpha)$ l'orbifold quotient par ζ. C'est un revêtement (non normal) d'ordre trois de $(V,X,4)$. A la composante de $X"$ correspondant aux points fixes de ζ est associé l'entier 4. On peut trouver un revêtement $(V",X",\alpha)$ qui n'a qu'un cercle exceptionnel. L'entier associé a ce cercle exceptionnel est 4. Par récurrence, ce nouvel orbifold correspond à une action linéaire. On montre assez facilement que la même chose est vraie pour $(V,X,4)$, ce qui exclut ce dernier cas.

Maintenant nous avons considéré toutes les possibilités et nous avons montré que la variété $V - X$ ne peut pas avoir l'une des structures décrites dans (2) et (3). Il en résulte que U a une structure de fibration de Seifert, ce qui achève la démonstration du Théorème 3.

V - Démonstrations des Théorèmes 1 et 2 et quelques remarques finales :

Première Remarque: Si (V,X,α) est un orbifold tel que $V - X$ ne soit pas irréductible, alors $\tilde{V}_{univ}$ n'est jamais difféomorphe à S^3.

Etant donnée cette remarque, les Théorèmes 1 et 2 sont demontrés dans le cas ou X a une composante , cette composante étant un cercle.

Deuxième Remarque: Soit (V,X,α) un orbifold et soit A une composante de X qui soit un cercle. Nous considérons des revêtements de deux types:

(a) ceux qui correspondent au noyau de $\pi_1^{orb}(V,X,\ ) \to \pi_1(V)$

(b) dans le cas où $\pi_1(V)$ est trivial, les revêtements cycliques d'ordre $\alpha(A)$ ramifiés au dessus de A.

On montre que, si les hypothèses du Théorème 1 ou 2 sont vraies pour (V,X,α), si X est une union de cercles et si X a plus d'une composante, alors il est possible de choisir un revêtement non trivial de type (a) ou (b) tel que les hypothèses du même théorème soient encore vraies. De plus, on montre que, si l'action du groupe fondamental du revêtement est linéaire, alors l'action du groupe fondamental de (V,X,α) est aussi linéaire.

Ces deux remarques donnent une démonstration des Théorèmes 1 et 2 dans le cas où tous les groupes d'isotropie sont cycliques. La démonstration procède par récurrence sur l'ordre du groupe fondamental dans les cas où Théorème 3 ne s'applique pas.

Troisième Remarque: Si $G \times S^3 \to S^3$ est une action telle que, pour chaque $x \in S^3$, G_x soit cyclique ou dihédral, alors il existe un sous groupe G' de G d'indice dans G égale à 1 ou 2 tel que, pour chaque $x \in S^3$, G'_x soit cyclique. Il est assez facile de démontrer que, si l'action de G' est linéaire, alors l'action de G est aussi linéaire.

Cette remarque avec tout ce qui est déjà démontré donne une démonstration des Théorèmes 2 et 3.

Quatrième Remarque: Soit $G \times S^3 \to S^3$ une action linéaire. Prenons $x \in S^3$ tel que G_x est trivial. Il existe une boule B autour de x telle que $gB \cap B$ soit vide pour tout élément $g \neq e$ dans G. Prenons une variété compacte, simplement connexe et à bord S^2. Notons-la B'. Remplaçons gB dans S^3 par gB'. Evidemment l'action de G sur $S^3 - \coprod_{g \in G} gB$ se prolonge à $(S^3 - \coprod_{g \in G} gB) \cup (\coprod_{g \in G} gB')$. Le résultat est une action de G sur une variété fermée simplement connexe. Si Σ est une variété fermée simplement connexe de dimension trois et si $G \times \Sigma \to \Sigma$ est une action qui satisfait aux hypothèses du Théorème 2 ou 3, alors l'action est isomorphe à une action construite par la méthode précédente.