

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PAUL GÉRARDIN

## **Formes automorphes associées aux cycles géodésiques des surfaces de Riemann hyperboliques**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1981, exp. n° 562, p. 23-35

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1980-1981\\_\\_23\\_\\_23\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1980-1981__23__23_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FORMES AUTOMORPHES ASSOCIÉES AUX CYCLES  
GÉODÉSIQUES DES SURFACES DE RIEMANN HYPERBOLIQUES

[d'après S. Kudla et J. Millson]

par Paul GÉRARDIN

Il s'agit de surfaces de Riemann connexes, complètes, orientées, sans bord, de volume fini et dont le plan hyperbolique est le revêtement universel.

Lorsqu'une telle surface  $M$  est compacte, le théorème de dualité de Poincaré dit que la forme d'intersection sur le groupe  $H_1(M)$  d'homologie singulière est unimodulaire, et le théorème de Hodge que l'espace  $\mathcal{H}^1(M)$  des 1-formes harmoniques réelles réalise la 1-cohomologie de de Rham de  $M$  ([25], [27]) ; celle-ci s'identifie canoniquement avec la cohomologie singulière réelle  $H^1(M, \mathbb{R})$ , dual de l'espace vectoriel  $H_1(M, \mathbb{R}) = H_1(M) \otimes \mathbb{R}$ . On en déduit que chaque géodésique orientée fermée  $\eta$  de  $M$  définit une unique 1-forme harmonique  $\hat{\eta}$ , dite duale de  $\eta$ , caractérisée par

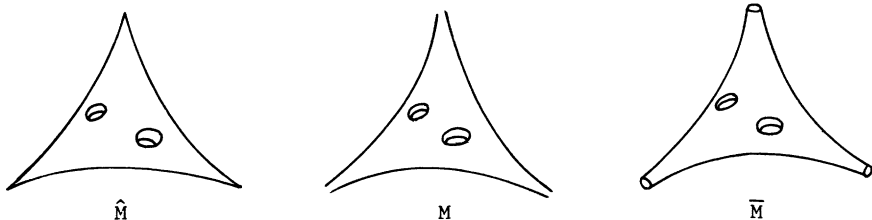
$$(0.1) \quad \int_C \hat{\eta} = C \cdot \eta \quad , \quad \text{pour tout cycle } C \text{ sur } M ,$$

ou encore par

$$(0.2) \quad \int_M \hat{\eta} \wedge \alpha = \int_\eta \alpha \quad \text{pour toute 1-forme fermée } \alpha \text{ sur } M .$$

Cette 1-forme duale est donnée explicitement par J. Fay [2], de lecture difficile. S. Kudla et J. Millson en donnent une construction invariante ([1]), susceptible de généralisation à d'autres espaces localement symétriques.

Lorsque la surface de Riemann  $M$  n'est plus compacte, elle provient d'une surface de Riemann compacte  $\hat{M}$  en retirant un nombre fini de points, appelés les pointes de  $M$ . Soit  $\bar{M}$  la variété à bord obtenue de  $\hat{M}$  en remplaçant chaque pointe  $p$  par l'ensemble des géodésiques de  $M$  dont  $p$  est un bout ; l'inclusion de  $M$  dans  $\bar{M}$  est une équivalence d'homotopie ; on note  $\partial M$  le bord de  $\bar{M}$ .



On a les deux suites exactes longues d'homologie et de cohomologie singulières :

$$\begin{array}{ccc} & H_*(M) & \\ \swarrow & & \searrow \\ H_*(M, \partial M) & \longrightarrow & H_*(\partial M) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & H^*(M) & \\ \swarrow & & \searrow \\ H^*(M, \partial M) & \longleftarrow & H^*(\partial M) \end{array}$$

que la dualité de Lefschetz montre isomorphes, en induisant la dualité de Poincaré au niveau du bord  $\partial M$ . Avec le genre  $g$  et le nombre  $f$  de pointes, on a les dimensions suivantes :  $\dim H^1(M) = \dim H_1(M) = 2g + f - 1$ ,  $\dim H^0(\partial M) = f$ ,  $\dim H^0(M) = 1$ ,  $H_2(M) = 0$ . La caractéristique d'Euler-Poincaré de  $M$  est  $\chi(M) = 2 - 2g - f$  (cf. [10], [19], [26]). On note  $H_1^*(M)$  l'image de  $H^*(M, \partial M)$  dans  $H^*(M)$ . Le théorème de de Rham donne la cohomologie singulière réelle avec la cohomologie du complexe  $A^*(M)$  des formes différentielles sur  $\bar{M}$ , et la cohomologie relative  $H^*(M, \partial M)$  apparaît comme la cohomologie des formes différentielles à support compact. On note  $\mathcal{H}^*(M)$  l'espace des formes différentielles harmoniques, et  $\mathcal{H}_c^*(M)$  celles qui sont cuspidales et de carré intégrable. G. Harder a montré ([8], [9]) que toute la cohomologie  $H^*(M, \mathbb{R})$  était représentée par des formes harmoniques, et a donné un relèvement canonique  ${}^+H^*(M, \mathbb{R})$  dans  $H^*(M, \mathbb{R})$  de son image dans  $H^*(\partial M, \mathbb{R})$  (voir n° 2) ; on sait aussi que  $\mathcal{H}_c^1(M)$  s'envoie isomorphiquement sur  $H_1^1(M, \mathbb{R})$ , ce qui donne la décomposition en somme directe :

$$(0.4) \quad H^1(M, \mathbb{R}) = \mathcal{H}_c^1(M) + {}^+H^1(M, \mathbb{R}).$$

Kudla et Millson donnent dans leur article ([1]) une construction géométrique de la 1-forme  $\hat{\eta}$  harmonique de carré intégrable cuspidale duale d'une géodésique orientée fermée  $\eta$ , c'est-à-dire vérifiant (0.2) pour toute 1-forme fermée à support compact  $\alpha$ . H. Petersson avait aussi obtenu ce résultat, mais pas sous forme invariante, dans le cas de la surface de groupe fondamental  $\Gamma_0(N)$  ([3]).

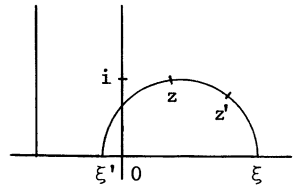
### 1. Le plan hyperbolique

Le modèle standard de la géométrie hyperbolique plane est le demi-plan supérieur  $H$  des  $z \in \mathbb{C}$  de partie imaginaire  $> 0$ , muni de la structure riemannienne  $ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$  au point  $z = x + iy$  ; on l'appelle aussi demi-plan de Poincaré. Les géodésiques sont les demi-cercles et demi-droites de  $H$  qui sont orthogonaux à l'axe réel. On compactifie  $H$  en prenant son adhérence dans la sphère de Riemann  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  ; on lui ajoute donc la droite projective réelle  $F = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . La distance est donnée par la formule

$$(1.1) \quad d(z, z') = \text{Log} \left[ \frac{z - \xi}{z - \xi'} \frac{z' - \xi}{z' - \xi'} \right], \quad z, z' \in H \text{ distincts},$$

où  $\left[ \frac{z - \xi}{z - \xi'} \frac{z' - \xi}{z' - \xi'} \right]$  est le birapport et  $\xi, \xi'$  désignent les intersections de la géodésique qui passe par  $z$  et  $z'$  avec le bord  $F$ , l'ordre étant  $\xi, z', z, \xi'$ .

Le groupe  $G$  des automorphismes analytiques de  $H$  est aussi le groupe des



isométries directes ; c'est le groupe  $PSL_2(\mathbb{R})$  des homographies  $z \mapsto (az+b)(cz+d)^{-1}$  pour  $a, b, c, d$  réels vérifiant  $ad - bc = 1$ . Les éléments de  $G$  autres que 1 sont classés en hyperboliques, paraboliques, elliptiques, suivant qu'ils fixent 2, 1, 0 points de  $F$ .

On a  $|dx| = y = |dy|$  en  $z = x + iy$ , et la forme volume s'écrit  $v_H = y^{-2} dx \wedge dy = (-2iy^2)^{-1} dz \wedge d\bar{z}$ . On note  $\langle | \rangle$  la métrique sur les formes différentielles induite par la structure riemannienne, et  $*$  l'opérateur sur les formes différentielles défini par

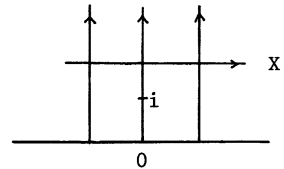
$$(1.2) \quad \alpha \wedge * \beta = \langle \alpha | \beta \rangle v_H ;$$

il envoie  $dx$  sur  $dy$  et  $dy$  sur  $-dx$  ; il échange 1 et  $v_H$ . Avec l'opérateur de différentiation extérieure  $d$ , on définit l'opérateur  $\delta = - * d *$ , et le laplacien  $\Delta = d\delta + \delta d$  ; sur les fonctions  $\Delta$  opère par  $-y^2(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$ .

Les formes différentielles qu'on prend sont supposées indéfiniment différentiables et à valeurs réelles. A une telle 1-forme  $\omega$ , on associe deux 1-formes complexes,  ${}^+\omega = i\omega - *\omega$  et  ${}^-\omega = \overline{{}^+\omega} = -i\omega - *\omega$ , la première étant de type  $(1,0)$  et la seconde de type  $(0,1)$  ; on retrouve  $\omega$  par  $\omega = \text{Im}({}^+\omega)$ .

Les horicycles au point  $\infty$  sont les droites de partie imaginaire constante, orientées par abscisses croissantes ; en un autre point de  $F$ , ce sont les cercles de  $H$  tangents à l'axe réel, avec l'orientation directe ; le centre d'un horicycle est le point du bord auquel il est attaché. Le groupe  $G$  permute les horicycles transitivement, et le stabilisateur d'un horicycle ne dépend que de son centre ; pour le centre  $\infty$ , c'est le groupe des translations réelles  $z \mapsto z + u$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , sous-groupe maximal de  $G$  formé d'éléments paraboliques.

Soit  $X$  un horicycle,  $G_X$  son stabilisateur dans  $G$ ,  $p_X$  la projection orthogonale de  $H$  sur  $X$  : les fibres de  $p_X$  sont les géodésiques orthogonales à  $X$ , c'est-à-dire celles de bout le centre de  $X$ . Ceci fait apparaître  $H$  comme le fibré normal à  $X$ . Soit  $d_X(z)$  la distance orientée de  $X$  à  $z \in H$ , et  $(z:X) = e^{d_X(z)}$ . Soit  $v_X$  la forme volume sur  $X$  invariante par  $G_X$ , telle que la 1-forme sur  $H$



$$\omega_X = * p_X^* v_X$$

ait pour valeur  $(z:X)$  en  $z \in H$  sur le champ de vecteurs unitaires porté par les fibres de  $p_X$ . La forme  $\omega_X$  est invariante par  $G_X$ , elle est exacte et harmonique, et  $|\omega_X| = (z:X)$ . Dans la situation standard où  $X$  est  $y = 1$ , et  $\Gamma_X$  est engendré par  $z \rightarrow z + 1$ , on a  $v_X = dx$ ,  $\omega_X = dy = \text{Im}(dz)$ ,  $(z:X) = y = \text{Im}(z)$ .

Chaque géodésique orientée  $Y$  de  $H$  définit un groupe  $G_Y$ , sous-groupe maximal de  $G$  formé d'éléments hyperboliques : c'est le groupe des transvections le long de  $Y$ , composante neutre du stabilisateur de  $Y$  dans  $G$ . Soit  $p_Y$  la projection

orthogonale de  $H$  sur  $Y$  ; ses fibres sont les géodésiques orthogonales à  $Y$  , et  $H$  apparaît comme le fibré normal à  $Y$  . Soit  $d_Y(z)$  la distance orientée de  $z$  à  $Y$  ; on pose  $(z:Y) = 1/\text{ch } d_Y(z)$  . Soit  $v_Y$  la forme volume sur  $Y$  induite par la métrique riemannienne sur  $Y$  ; on pose

$$\omega_Y = *p_Y^* v_Y ;$$

sur le champ de vecteurs unitaires porté par les fibres de  $p_Y$  , cette forme vaut  $(z:Y)$  ; elle est invariante par  $G_Y$  , elle est exacte et harmonique, et  $|\omega_Y| = (z:Y)$  . De plus  $\int_{G_Y \setminus H} \omega_Y = \pi$  . Dans la situation standard où  $Y = i\mathbb{R}_+^*$  avec l'orientation usuelle, on a  $v_Y = y^{-1} dy$  ,  $\omega_Y = d\theta = \text{Im}(z^{-1} dz)$  , avec l'argument  $\theta$  de  $z$  .

Dans chacun des deux cas, on introduit un paramètre complexe  $s \in \mathbb{C}$  et les 1-formes.

$$(1.3) \quad \omega_Z^s = |\omega_Z|^{s-1} \omega_Z , \quad Z = X \text{ ou } Y .$$

Alors, avec l'action du laplacien  $\Delta$  , on a

$$(1.4) \quad \Delta \omega_X^s = s(1-s) \omega_X^s , \text{ pour le cas horicyclique,}$$

$$(1.5) \quad \Delta \omega_Y^s = s(1-s) \omega_Y^s - (1-s^2) \omega_Y^{s+2} , \text{ pour le cas géodésique.}$$

Dans le second cas, la forme sur  $G_Y \setminus H$  définie par  $\omega_Y^s$  est intégrable pour  $\text{Re}(s) > 0$  , et

$$(1.6) \quad \int_{G_Y \setminus H} \omega_Y^s = B(s/2, 1/2) = L(s)/L(s+1) ,$$

en introduisant la fonction  $L$  de  $\mathbb{R}_+$  ,  $L(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2)$  . Pour  $\text{Re}(s) > 0$  , on a donc

$$(1.7) \quad \Delta \frac{L(s+1)}{L(s)} \omega_Y^s = s(1-s) \left( \frac{L(s+1)}{L(s)} \omega_Y^s - \frac{L(s+3)}{L(s+2)} \omega_Y^{s+2} \right) .$$

## 2. Surfaces de Riemann hyperboliques

Les surfaces de Riemann hyperboliques sont celles admettant le plan hyperbolique comme revêtement universel, le groupe fondamental étant un groupe discret d'automorphismes analytiques de co-volume fini, et n'admettant pas d'éléments elliptiques. Si  $M$  est une telle surface, munie d'un revêtement universel

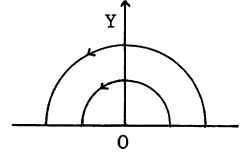
$$(2.1) \quad H \longrightarrow M$$

on note  $\Gamma = \pi_1(M)$  ; soient  $g$  le genre de  $M$  et  $f$  le nombre de ses pointes ; le volume de  $M$  pour la mesure quotient par  $\Gamma$  de celle définie par  $v_H$  est

$$(2.2) \quad \int_{\Gamma \setminus H} v_H = -2\pi \chi(M) , \quad \chi(M) = 2 - 2g - f .$$

On supposera toujours  $M$  munie de la structure riemannienne quotient.

Les géodésiques de  $M$  sont les images des géodésiques de  $H$  . Dire qu'une



géodésique  $Y$  de  $H$  se projette en une géodésique fermée  $\eta$  de  $M$  signifie que  $Y$  possède une transvection dans  $\Gamma$ , et comme une transvection de  $\Gamma$  n'est jamais conjuguée dans  $\Gamma$  à son inverse, on voit que les géodésiques fermées orientées de  $M$  sont paramétrées par les classes de conjugaison des éléments hyperboliques primitifs de son groupe fondamental ; de plus, le groupe fondamental de  $\eta$  est alors  $\Gamma_Y = \Gamma \cap G_Y$ , avec les notations précédentes.

L'existence de pointes de  $M$  correspond à la présence d'éléments paraboliques dans  $\Gamma$ . Les points du bord  $F$  de  $H$  fixés par des éléments paraboliques de  $\Gamma$  forment une partie notée  $F_\Gamma$ , et les pointes de  $M$  sont les orbites de  $\Gamma$  dans  $F_\Gamma$ . Les horicycles de  $M$  sont les images des horicycles de  $H$  de centre dans  $F_\Gamma$  ; si  $X$  est un horicycle de  $H$  de centre  $n \in F_\Gamma$ , se projetant sur l'horicycle  $\xi$  de  $M$  en la pointe  $p$ , le stabilisateur  $G_X$  de  $X$  dans  $G$  ne dépend que de  $n$ , et le groupe fondamental de  $\xi$  est  $\Gamma_X = \Gamma \cap G_X$ . Un élément parabolique de  $\Gamma$  n'est pas conjugué à son inverse ; si on qualifie de positif un élément parabolique qui déplace ses horicycles dans le sens positif, on voit que l'ensemble des pointes de  $M$  est paramétré par l'ensemble des classes de conjugaison d'éléments paraboliques primitifs positifs de son groupe fondamental.

En plus des géodésiques fermées, il y a celles joignant deux pointes ; elles sont orthogonales aux horicycles entre les deux pointes.

Soit  $\xi$  un horicycle de  $M$  en la pointe  $p$ . On se fixe un revêtement  $H \longrightarrow M$ , et on note  $H(\xi)$  l'ensemble des horicycles de  $H$  qui se projettent sur  $\xi$ . Avec les notations du n° 1, en particulier (1.3), on définit la série d'Eisenstein associée à l'horicycle  $\xi$  comme étant la série de 1-formes suivantes, dépendant du paramètre complexe  $s$  :

$$(2.3) \quad \hat{\xi}^s = \sum_{X \in H(\xi)} \omega_X^s.$$

Il est bien connu (voir [6]) que cette série converge pour  $\text{Re}(s) > 1$ , vers une 1-forme invariante par le groupe fondamental de  $M$ , qui dépend analytiquement de  $s$ , et qui admet un prolongement méromorphe à tout le plan des  $s$ , avec au plus des pôles simples situés sur l'intervalle  $]1/2, 1[$ , bornes exclues, et vérifiant, par (1.4), la relation

$$(2.4) \quad \Delta \hat{\xi}^s = s(1-s) \hat{\xi}^s,$$

Soit  $|\xi|$  la longueur de l'horicycle  $\xi$  ; la forme  $|\xi|^{-s} \hat{\xi}^s$  ne dépend pas du choix de l'horicycle  $\xi$  en la pointe  $p$  ; on la note  $\hat{p}^s$ . Le relèvement  ${}^+H^1(M)$  donné par Harder de  $\text{Im}(H^1(M) \rightarrow H^1(\partial M))$  est fourni par l'application qui au couple de pointes  $(p, q)$  associe la 1-forme harmonique fermée  $\hat{q}^1 - \hat{p}^1$ .

Lorsque la surface de Riemann  $M$  est compacte, on décompose l'espace de Hilbert des formes de carré intégrable à l'aide des valeurs propres du laplacien, dont le spec-

tre est discret, formé de nombres  $\geq 0$  sans point d'accumulation. La multiplicité de la valeur propre 0 dans l'espace des 1-formes de carré intégrable est  $2g$ , où  $g$  est le genre de  $M$ . Lorsque  $M$  n'est pas compacte, le laplacien possède un spectre continu, lié aux séries d'Eisenstein  $\hat{p}^s$  relatives aux pointes  $p$  de  $M$  de la façon suivante. On introduit les formes, de type  $(1,0)$  et  $(0,1)$  respectivement,

$$(2.5) \quad {}^+ \hat{p}_X^s = i \hat{p}_X^s - {}^* \hat{p}_X^s \quad \text{et} \quad {}^- \hat{p}_X^s = -i \hat{p}_X^s - {}^* \hat{p}_X^s.$$

Pour les 1-formes de carré intégrable suffisamment régulières, la décomposition spectrale est ([6])

$$(2.6) \quad \omega = \sum_{\lambda} (\omega)_{\lambda} + \sum_p \frac{1}{4\pi i} \int_{\text{Re}(s)=1/2} (< {}^+ \hat{p}^s | \omega > {}^+ \hat{p}^s + < {}^- \hat{p}^s | \omega > {}^- \hat{p}^s) ds$$

où  $( )_{\lambda}$  désigne la projection orthogonale sur le sous-espace associé à la valeur propre  $\lambda$  du spectre discret de  $\Delta$ , et la sommation en  $p$  porte sur les différentes pointes de  $M$ .

Les formes différentielles sur  $M$  sont aussi les formes différentielles sur  $H$  qui sont invariantes par le groupe  $\Gamma$ ; une forme différentielle  $\omega$  (indéfiniment dérivable) sur  $H$  est dite forme automorphe pour  $\Gamma$ , si elle est invariante par  $\Gamma$ , de type fini sous l'action du laplacien, et, dans chaque pointe, croît moins vite qu'un polynôme en  $(z:X)$ , avec un horicycle  $X$  relatif à la pointe. Une forme automorphe est dite cuspidale si les intégrales sur tous les horicycles de  $M$  sont nulles. Pour une forme sur  $M$  de carré intégrable, la condition d'être harmonique équivaut au fait qu'elle est fermée et co-fermée.

### 3. Série d'Eisenstein d'une géodésique orientée fermée

On part d'une géodésique orientée fermée  $\eta$  de la surface de Riemann hyperbolique  $M$ , munie d'un revêtement universel (2.1). Soit  $H(\eta)$  l'ensemble des géodésiques orientées de  $H$  se projetant sur  $\eta$ . Avec la notation (1.3), on introduit la série

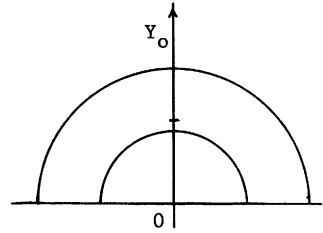
$$(3.1) \quad \hat{\eta}^s = \frac{L(s+1)}{L(s)} \sum_{Y \in H(\eta)} \omega_Y^s, \quad s \in \mathbb{C};$$

c'est la série d'Eisenstein associée à la géodésique orientée fermée  $\eta$ ; Kudla-Millson l'appelle série d'Eisenstein hyperbolique. Leur premier résultat est le suivant.

**THÉORÈME 1.-** Pour  $\text{Re}(s) > 1$ , la série d'Eisenstein de la géodésique orientée fermée converge uniformément sur tout compact, sa somme est une 1-forme bornée fermée dont la classe de cohomologie est la classe duale de la classe d'homologie définie par  $\eta$ , et c'est une fonction analytique de  $s$  dans  $\text{Re}(s) > 1$ .

Kudla-Millson démontre la convergence de la façon suivante. On fixe  $Y_0$  dans  $H(\eta)$ ; alors  $H(\eta) = \Gamma Y_0 = (\Gamma/\Gamma_{Y_0}) Y_0$ ; soit  $|\eta|$  la longueur de  $\eta$ :  $|\eta| = \int_{\Gamma_{Y_0} \backslash Y_0} v_{Y_0}$ ;

le groupe  $G_{Y_0}$  permute les géodésiques orthogonales à  $Y_0$  de façon simplement transitive ; un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma_{Y_0}$  sur ces géodésiques est donné par celles qui coupent  $Y_0$  suivant un intervalle d'amplitude  $|\eta|$ . On fixe un horicycle  $X_0$  de  $H$  de centre le bout positif de  $Y_0$  ; par un automorphisme de  $H$ , on peut supposer qu'on se trouve dans la situation standard où  $Y_0$  est le demi-axe des ordonnées positives et  $X_0$  la droite  $y = 1$ . On a donc  $|\omega_{Y_0}^s| = y/|z|$ , et  $|\omega_{Y_0}^s| = y^\sigma/|z|^\sigma$ , avec  $\sigma = \text{Re}(s)$ . Pour  $|z|$  dans un intervalle multiplicativement borné, et  $s$  restant dans un compact, on a  $|\omega_{Y_0}^s| \propto y^\sigma = |\omega_{X_0}^s|$ . Soit  $K \subset H$  une partie compacte ; on choisit un système complet de représentants  $S$  de  $\Gamma/\Gamma_{Y_0}$  tel que  $S^{-1}K$  soit multiplicativement borné. Soit  $\varepsilon > 0$  assez petit de façon que, pour tout  $z \in K$ ,  $z$  soit le seul point de  $\Gamma z$  dont la distance à  $z$  soit  $< \varepsilon$ . Comme la fonction  $z \mapsto (\text{Im } z)^\sigma$  est fonction propre du Laplacien sur  $H$ , sa valeur moyenne sur toute boule est proportionnelle à sa valeur au centre, le facteur de proportionnalité ne dépendant que du rayon de la boule, et de  $\sigma$  [6]. On en déduit



$$\sum_{Y \in H(\eta)} |\omega_Y^s| z = \sum_{S^{-1}} \gamma^* |\omega_{Y_0}^s| z \propto \sum_{S^{-1}} (\text{Im}(\gamma z))^\sigma = \sum_{S^{-1}} C(\varepsilon, \sigma) \int_{d(z', \gamma z) \leq \varepsilon/2} (\text{Im } z')^\sigma |v_H(z')|$$
 que l'hypothèse faite majore par  $C(\varepsilon, \sigma) \int_{e^{-a} \leq |z'| \leq e^a} (\text{Im } z')^\sigma |v_H(z')|$ . Cette intégrale se calcule : on trouve  $\frac{2 \text{sh}(\sigma a) L(\sigma - 1)}{L(\sigma)}$ , ce qui donne la majoration de la série des modules par  $C/(\sigma - 1)$ , uniformément sur  $K$  et pour  $s$  restant dans un compact de  $\text{Re}(s) > 1$ . Ceci donne la convergence uniforme de la série d'Eisenstein sur les compacts de  $H$ , uniformément sur les compacts du demi-plan  $\text{Re}(s) > 1$ .

Pour le reste du théorème, on observe que chaque  $\omega_Y^s$  étant une 1-forme sur  $H$  invariante par  $G_Y$  définit une 1-forme sur  $\Gamma_Y \backslash H$ , et que la projection orthogonale  $p_Y : H \rightarrow Y$  induit une projection orthogonale  $\Gamma_Y \backslash H \rightarrow \Gamma_Y \backslash Y$ , faisant apparaître  $\Gamma_Y \backslash H$  comme le fibré normal à la courbe  $\Gamma_Y \backslash Y$  de  $\Gamma_Y \backslash H$ , qui s'identifie naturellement à la géodésique  $\eta$ . Les propriétés de  $\omega_Y$  et  $\omega_Y^s$  données au n° 1 montrent alors que la classe de  $\omega_Y^s$  dans  $H^1(\Gamma_Y \backslash H, \mathbb{C})$  est la classe duale de la section nulle du fibré  $\Gamma_Y \backslash H \rightarrow \eta$ , au facteur  $L(s)/L(s+1)$  près. La convergence de la série d'Eisenstein montre alors que la classe de  $\hat{\eta}^s$  dans  $H^1(M, \mathbb{C})$  est la classe duale de  $\eta$ . J. Oesterlé a démontré (voir Appendice) que la forme  $\hat{\eta}^s$  était bornée.

#### 4. Equation fonctionnelle et prolongement analytique

La relation (1.7) donne alors l'équation fonctionnelle.

THÉORÈME 2.- Pour  $\text{Re}(s) > 1$ , on a

$$(4.1) \quad \Delta \hat{\eta}^s = s(1-s)[\hat{\eta}^s - \hat{\eta}^{s+2}].$$

Le théorème principal de Kudla-Millson est alors le suivant.

**THÉORÈME 3.-** La série d'Eisenstein  $\hat{\eta}^s$  associée à une géodésique orientée fermée vérifie les propriétés suivantes :

- a) elle se prolonge analytiquement au demi-plan  $\text{Re}(s) > 1/2$  ,
- b) sa valeur en  $s = 1$  est une forme harmonique cuspidale de carré intégrable, qui est la forme duale de la géodésique orientée  $\eta$  .

La démonstration repose sur la décomposition spectrale des 1-formes de carré intégrable ; ici, on a, pour  $\text{Re}(s) > 1/2$  :

$$(4.2) \quad \hat{\eta}^s = \sum_{\lambda} (\hat{\eta}^s)_{\lambda} + \sum_p \frac{1}{4\pi i} \int_{\text{Re}(t)=1/2} (\langle {}^+ \hat{p}^t | \hat{\eta}^s \rangle {}^+ \hat{p}^t + \langle {}^- \hat{p}^t | \hat{\eta}^s \rangle {}^- \hat{p}^t) dt ,$$

la première somme portant sur le spectre discret du laplacien, et la seconde sur les pointes de  $M$ . L'équation fonctionnelle (4.1) de  $\hat{\eta}^s$  conduit aux équations fonctionnelles de ses composantes

$$(4.3) \quad \left( \begin{aligned} (\hat{\eta}^s)_{\lambda} &= \frac{s(1-s)}{s(1-s)-\lambda} (\hat{\eta}^{s+2})_{\lambda} \\ \langle {}^{\pm} \hat{p}^t | \hat{\eta}^s \rangle &= \frac{s(1-s)}{s(1-s)-|t|^2} \langle {}^{\pm} \hat{p}^t | \hat{\eta}^{s+2} \rangle . \end{aligned} \right.$$

Le décalage du second membre en  $s$ , appliqué plusieurs fois, montre la décroissance améliorée des premiers membres par rapport au paramètre spectral, et donc que pour  $\text{Re}(s) > 1/2$ , où les dénominateurs dans (4.3), pour  $\lambda \neq 0$ , ne s'annulent pas, la somme du second membre de (4.2) définit une 1-forme analytique en  $s$ , pour chaque point de  $H$ . En particulier,  $\hat{\eta}^1$  est bien définie, réelle, et comme les relations (4.3) montrent que les composantes, pour  $s = 1$ , autres que  $(\hat{\eta}^1)_0$  sont nulles, on a  $\hat{\eta}^1 = (\hat{\eta}^1)_0$ . D'un autre côté, pour  $\text{Re}(s) > 1$ ,  $(\hat{\eta}^s)_0$  est la composante harmonique de  $\hat{\eta}^s$ , et comme elle est de carré intégrable, c'est la forme harmonique duale de  $\eta$ ; en particulier elle ne dépend pas de  $s$ ; la périodicité  $s \mapsto s+2$  de cette fonction ramène  $(\hat{\eta}^1)_0$  à cette fonction constante. Ceci montre que  $\hat{\eta}^1$  est de carré intégrable, et que c'est la forme harmonique de carré intégrable duale de  $\eta$ . Qu'elle soit cuspidale résulte de ce que les 1-formes harmoniques de carré intégrable le sont toutes. Ceci démontre donc le théorème.

**COROLLAIRE.-** La 1-forme holomorphe de carré intégrable, duale de  $\eta$  est  $\frac{i\hat{\eta}^1 - * \hat{\eta}^1}{2}$  .

Lorsque la surface  $M$  est compacte, on peut préciser davantage. Par le comportement asymptotique des valeurs propres du laplacien ( $\lambda_n \sim cn$  pour la  $n$ -ème valeur propre), les composantes  $(\hat{\eta}^s)_{\lambda}$  se prolongent méromorphiquement à tout le plan des  $s$ , les pôles apparaissant éventuellement aux valeurs de  $s$  pour qui  $s(1-s)$  est valeur propre du laplacien, et alors ils sont simples. Plus précisément, Kudla-Millson donne la caractérisation suivante des pôles de la série d'Eisenstein  $\hat{\eta}^s$ .

**THÉORÈME 4.-** Lorsque la surface de Riemann  $M$  est compacte, la série d'Eisenstein se prolonge méromorphiquement à tout le plan des  $s$ , et ses pôles sont les nombres de la forme  $\frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - \lambda} - 2n$ , où  $n$  est un entier  $\geq 0$  et  $\lambda$  une valeur propre

du laplacien, pour qui le sous-espace propre correspondant n'annule pas  $\eta$ .

## 5. Remarques

5.1. Lorsque  $\eta$  est une géodésique orientée entre deux pointes  $p$  et  $q$  de la surface de Riemann hyperbolique  $M$ , on peut se demander si la série (3.1), dont le terme général conserve un sens, converge encore pour  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , définit une fonction analytique de  $s$  dans ce demi-plan, admet un prolongement analytique au delà, et donne pour  $s = 1$  une forme harmonique duale de  $\eta$ ; ceci donnerait une réalisation automorphe des symboles modulaires de Mazur. En particulier, une combinaison linéaire naturelle des géodésiques "les plus courtes" entre les deux pointes  $p$  et  $q$  produirait la forme harmonique  $\hat{q} - \hat{p}$ , comme le laisse entendre Kudla-Millson ([1], p. 194 et 208).

5.2. Pour les espaces hyperboliques compacts réels de rang 1, Kudla et Millson généralisent leur construction des séries d'Eisenstein, et relient les formes harmoniques duales obtenues aux formes harmoniques produites par la représentation de Weil ([11]); ils ont aussi des résultats pour les espaces hyperboliques compacts associés aux groupes  $SU(p, q)$  et  $SO(p, q)$ .

5.3. Dans ([12]) Millson et Ragunathan introduisent certains cycles géodésiques sur les espaces localement symétriques, appelés spéciaux par Kudla et Millson: ils sont localement les points fixes des isométries involutives, et leur article montre que ce sont les cycles totalement géodésiques admettant un complément orthogonal totalement géodésique, ce qui devrait faire intervenir efficacement les paires réductives duales de R. Howe. Ils appliquent leur construction à l'étude de la cohomologie de groupes arithmétiques. Voir aussi un preprint de Ash ([14]).

5.4. Dans le cas d'un quotient compact du bi-disque, Kudla et Millson construisent la forme harmonique duale de type  $(1, 1)$  d'une courbe lisse irréductible totalement géodésique, par leur technique; il leur faut introduire un terme correctif dans le terme général de leur série d'Eisenstein, qui tient compte du fait que le fibré normal à la courbe n'est pas plat ([13]).

5.5. Un exemple, tiré d'un résultat de Schwermer ([21]) montre, pour un quotient convenable de la boule hyperbolique, qu'il n'y a pas de 1-cohomologie cuspidale, alors que l'espace possède des géodésiques fermées homologiquement non nulles.

5.6. Ce travail de Kudla et Millson pour les surfaces de Riemann hyperboliques prouve qu'on a une bonne théorie de Hodge pour la partie cuspidale de la 1-cohomologie. Pour l'étude des espaces localement symétriques à courbure négative non compacts, Borel et Serre ont introduit une compactification en une variété à coins qui a même type d'homotopie; on peut alors étudier la cohomologie à l'infini, à la Harder, ce qu'a fait J. Schwermer pour  $SL_n$  ([20]); A. Ash donne l'ampleur de la cohomologie qui n'est pas de carré intégrable dans [15]. On peut aussi se ramener à l'étude de la cohomologie continue des groupes semi-simples ([16], [18]).

## APPENDICE

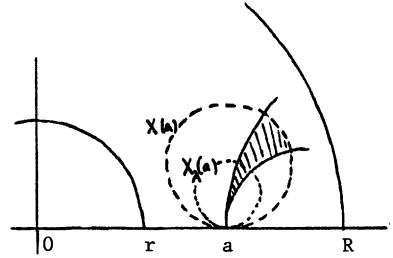
Comportement des formes  $\hat{\eta}^s$  aux pointes  
par J. Oesterlé

Le but de cet appendice, où nous utilisons librement les définitions et notations de Gérardin, est de montrer que pour tout  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Re}(s) > 1$ , la 1-forme fermée  $\hat{\eta}^s$  sur  $M$  introduite au n° 3 tend vers zéro aux pointes.

On se ramènera au cas où  $Y_0 = i\mathbb{R}_+^\times$ , avec son orientation usuelle, est un relèvement de  $\eta$ . Fixons un nombre complexe  $s$  de partie réelle  $\sigma > 1$ . Notons  $p$  une pointe de  $M$ , et  $A$  un système de représentants modulo  $\Gamma_{Y_0}$  des relèvements de  $p$ , qui soit multiplicativement bornée dans  $\mathbb{C}$ . Soit  $\xi$  un horicycle en  $p$ , suffisamment petit pour que les horicycles  $X(a)$ ,  $a \in A$ , se projetant sur  $\xi$  soient deux à deux disjoints. La réunion (disjointe) des horiboules  $B(a)$  de centre  $a$  et frontière  $X(a)$ ,  $a \in A$ , est contenue dans une couronne  $C = \{z \mid r \leq |z| \leq R\}$ .

Fixons  $a_0$  dans  $A$ . L'ensemble  $S$  des  $\gamma \in \Gamma$  tels que  $\gamma a_0 \in A$  est un système de représentants de  $\Gamma_{Y_0} \backslash \Gamma$ , et il existe un domaine de Siegel  $\Sigma$  en  $a_0$  tel que  $\bigcup_{a \in A} B(a)$  soit la réunion disjointe des  $\gamma\Sigma$ ,  $\gamma \in S$ .

Pour tout réel  $\lambda > 0$ , soit  $X_\lambda(a)$  (resp.  $B_\lambda(a)$ ) l'ensemble des  $z \in B(a)$  dont la distance à  $X(a)$  est égale (resp. supérieure ou égale) à  $\lambda$ . Posons  $\Sigma_\lambda = \Sigma \cap B_\lambda(a_0)$ . Il existe  $c_1 > 0$  et  $c_2 > 0$  tels que le diamètre de  $\Sigma_\lambda - \Sigma_{\lambda+1}$  soit majoré par  $c_1$ , et que le volume (pour  $v_H$ ) de  $\Sigma_\lambda - \Sigma_{\lambda+1}$  soit égal à  $c_2 e^{-\lambda}$ . Il existe  $c_3 > 0$  tel que pour  $z, z' \in H$ ,  $d(z, z') \leq c_1$ , on ait  $|\omega_{Y_0}^s(z)| \leq c_3 |\omega_{Y_0}^s(z')|$  (rappelons que  $|\omega_{Y_0}^s(z)| = (\text{Im}(z)/|z|)^\sigma$ ).



La partie hachurée représente  $\Sigma$ .

Soit  $z \in \Sigma$ ,  $\zeta$  sa projection dans  $M$  et  $\lambda = d(\zeta, \xi)$  la distance de  $\zeta$  à  $\xi$ . On a

$$\begin{aligned} c_2 e^{-\lambda} \sum_{\gamma \in S} |\omega_{Y_0}^s(\gamma z)| &= \int_{\Sigma_\lambda - \Sigma_{\lambda+1}} \sum_{\gamma \in S} |\omega_{Y_0}^s(\gamma z)| |v_H|(z') \\ &\leq c_3 \int_{\Sigma_\lambda - \Sigma_{\lambda+1}} \sum_{\gamma \in S} |\omega_{Y_0}^s(\gamma z')| |v_H|(z') \\ &\leq c_3 \int_{\bigcup_{\gamma \in S} \gamma \Sigma_\lambda} |\omega_{Y_0}^s(z')| |v_H|(z') \\ &\leq c_3 \sum_{a \in A} \int_{B_\lambda(a)} (\text{Im}(z')/r)^\sigma |v_H|(z'). \end{aligned}$$

Mais l'homothétie de centre  $a$  et rapport  $e^{-\lambda}$  laisse  $v_H$  invariant et transforme  $B(a)$  en  $B_\lambda(a)$ , de sorte que

$$\sum_{a \in A} \int_{B_\lambda(a)} (\operatorname{Im}(z'))^\sigma |v_H|(z') = e^{-\lambda\sigma} \sum_{a \in A} \int_{B(a)} (\operatorname{Im}(z'))^\sigma |v_H|(z') \leq e^{-\lambda\sigma} \int_C (\operatorname{Im}(z'))^\sigma |v_H|(z') .$$

Nous aurons donc

$$|\hat{\eta}^s(\zeta)| \leq \left| \frac{L(s+1)}{L(s)} \right| \sum_{\gamma \in S} |\omega_{Y_0}^s(\gamma z)| \leq e^{-\lambda(\sigma-1)} \left| \frac{L(s+1)}{L(s)} \right| (c_3/c_2) r^{-\sigma} \int_C (\operatorname{Im}(z'))^\sigma |v_H|(z') .$$

Ceci montre que  $\hat{\eta}^s(\zeta)$  tend vers 0 lorsque  $\lambda = d(\zeta, \Xi)$  tend vers l'infini, c'est-à-dire lorsque  $\zeta$  tend vers  $p$ .

## BIBLIOGRAPHIE

Le travail de Kudla et Millson dont il s'agit est le suivant:

- [1] S.-S. KUDLA and J.-J. MILLSON - *Harmonic Differentials and Closed Geodesics on a Riemann Surface*, Inv. Math., 54(1979), 193-211.

La forme harmonique duale avait été obtenue dans [2] dans le cas compact et dans [3] dans le cas  $\Gamma_0(N)$  :

- [2] J. FAY - *Fourier coefficients of the resolvent for a Fuchsian group*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 293-294(1977), 144-203.  
 [3] H. PETERSSON - *Ein Summationsverfahren für die Poincaréschen Reihe von der Dimension -2 zu der hyperbolischen Fixpunkte-Paaren*, Math. Zeit., 49 (1943/44), 441-446.

Séries d'Eisenstein aux pointes et décomposition spectrale pour les surfaces de Riemann; en plus du cours (non publié) de Godement à Paris VII en 1971/72, il y a :

- [4] I.-M. GEL'FAND, M.-I. GRAEV and I.I. PIATETSKI-SHAPIRO - *Representation theory and automorphic functions (Generalized functions, vol. 6)*, Moscou 1966. Traduction anglaise Saunders 1969.  
 [5] E. HECKE - *Darstellung von Klassenzahlen als Perioden von Integralen 3. Gattung aus dem Gebiet der elliptischen Modulfunktionen*. Gesam. Werke, n° 21.  
 [6] T. KUBOTA - *Elementary theory of Eisenstein series*, Halsted Press, New-York, 1973.  
 [7] H. MAASS - *Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Dirichlet'scher Funktionalgleichungen*, Math. Ann., 121(1949), 141-183.

Pour l'homologie et la cohomologie des surfaces de Riemann, il y a un cours (non publié) de Serre au Collège de France en 1967, [10] pour le cas holomorphe, [8]-[9] pour la partie dite à l'infini :

- [8] G. HARDER - *On the cohomology of  $SL_2(\mathcal{O})$* , dans : Lie groups and their representations. Proc. of the Summer School on Group Representations, Ed. Gel'fand Hilger, London, 1975, 139-150.  
 [9] G. HARDER - *On the cohomology of discrete arithmetically defined groups*, dans : Proc. of the Int. Coll. on Discrete Subgroups of Lie Groups and Applications to Moduli, Bombay, 1973. Oxford University Press, 1975, 129-160.  
 [10] G. SHIMURA - *Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Iwanami Shoten, Japon, et Princeton University Press, Etats-Unis d'Amérique, 1971.

Généralisation des constructions géométriques de formes automorphes harmoniques :

- [11] S.-S. KUDLA and J.-J. MILLSON - *Geodesic cycles and the Weil representation I*, Preprint 1979.  
 [12] S.-S. KUDLA and J.-J. MILLSON - *The Poincaré dual of a Geodesic Algebraic Curve in a quotient of the 2-Ball*, Preprint 1980.

- [13] J.-J. MILLSON and M.-S. RAGUNATHAN - *Geometric construction of cohomology of arithmetic groups I*, à paraître dans le volume du Journal of the Ind. Math. Soc. dédié à Patodi.

Pour l'homologie et la cohomologie des groupes arithmétiques dans un cadre plus général, il y a :

- [14] A. ASH - *Cuspidal cohomology of congruence subgroups of  $SL_3(\mathbb{Z})$* , preprint, octobre 1980.
- [15] A. ASH - *Non square integrable cohomology of arithmetic groups*, Duke Math. Journal, 47(1980), 435-449.
- [16] A. BOREL - *Cohomology of Arithmetic Groups*, dans Proc. of the Int. Congress of Mathematicians, Vancouver, 1974, 435-442.
- [17] A. BOREL and J.-P. SERRE - *Corners and arithmetic groups*, Comm. Math. Helv., 48(1974), 244-297.
- [18] A. BOREL and N. WALLACH - *Continuous Cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, Ann. of Math. St. 94, Princeton University Press, 1980.
- [19] J.-P. SERRE - *Cohomologie des groupes discrets*, dans Prospects in Math., Ann. of Math. Studies, 70. Princeton University Press, 1971, 77-169.
- [20] J. SCHWERMER - *Eisensteinreihen und die Kohomologie von Kongruenzuntergruppen von  $SL_n(\mathbb{Z})$* , Thèse, Bonn, 1977.
- [21] J. SCHWERMER - *A note on Link Complements and Arithmetic Groups*, Math. Ann., 249(1980), 107-110.

Décomposition spectrale générale des formes automorphes :

- [22] R. GODEMENT - *The spectral decomposition of cusp-forms*, dans Proc. Symp. Pure Math. A.M.S., 9(1966), 225-234.
- [23] HARISH-CHANDRA - *Automorphic forms on semi-simple Lie groups*, Lect. Notes in Math., 62, Springer, Berlin-Heidelberg-New-York, 1966.
- [24] R.-P. LANGLANDS - *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Lect. Notes in Math., 544, Springer, Berlin-Heidelberg-New-York, 1976.

Pour des résultats généraux concernant l'homologie et la cohomologie des variétés :

- [25] P. GRIFFITHS and J. HARRIS - *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley, 1979.
- [26] M. GREENBERG - *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin, 1967.
- [27] G. de RHAM - *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1960.

Paul GÉRARDIN

Université de Paris VII  
Département de Mathématiques  
Tour 45-55, 2 Place Jussieu  
F-75221 PARIS Cedex 05