

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN CERF

1-formes fermées non singulières sur les variétés compactes de dimension 3

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. n° 574, p. 205-219

http://www.numdam.org/item?id=SB_1980-1981__23__205_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

1-FORMES FERMÉES NON SINGULIÈRES
SUR LES VARIÉTÉS COMPACTES DE DIMENSION 3

par Jean CERF

Le théorème d'isotopie des formes fermées non singulières cohomologues est énoncé au § 2. Il a été démontré pour la première fois dans sa généralité par Laudendach et Blank [6]. Nous suivons la méthode de démonstration de Ngo Van Quê et Roussarie [9] qui s'appuie sur le cas particulier, antérieurement connu, des formes rationnelles. Dans tout l'exposé, V désigne une variété de classe C^∞ , compacte, connexe. A partir du § 3, V est toujours de dimension 3.

§ 1. Feuilletages par formes fermées. Formes fermées rationnelles et irrationnelles

Soit ω une 1-forme différentielle sur V ; ω est dite *non singulière* si $\omega(x) \neq 0 \quad \forall x \in V$. Une telle forme ω définit sur V un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1 sans singularité si et seulement si ω est intégrable, i.e. $\omega \wedge d\omega = 0$. [Si ω est de classe \mathcal{C}^r , \mathcal{F} est de classe \mathcal{C}^{r+1} ; nous supposons toujours que ω est de classe \mathcal{C}^∞ .]

Réciproquement, tout feuilletage \mathcal{F} de codimension 1 sans singularité sur V est le feuilletage associé à une 1-forme non singulière ω définie à multiplication près par une fonction de classe \mathcal{C}^∞ , sans zéro, à part cela arbitraire.

Si ω est fermée (i.e. $d\omega = 0$) elle est a fortiori intégrable. Si \mathcal{F} est le feuilletage associé à ω fermée non singulière, toutes les autres formes fermées définissant \mathcal{F} sont les $f\omega$ où f prend sur chaque feuille une valeur constante non nulle.

Une première conséquence du théorème de Stokes : tout arc orienté γ transverse au feuilletage \mathcal{F} défini par ω fermée peut être affecté de la longueur (orientée) $\int_\gamma \omega$. La "mesure transverse" ainsi définie est *invariante* (i.e. elle ne change pas si on déforme continuellement γ de façon que les extrémités restent chacune dans sa feuille); son existence implique en particulier que \mathcal{F} n'a pas d'holonomie, et que \mathcal{F} est transversalement orienté.

Réciproquement, si \mathfrak{F} est tel qu'il existe une mesure transverse orientée invariante qui soit "de Lebesgue" (i.e. de la forme $\varphi(t)d\gamma(t)$ pour tout arc transverse paramétré $\gamma(t)$, φ étant une fonction de classe C^∞ partout non nulle) alors \mathfrak{F} peut être défini par ω fermée. Plus difficile est le théorème suivant (Sacksteder [12] complété par Imanishi [2]) : si \mathfrak{F} est sans holonomie et transversalement orientable, alors \mathfrak{F} est topologiquement conjugué à un feuilletage défini par une forme fermée.

Deuxième conséquence du théorème de Stokes : pour tout $x \in V$, l'intégration de ω le long des lacets d'origine x définit un morphisme $\alpha : \pi_1(V;x) \rightarrow \mathbb{R}$ qui se factorise par $H_1(V;\mathbb{Z})$, de sorte que l'image de α ne dépend en fait que de la classe de cohomologie $[\omega]$ de ω ; cette image s'appelle le *groupe des périodes* de ω .

DÉFINITION.— ω fermée est dite rationnelle s'il existe $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tel que $\lambda[\omega] \in H^1(V;\mathbb{Q})$, et irrationnelle dans le cas contraire (qui ne peut se produire que si la dimension du H^1 est ≥ 2).

Définition équivalente : ω est rationnelle si et seulement si $\exists \lambda \neq 0$ tel que $\lambda \text{ Image}(\alpha) \subset \mathbb{Q}$.

V étant compacte, $\pi_1(V)$ est à génération finie ; donc $\text{Image}(\alpha)$ est un \mathbb{Z} -module de type fini. Donc $\text{Image}(\alpha)$ est discret (et alors de la forme $\mu\mathbb{Z}$, $\mu \in \mathbb{R}$) ou partout dense suivant que α est rationnelle ou non.

Lemme 1.— Soit \mathcal{C} l'espace de 1-formes fermées non singulières sur V . L'application naturelle $\mathcal{C} \rightarrow H^1(V, \mathbb{R})$ est ouverte.

En particulier, toute $\omega \in \mathcal{C}$ peut être approchée arbitrairement près par ω' rationnelle, et tout couple $(\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ de formes cohomologues peut être approché par (ω'_1, ω'_2) rationnelles et cohomologues.

[En effet, l'espace de toutes les 1-formes fermées (dans lequel \mathcal{C} est ouvert) s'envoie linéairement et, d'après de Rham, surjectivement, sur l'espace vectoriel de dimension finie $H^1(V, \mathbb{R})$].

Lemme 2.— Tout arc γ le long duquel l'intégrale de la forme fermée ω est nulle, est homotope avec extrémités fixes à un arc d'une feuille.

[On déforme γ , le long des trajectoires d'un champ transverse à ω , en un arc γ' le long duquel l'intégrale de ω est identiquement nulle ; γ' est contenu dans une feuille.]

Il résulte du lemme 2 que pour tout $x_0 \in V$ et tout arc γ sans point double transverse à ω passant par x_0 , la feuille de x_0 recoupe γ exactement aux points x tels que

$$\int_{x_0}^x \omega \in \text{Image}(\alpha) \quad (\text{groupe des périodes de } \omega).$$

Donc, si ω est rationnelle, toute feuille est fermée et par conséquent compacte.

Si ω est irrationnelle, toute feuille est partout dense [car on peut recouvrir V par un nombre fini de "boîtes"]. Dans les deux cas, toutes les feuilles sont difféomorphes entre elles.

Dans le cas rationnel, on peut dire davantage : quitte à remplacer ω par $\mu\omega$, $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$, on peut supposer que le groupe des périodes est \mathbb{Z} ; dans ce cas, pour tout couple de points de V , l'intégrale $\int_{x_0}^x \omega$ est bien définie dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Le choix de $x_0 \in V$ définit donc une application $V \rightarrow S^1$ qui est une fibration localement triviale (les trajectoires de n'importe quel champ transverse donnent des trivialisations locales). Le lemme 1 impliquant en particulier que s'il existe sur V une ω fermée non singulière il en existe une rationnelle, on a prouvé : *Si, sur V compacte connexe sans bord, il existe une 1-forme ω fermée non singulière, alors V est l'espace total d'une fibration sur le cercle.*

Ce résultat est dû à Tischler [14] ; le résultat de trivialité locale est un cas particulier d'un résultat d'Ehresmann : "toute submersion propre d'une variété sur une autre est une fibration localement triviale".

Cas où V a un bord non vide. Si $\partial V \neq \emptyset$, et si on impose à ω (non singulière) d'être tangente au bord, alors V est difféomorphe à $M \times [0,1]$, où M est une 2-variété compacte, et $\omega = df$, où f est une fonction réelle sans point critique admettant $M \times \{0\}$ et $M \times \{1\}$ (dans l'ordre) pour surfaces de niveau. On notera que le cas sans bord est obtenu à partir de là en identifiant des deux composantes de ∂V par un difféomorphisme arbitraire.

§ 2. Difféomorphismes et 1-formes fermées non singulières. Lemme de Moser.
Énoncé du théorème de Laudenbach-Blank

Le groupe $\text{Diff } V$ opère naturellement dans l'espace des 1-formes fermées non singulières sur V . Si deux formes ω et ω' sont dans la même orbite de l'action de $\text{Diff}_0 V$ (composante connexe de l'identité dans $\text{Diff } V$), on dit qu'elles sont *isotopes* ; elles sont alors homotopes, donc cohomologues ; de façon plus précise, elles peuvent être jointes par un chemin (ω_t) de formes non singulières ayant toutes la même classe de cohomologie ; cette condition, comme on va le voir, suffit à entraîner l'isotopie.

a) Cas avec bord : $V = M \times [0,1]$

On note dans ce cas \mathcal{P} le sous-groupe de $\text{Diff } V$ formé des éléments qui laissent fixe chaque point de $M \times \{0\}$ (\mathcal{P} s'appelle le *groupe des pseudo-isotopies de M*).

Soit p la projection : $V \rightarrow [0,1]$. L'application $g \mapsto g^* dp$ de \mathcal{P} dans l'espace \mathcal{E} des formes fermées non singulières dont l'intégrale de bord à bord vaut 1, admet alors une section globale. [Méthode : on associe à toute ω une

famille de transversales, par exemple les trajectoires orthogonales pour une métrique riemannienne choisie une fois pour toutes, puis à $x = (x_0, t) \in M \times [0, 1]$ on associe le point y de la trajectoire issue de x_0 défini par

$$\int_{x_0}^y \omega = \int_{x_0}^x dp = t \quad .]$$

Il résulte de ceci que l'application $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}$ relève les chemins. Bien plus, il en résulte que \mathcal{P} est homéomorphe au produit $\mathcal{P}_0 \times \mathcal{C}$, où \mathcal{P}_0 est le sous-groupe de \mathcal{P} laissant dp invariante ; \mathcal{P}_0 étant contractile (il s'identifie à l'espace des chemins d'origine id_M dans $\text{Diff } M$), la connexité de \mathcal{C} est équivalente à celle de \mathcal{P} .

b) Le cas sans bord : V fibré sur S^1

Lemme (Moser [8]).— Soit \mathcal{C} l'espace des 1-formes fermées non singulières sur V ($\partial V = \emptyset$). Soient $\omega \in \mathcal{C}$ et $x_0 \in V$; on note \mathcal{G}_{x_0} le sous-groupe de $\text{Diff } V$ formé des éléments qui fixent x_0 . A tout $\omega' \in \mathcal{C}$ assez voisin de ω et cohomologue à ω on peut associer continuellement $g_{\omega'} \in \mathcal{G}_{x_0}$ tel que $g_{\omega'}^ \omega = \omega'$, et que $g_{\omega} = \text{id}_V$.*

Ce lemme (qui permet de relever en une isotopie tout chemin ne sortant pas d'une classe de cohomologie) se prouve ainsi : on associe à tout ω' un champ X transverse ; en fait, ω' étant proche de ω on peut choisir X constant et transverse à ω ; on obtient un germe de difféomorphisme transportant ω sur ω' en associant à tout x proche de x_0 le point y de sa trajectoire défini par $\int_{x_0}^y \omega' = \int_{x_0}^x \omega$. Cette formule s'écrit aussi

$$\int_x^y \omega' = \int_{x_0}^x (\omega - \omega')$$

Sous cette forme elle a un sens global et définit un difféomorphisme dès que ω' est assez proche de ω (et, bien sûr, cohomologue à ω). \square

Le théorème de Laudénbach et Blank s'énonce ainsi :

THÉORÈME.— Soient V une variété compacte de dimension 3, ω et ω' deux formes fermées non singulières sur V [tangentes à ∂V le cas échéant]. Alors pour que ω et ω' soient isotopes il suffit qu'elles soient cohomologues.

D'après ce qui précède, cet énoncé a un contenu non vide dans les cas a) et b) ci-dessus.

Dans le cas a), il équivaut à la connexité de l'espace de toutes les différentielles de fonctions sans point critique sur $M \times [0, 1]$ admettant $M \times \{0\}$ et $M \times \{1\}$ (dans l'ordre) pour surfaces de niveau. Ou (c'est équivalent) à la connexité de cet espace de fonctions ; ou encore à la connexité du groupe des pseudo-isotopies de M .

Dans le cas b), il équivaut au fait que l'espace de toutes les formes fermées non singulières ayant une classe de cohomologie donnée est connexe ou vide.

§ 3. Les théorèmes d'isotopie de Waldhausen. Applications : pseudo-isotopie des surfaces, isotopie des formes rationnelles

On supposera dans ce paragraphe que toutes les variétés considérées sont orientables (bien que les théorèmes énoncés restent vrais, avec quelques restrictions, dans le cas non orientable). On rappelle qu'une sous-variété M d'une variété est dite *propre* si $\partial M = M \cap \partial V$.

DÉFINITION 1.— Une 3-variété V est dite *irréductible* si pour toute sous-variété Σ difféomorphe à S^2 , $V - \Sigma$ a deux composantes, et l'adhérence de l'une d'elles est difféomorphe à D^3 [brièvement : "toute 2-sphère plongée borde une boule"].

DÉFINITION 2.— Une surface M non difféomorphe à S^2 , proprement plongée dans une 3-variété V est dite *incompressible* si l'application induite $\pi_1(M) \rightarrow \pi_1(V)$ est injective. S'il existe dans V une surface incompressible, on dit que V est "suffisamment grande".

Exemples.— 1) \mathbb{R}^3 , S^3 sont irréductibles : c'est le "théorème de Schönflies" démontré en fait par Alexander dans le cas PL (et Morse dans le cas différentiable).

2) Si V est fibré sur S^1 , et si la fibre M est une surface de genre ≥ 1 , alors V est irréductible et "suffisamment grande". En effet, le revêtement universel \tilde{V} de V est difféomorphe à \mathbb{R}^3 ; les relèvements d'une 2-sphère plongée dans V sont, deux à deux, disjoints et extérieurs, donc la restriction à l'"intérieur" de chacun d'entre eux de la projection $\tilde{V} \rightarrow V$ est un plongement; et d'autre part la suite exacte d'homotopie montre que chaque fibre est une surface incompressible.

THÉORÈME (Waldhausen [15]; cf. [5] pour un exposé contenant le cas non orientable).— Soit V une 3-variété orientable irréductible "suffisamment grande".

1) Soient M et M' deux sous-variétés propres compactes incompressibles de V ; si M et M' sont proprement homotopes, elles sont isotopes.

2) Tout difféomorphisme de V proprement homotope à l'identité est isotope à l'identité.

La démonstration est fondée sur l'existence, sur toute 3-variété irréductible suffisamment grande, d'une "hiérarchie", résultat dû à W. Haken. Une *hiérarchie* est une suite de sous-variétés (à bord) :

$$V \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_n \supset V_{n+1}$$

et de surfaces incompressibles $M_i \subset V_i$ ($i = 1, \dots, n$) (les "murs") telles que V_{i+1} soit l'adhérence de $[V_i - (\text{un voisinage tubulaire de } M_i)]$, et que V_{n+1} soit réunion disjointe de boules anguleuses.

Pour le 1), on se ramène à une situation de h -cobordisme par une isotopie de disjonction de M et M' , composée d'isotopies données par l'irréductibilité de V .

Pour le 2) on construit d'abord une isotopie mettant en place les murs d'une hiérarchie. Dans la catégorie PL (où travaille originellement Waldhausen) on termine par le théorème d'Alexander (valable en toute dimension) : le groupe des automorphismes d'une structure PL du disque fixant le bord est connexe (il est même contractile). Dans la catégorie DIFF, on termine en utilisant le théorème de [1] : $\text{Diff } D^3$ est connexe ; ce théorème est d'ailleurs équivalent au cas $M = S^2$ de l'alinéa qui suit.

APPLICATION 1 ("théorème de pseudo-isotopie pour les surfaces").— Pour toute surface orientable M , le groupe \mathcal{P} des difféomorphismes de $M \times [0,1]$ fixant $M \times \{0\}$, est connexe.

Forme équivalente (cf. § 2).— L'espace des 1-formes fermées non singulières, tangentes au bord, sur $M \times [0,1]$, est connexe.

[Compte tenu du 2) du théorème de Waldhausen, il suffit de remarquer que tout $g \in \mathcal{P}$ est proprement homotope à l'identité. Or si p désigne la projection $M \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, g est proprement homotope à l'application $(x,t) \rightarrow (p \circ g(x,t), t)$, qui s'identifie à un chemin d'origine l'identité dans l'espace des applications $M \rightarrow M$.]

APPLICATION 2 (Kupka et Ngo Van Quê [3]).— Si ω et ω' (fermées, non singulières, cohomologues sur V de dimension 3) sont rationnelles, elles sont isotopes.

Démonstration.— Quitte à multiplier ω et ω' par $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, on peut les supposer à périodes entières. Soient p et p' les applications $V \rightarrow S^1$ associées à ω et ω' par intégration à partir d'un même point $x_0 \in V$. Ce sont des fibrations (cf. § 2) ; on note $p^{-1}(0) = M$, de même M' . Les applications p et p' sont homotopes : elles sont en effet jointes par le chemin p_t correspondant au chemin linéaire qui joint ω à ω' (mais en général p_t n'est pas une fibration).

a) Si M est difféomorphe à S^2 , il en est de même de M' ; V est difféomorphe à $S^2 \times S^1$. Or deux sphères M et M' plongées dans $S^2 \times S^1$ et n'y bordant pas de disque, sont isotopes. [On montre l'isotopie de M à $S^2 \times \{0\}$; pour cela, on disjoint M par isotopie de $S^2 \times \{\frac{1}{2}\}$, puis on applique dans $S^2 \times (S^1 - \{\frac{1}{2}\})$, identifié à $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, le théorème de Schönflies.] On peut donc supposer $M' = M$; il reste à appliquer $\pi_0(\text{Diff } D^3) = 0$ (ou, ce qui revient au même, le théorème de pseudo-isotopie pour D^2).

b) $M \neq S^2$

Les applications $\pi_1(M; x_0) \rightarrow \pi_1(V; x_0)$ et $\pi_1(M'; x_0) \rightarrow \pi_1(V; x_0)$ ont même image (c'est le noyau de la même flèche vers \mathbb{Z}) ; or ce sont des injections. D'où un isomorphisme f_* rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(M; x_0) & \searrow & \pi_1(V; x_0) \\
 f_* \downarrow \cong & & \nearrow \\
 \pi_1(M'; x_0) & \searrow & \pi_1(V; x_0)
 \end{array}$$

M et M' sont donc des surfaces de même genre ; de façon plus précise, un théorème de Mangler [7] fournit un difféomorphisme $f : (M, x_0) \rightarrow (M', x_0)$ réalisant f_* . Une théorie d'obstructions (facile dans ce cas car V et M ont tous leurs π_i nuls pour $i > 1$) montre que f est homotope à l'application identique $M \hookrightarrow V$. Le 1) du théorème de Waldhausen permet alors de se ramener par isotopie au cas où $M = M'$. Par une petite isotopie, on fait coïncider les deux fibrations au voisinage de M . On "ouvre" alors V le long de M et il reste à appliquer à $M \times [0,1]$ le théorème de pseudo-isotopie. \square

Remarque.— Le cas rationnel constitue en fait le "cas général" lorsque $M \approx S^2$, puisque toute forme sur $S^2 \times S^1$ est rationnelle ; dans le § suivant, M sera donc toujours de genre ≥ 1 .

§ 4. Le cas de deux formes irrationnelles ($\partial V = \emptyset$)

Soient ω_1 et ω_2 fermées non singulières cohomologues ; s'il existe un champ X (positivement) transverse à ω_1 et ω_2 , il résulte du lemme de Moser (§ 2) qu'elles sont isotopes : le chemin linéaire $t\omega_1 + (1-t)\omega_2$, $t \in [0,1]$ reste en effet dans la même classe de cohomologie, et toutes ces formes sont non singulières parcequ'elles possèdent un champ transverse (à savoir X).

Le principe de la démonstration de Ngo Van Quê et Roussarie est de se ramener à ce cas. Soient ω'_1 et ω'_2 deux formes (fermées non singulières) rationnelles cohomologues approchant respectivement ω_1 et ω_2 d'assez près pour qu'il existe un champ X_1 (resp. X_2) transverse commun à ω_1 et ω'_1 (resp. ω_2 et ω'_2) [cf. lemme 1]. D'après le § 3, il existe une isotopie transportant ω'_2 sur ω'_1 ; cette isotopie transporte ω_2 sur $\tilde{\omega}_2$ cohomologue à ω_1 , et X_2 sur un champ \tilde{X}_2 transverse commun à ω'_1 et à $\tilde{\omega}_2$. Le lemme principal de [8] qui d'après ce qui précède achève la preuve est le suivant :

(*) *Soit une fibration $V \rightarrow S^1$. Soit ω une 1-forme fermée non singulière sur V telle qu'il existe un champ X transverse commun à la fibration et à ω . Alors quel que soit le champ Y transverse à la fibration, il existe une isotopie de V transportant ω sur une forme transverse à un champ arbitrairement voisin de Y .*

Ngo Van Quê et Roussarie prouvent (*) en trois étapes.

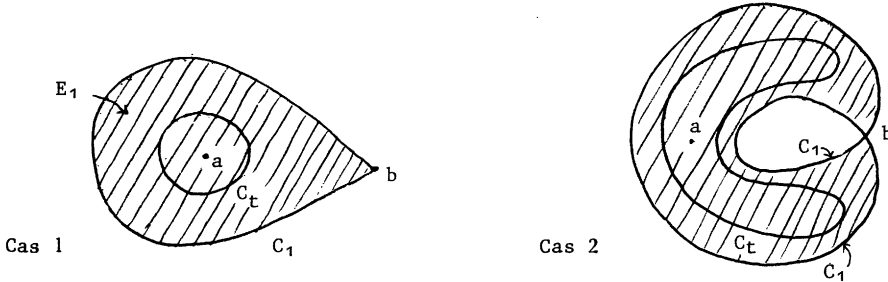
lère étape (indépendante de Y). M étant une fibre de V choisie une fois pour toutes, il existe une isotopie de V le long des trajectoires de X mettant ω en bonne position par rapport à M au sens suivant : le contact de M et ω a lieu en un nombre fini de points selles, et le long d'un nombre fini de cercles (en chacun desquels le contact est transversalement quadratique).

Remarque (essentielle pour la troisième étape).— Les cercles de contact sont tous non-homotopes à zéro sur M , autrement dit ne bordent pas de disques sur M .

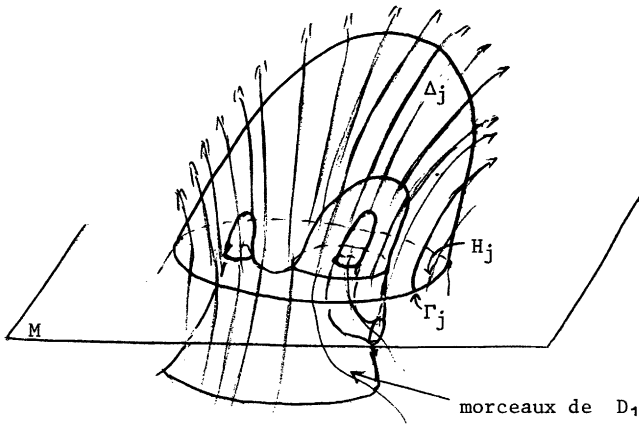
(Car sinon, il y aurait un disque minimal, et sur un tel disque le feuilletage induit par ω aurait au moins un centre.)

On commence par mettre ω en position générale par rapport à M , c'est-à-dire telle que le contact se fasse en un nombre fini de points de Morse, selles et centres, au plus un contact par feuille de ω . Il faut soit faire disparaître les centres, soit les "remplacer" par des cercles de contact.

Soit a un centre ; près de a , les feuilles de $\omega|M$ sont des cercles C_t "concentriques" ; leur réunion est un disque ouvert dont l'adhérence, notée E_1 , contient sur son bord, noté C_1 une selle b ; E_1 est soit un disque anguleux (cas 1) soit un "anneau pincé" (cas 2) :

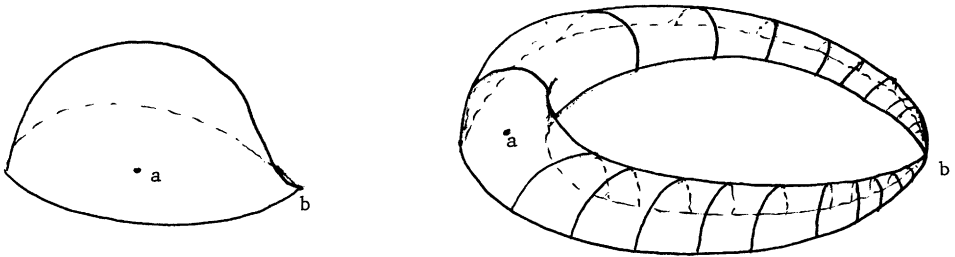


Chaque C_t (pour $t < 1$) borde dans sa feuille un disque D_t dont la limite D_1 a (parce qu'il existe un champ transverse commun) la même forme, disque anguleux ou anneau pincé, que le E_1 correspondant. On met D_1 en position générale par rapport à la fibration. Outre C_1 (qu'on n'a pas bougé), $M \cap D_1$ se compose alors d'un nombre fini de cercles Γ_j , le long desquels l'intersection est transversale, puisque D_1 n'a pas d'autre contact avec M que b . Les cercles Γ_j sont ordonnés par l'inclusion des disques Δ_j qu'ils bordent sur D_1 . Soit j tel que Γ_j soit minimal en ce sens, soit H_j le disque bordé par Γ_j dans M ; $H_j \cup \Delta_j$ borde une boule anguleuse B_j "à deux faces", réunion d'arcs de trajectoires de X entrant par une face et sortant par l'autre. Dans ces conditions, on peut construire un disque Δ'_j , proche de Δ_j à l'extérieur de B_j , se raccordant à M le long de Γ'_j proche de Γ_j , tel que $\omega|\Delta'_j$ soit un feuilletage par cercles concentriques, i.e. ayant pour seule singularité un centre ; puis une isotopie Φ le long des trajectoires de X , amenant Δ'_j sur le disque H'_j bordé par Γ'_j . L'isotopie Φ transforme ω en une forme pour laquelle Γ_j (et toutes les composantes éventuelles de $H_j \cap D_1$) sont éliminées ; le nombre total de points de contact de M avec ω ne peut pas augmenter dans l'opération, puisque $\omega|M$ n'est modifié que sur H'_j , et qu'après modification il n'y a sur H'_j qu'un point de contact (or il y en avait au moins un). [S'il se trouvait que $H_j \supset E_1$, on n'en effectuerait pas moins l'isotopie Φ : a et b se trouveraient du même coup éliminés. Ce cas de figure



est en fait exclu ici par l'existence du champ X , transverse commun à ω et à M ; par contre on le rencontrera dans la 3ème étape.]

On peut donc supprimer de proche en proche tous les cercles Γ_j . Compte tenu de l'existence du champ X transverse commun, il ne reste que les deux cas de figure suivants :

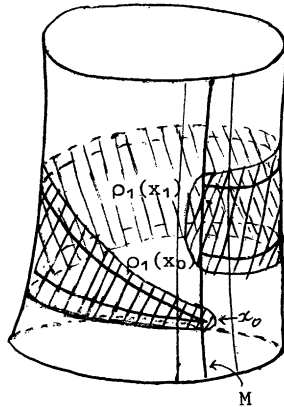


Dans le premier cas, dit "de Smale", il est connu qu'on peut supprimer a et b par une isotopie construite de façon analogue à Φ ci-dessus. Dans le second cas, le même procédé conduit à un cercle de contact.

2ème étape. Quitte à "perturber Y ", c'est-à-dire le remplacer par un champ arbitrairement voisin, on modifie ω par isotopie pour la rendre transversale à un arc de trajectoire de Y d'origine dans M , d'extrémité son premier retour dans M . On peut réaliser cette isotopie en laissant stable chaque fibre; l'acquis de la 1ère étape est donc préservé. On va montrer un peu plus: soit $x_0 \in M$, on va construire une isotopie de V qui envoie l'arc de trajectoire de X (éventuellement perturbé) entre x_0 et son premier retour sur l'arc analogue relatif à Y (éventuellement perturbé).

Les trajectoires de X définissent une application $\rho : M \times \mathbb{R} \rightarrow V$, bijective sur $M \times [0, 1[$; l'application $\rho_1 : x \mapsto \rho(x, 1)$ est le difféomorphisme "de premier retour" de M pour le champ X . L'arc de trajectoire de Y partant de x_0 jusqu'à son premier retour se relève en un arc de $M \times [0, 1]$ noté (x_t, t) . On

perturbe Y pour que la trajectoire issue de x_0 ne se referme pas au 1er tour, i.e. $\rho_1(x_1) \neq x_0$. Puis on perturbe X pour que $\rho_1(x_t) \neq x_0$, $\forall t \in [0,1]$. Soit ψ une isotopie de M telle que $\psi_t \cdot x_0 = x_t$, $\forall t \in [0,1]$; on choisit en plus ψ pour que son support (i.e. la réunion des supports des ψ_t) soit un petit voisinage de la réunion des x_t , et que le support de ψ_t pour t petit soit contenu dans un petit voisinage de x_0 . Alors le difféomorphisme de $M \times [0,1]$ défini par : $(x,t) \mapsto (\psi_t \cdot x, t)$ peut s'étendre en un difféomorphisme de $M \times [-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ respectant les feuilles, de support K contenu dans $M \times]-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ et assez petit pour que $\rho|K$ soit injective; cette isotopie descend dans V et y fait le travail voulu. Sur la figure (schématique) ci-dessous, K est hachuré.



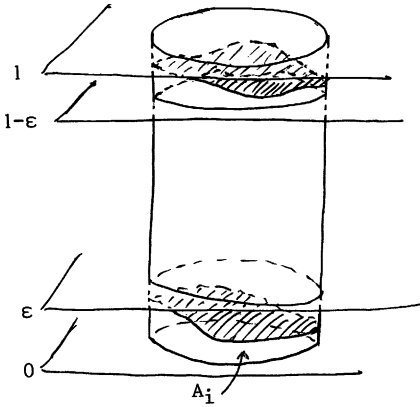
3ème étape. On modifie ω par une isotopie laissant fixe M pour la rendre transversale à Y .

On commence par rendre ω transversale à Y au voisinage de M : le classique lemme d'isotopie des voisinages tubulaires permet de transporter X sur Y au voisinage de M , en laissant fixe M , ainsi que la trajectoire commune à X et Y obtenue à la 2ème étape.

On oublie désormais X ; on travaille entièrement sur V ouvert le long de M , qu'on identifie à $M \times [0,1]$ par les trajectoires de Y ; les segments $\{x\} \times [0,1]$ seront appelés les "verticales"; ω sera n'importe quelle forme fermée sur $M \times [0,1]$, vérifiant la condition de bon contact de la 1ère étape non seulement avec $M \times \{0\}$ et $M \times \{1\}$, mais avec tout $M \times \{t\}$, $t \leq \varepsilon$ ou $t \geq 1-\varepsilon$. En plus, ω est transversale à $\{x_0\} \times [0,1]$ et est transversale aux verticales sur $M \times ([0,\varepsilon] \cup [1-\varepsilon,1])$. Toutes les isotopies qu'on va faire auront leur support dans $M \times]\varepsilon, 1-\varepsilon[$.

On recouvre M par les intérieurs d'un nombre fini de disques A_i . On suppose :

1) que les A_i sont assez petits pour que, pour chacun d'eux, le feuilletage induit par ω sur $A_i \times [0,1]$ possède deux "disques de sécurité" (i.e. deux feuilles qui sont des disques dont le bord est dans la surface latérale $\partial A_i \times [0,1]$), l'un dans $A_i \times [0, \epsilon[$, l'autre dans $A_i \times]1-\epsilon, 1]$.



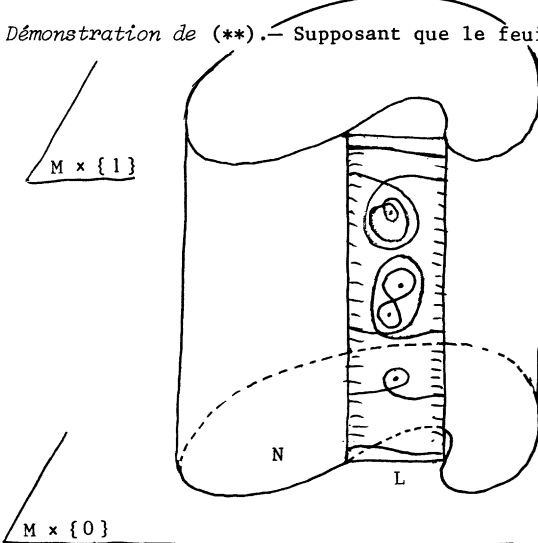
2) que $x_0 \in A_1$, et que A_1 est assez petit pour que ω soit transversale aux verticales de A_1 .

3) que pour tout $i > 1$, $\partial A_i \cap (A_1 \cup \dots \cup A_{i-1})$ est non vide, réunion d'un nombre fini d'arcs, éventuellement ∂A_i tout entier.

Supposant ω déjà transversale aux verticales de $A_1 \cup \dots \cup A_{i-1}$, on construit une isotopie respectant tout l'acquis, qui réalise la transversalité aux verticales sur ∂A_i , puis sur A_i . L'outil essentiel est le lemme suivant :

(**) Les hypothèses sur ω étant celles précisées au début de l'étape 3, soit N une surface compacte (à bord), connexe ou non, plongée dans M , telle que ω soit transversale aux verticales de N . Soit L un arc sans point double joignant (transversalement à ∂N) deux points de ∂N dans le complémentaire de N . On suppose que le feuilletage induit par ω sur $L \times [0,1]$ possède deux arcs de sécurité, l'un dans $L \times [0, \epsilon[$, l'autre dans $L \times]1-\epsilon, 1]$. Il existe alors une isotopie de $M \times [0,1]$, de support disjoint de $M \times ([0, \epsilon] \cup [1-\epsilon, 1])$ et de $N \times [0,1]$ rendant ω transversale à $L \times [0,1]$.

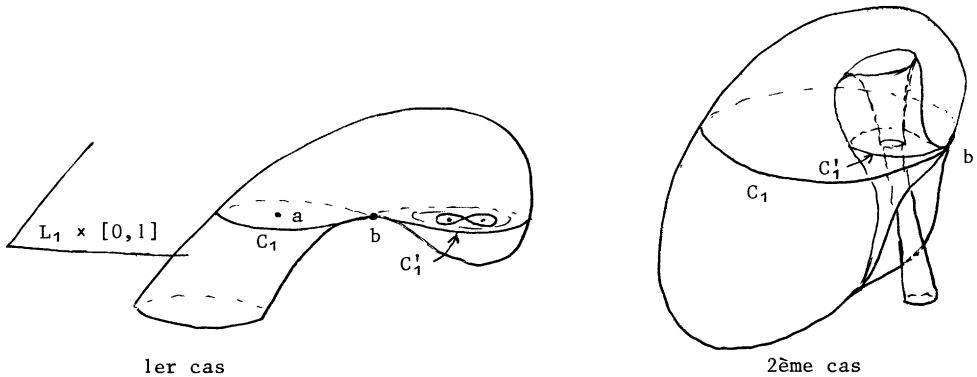
Démonstration de (**).— Supposant que le feuilletage induit par ω sur $L \times [0,1]$ a des singularités, on va les supprimer. Compte tenu de la transversalité de ω à $\partial L \times [0,1]$, ces singularités, après mise en position générale, se composent d'un nombre égal de centres et de selles situés entre les deux arcs de sécurité. Par minimalité, il y a au moins un couple centre-selle (a,b) du type 1 de l'étape 1 ; comme à l'étape 1, on note C_t les cercles concentriques du feuilletage de $\omega|L \times [0,1]$ autour de



a des singularités, on va les supprimer. Compte tenu de la transversalité de ω à $\partial L \times [0,1]$, ces singularités, après mise en position générale, se composent d'un nombre égal de centres et de selles situés entre les deux arcs de sécurité. Par minimalité, il y a au moins un couple centre-selle (a,b) du type 1 de l'étape 1 ; comme à l'étape 1, on note C_t les cercles concentriques du feuilletage de $\omega|L \times [0,1]$ autour de

a , jusqu'à C_1 , cercle anguleux en b . Chaque C_t borde un disque D_t dans sa feuille, D_1 est anguleux en b . Aucun D_t ne rencontre $N \times [0,1]$, car il en est ainsi pour t petit ; il y aurait donc un plus petit t tel que cette rencontre ait lieu : il y aurait contact, c'est impossible puisque le feuilletage induit par ω sur $\partial N \times [0,1]$ est sans singularité. D'autre part (et c'est ici qu'intervient de façon essentielle la condition de bon contact réalisée à l'étape 1), aucun D_t ne rencontre $M \times \{\varepsilon\}$ (ni $M \times \{1-\varepsilon\}$). En effet, comme ci-dessus, il devrait se produire une première rencontre pour un certain t ; un tel contact ne peut avoir lieu ni en un point selle, ni le long des cercles de contact, car ceux-ci, qui sont non-homotopes à zéro, ne peuvent se trouver sur un disque.

On met alors D_1 en position générale par rapport à $L \times [0,1]$; l'intersection se compose d'un nombre fini de cercles Γ_j , plus éventuellement (circonstance qui ne pouvait se produire dans l'étape 1 à cause de l'existence du champ transverse commun) le 2ème cercle anguleux en b du feuilletage induit par ω sur $L \times [0,1]$; on note ce cercle C'_1 . On choisit un Γ_j minimal sur D_1 , il borde sur D_1 un disque Δ_j , sur $L \times [0,1]$ un disque H_j ; $H_j \cup \Delta_j$ borde une boule anguleuse située dans la région permise ; on supprime Γ_j , et éventuellement d'autres composantes Γ_k (et même éventuellement a et b !) par le même procédé qu'à l'étape 1. On supprime ainsi de proche en proche tous les Γ_j . Si D_1 ne contient pas C'_1 , on est alors en situation de Smale, et on supprime a et b . Si D_1 contient D'_1 , deux cas sont a priori possibles.



Dans le premier cas, C'_1 donne lieu à une figure "de Smale" : on peut supprimer C'_1 (en même temps que b et au moins un centre autre que a).

Le second cas, dit du "champignon" est exclu parce qu'on a préalablement supprimé les Γ_j (voir sur la figure un inévitable cercle Γ !).

Application de (**). Supposons que la partie de ∂A_1 qui se trouve hors de $A_1 \cup \dots \cup A_{i-1}$ soit réunion d'arcs disjoints L_1, \dots, L_n , et que ω soit déjà

transversale aux verticales de $L_1 \cup \dots \cup L_{k-1}$. On prend pour N un petit voisinage de $A_1 \cup \dots \cup A_{i-1} \cup L_1 \cup \dots \cup L_{k-1}$. On applique alors (**) pour rendre ω transversale à $L_k \times [0,1]$. Il reste à rendre ω transversale aux verticales de L_k , ce qui est une application immédiate du lemme facile suivant : "si W est une variété à bord pour laquelle le théorème de pseudo-isotopie est vrai, alors tout champ sans singularité sur $W \times [0,1]$, transversal à $W \times \{0\}$ et $W \times \{1\}$, transversal aux "horizontales" (i.e. les $W \times \{t\}$) sur le bord, peut être isotopé, sans bouger le bord de $W \times [0,1]$, en un champ transversal aux horizontales". On applique ce lemme à la partie de $L_k \times [0,1]$ située entre les deux segments de sécurité, identifiée à $[0,1] \times [0,1]$ par un difféomorphisme envoyant les feuilles de ω sur les horizontales ; le lemme s'applique parce que le théorème de pseudo-isotopie est vrai pour le segment (ce qui équivaut à $\pi_0(\text{Diff } D^2) = 0$). On rend ainsi ω transversale aux verticales de ∂A_i . La partie de $A_i \times [0,1]$ située entre les deux disques de sécurité peut alors être identifiée à $D^2 \times [0,1]$ par un difféomorphisme envoyant les feuilles de ω sur les disques horizontaux. Pour rendre ω transversale aux verticales de A_i , on applique le lemme ci-dessus avec $W = D^2$, ce qui est légitime puisque le théorème de pseudo-isotopie est vrai pour D^2 (ce qui équivaut à $\pi_0(\text{Diff } D^2) = 0$).

§ 5. Remarques finales

Outre le cas rationnel, divers cas particuliers du théorème étaient connus : $V = T^3$ (Rosenberg et Roussarie [10]), $V = M \times S^1$ (Roussarie [11]), V fibrée en tores (Kupka et Ngo Van Quê [3]). Les méthodes de démonstration, notamment dans [10], sont proches de celles exposées au § 4. En particulier, elles ont en commun de se ramener au cas de la boule, i.e. à $\pi_0(\text{Diff } D^3) = 0$.

A l'opposé, la démonstration originelle de Laudénbach et Blank [6] prend le problème "à zéro". Elle consiste à mettre les deux feuilletages en position générale l'un par rapport à l'autre, de sorte que leur contact se fait le long d'un nombre fini de courbes. On supprime une à une celles de ces courbes le long desquelles le contact est négatif, et on termine par le lemme de Moser. La démonstration de $\pi_0(\text{Diff } D^3) = 0$ que l'on peut en extraire, quoique encore difficile, l'est moins que la démonstration originelle de [1] ; à noter que cette dernière est spécifique au cas de la sphère (ou de la boule) : c'est une version à 1 paramètre du théorème de Schönflies.

La démonstration donnée ici pourra sans doute être encore simplifiée, et il est vraisemblable qu'on trouvera des démonstrations de caractère plus analytique. Mais il ne faut pas s'attendre à une démonstration trop simple ; le théorème analogue est d'ailleurs faux en grande dimension : Laudénbach a donné les premiers contre-exemples dans [4] ; ils proviennent des obstructions de K -théorie algébrique

au théorème de pseudo-isotopie pour les variétés non simplement connexes (théorie de Hatcher-Wagoner-Igusa). De même on s'étonnera moins de la difficulté du passage du cas rationnel au cas irrationnel, si l'on sait que sur des tores de dimension assez grande, il existe des formes non linéarisables qui sont limites de formes linéarisables par isotopie, de sorte que le quotient de l'espace des formes fermées non singulières par la relation d'isotopie n'est pas un espace séparé (Sikorav [13]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. CERF *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension 3* ($\Gamma_4 = 0$),
Lect. Notes in Math., 53(1968).
- [2] H. IMANISHI *On the theorem of Denjoy-Sacksteder for codimension one foliations without holonomy*, J. Math. Kyoto Univ., 14-3(1974), 607-634.
- [3] I. KUPKA et NGO VAN QUÊ *Formes différentielles fermées non singulières*, in
Lect. Notes in Math., 484(1974), 239-256.
- [4] F. LAUDENBACH *Submersions sur le cercle*, Bull. Soc. Math. France, 104(1976),
417-431.
- [5] F. LAUDENBACH *Topologie de la dimension trois : homotopie et isotopie*,
Astérisque n° 12(1974).
- [6] F. LAUDENBACH et S. BLANK *Isotopie des formes fermées en dimension trois*,
Inventiones Math., Vol. 4 Fasc. 2(1979), 103-177.
- [7] W. MANGLER *Die Klassen von topologischen Abbildungen einer geschlossenen
Fläche auf sich*, Math. Zeitschrift 44(1939), 541-554.
- [8] J. MOSER *On the volume elements on a manifold*, Trans. A.M.S., 120(1965),
286-294.
- [9] NGO VAN QUÊ et R. ROUSSARIE *Sur l'isotopie des formes fermées en dimension 3*,
à paraître aux Inventiones Math.
- [10] H. ROSENBERG et R. ROUSSARIE *Topological equivalence of Reeb foliations*,
Topology, Vol. 9(1970), 231-242.
- [11] R. ROUSSARIE *Plongements dans les variétés feuilletées et classification de
feuilletages sans holonomie*, Publ. Math. IHES, 43(1974), 101-141.
- [12] R. SACKSTEDER *Foliations and pseudo-groups*, Amer. J. of Math., 87(1965),
79-102.
- [13] J.C. SIKORAV *Formes différentielles fermées non singulières sur le n-tore*,
Thèse 3e cycle, Orsay 1981.
- [14] D. TISCHLER *On fibering certain foliated manifolds over S^1* , Topology, Vol.
9(1970), 153-154.
- [15] F. WALDHAUSEN *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, Ann.
of Math., 87(1968), 56-88.

Jean CERF

Université de Paris XI
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
91405 ORSAY