SÉMINAIRE N. BOURBAKI

SYLVESTRE GALLOT

Minorations sur le λ_1 des variétés riemanniennes

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. n° 569, p. 132-148
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1980-1981__23__132_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
33° année, 1980/81, n° 569

Février 1981

MINORATIONS SUR LE λ_1 DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

par Sylvestre GALLOT

0 . INTRODUCTION

a) Définitions et Notations

Nous considérons des variétés M compactes et connexes, de dimension $n \geq 2$, munies d'une métrique riemannienne g. Nous noterons respectivement K, r et u la courbure sectionnelle, la courbure de Ricci et la courbure scalaire de (M,g) (pour les définitions de ces notions voir 0.3). Quand nous aurons affaire à une variété à bord M, le bord ∂M sera supposé C^∞. Par contre, nous serons amenés à considérer des domaines compacts et connexes à bord dans une variété riemannienne complète (en particulier dans l'espace euclidien); nous les noterons D. Dans ce cas, les résultats obtenus sont également valables pour des bords C^∞ par morceaux. On sera amené à comparer le λ_1 d'une variété à bord avec celui de la boule inscrite. Dans ce cas le rayon de la boule sera appelé rayon interne et noté ρ (i.e. $\rho = \sup_m d(m,\partial M)$). Le diamètre et le volume de (M,g) seront notés V et d. Lorsqu'il sera nécessaire de le préciser, nous noterons $\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial M)$ le volume du bord. Toutes les intégrales notées $\int_M$ s'entendent au sens de la mesure canonique associée à g. La mesure et le produit scalaire ponctuel associés à g définissent un produit scalaire intégral $\langle .,. \rangle$ sur les fonctions et sur les tenseurs.

Le laplacien Δ est l'opérateur différentiel elliptique défini par

$$\Delta f = \delta(df) = -\mathrm{div}(\mathrm{grad} f) = -\mathrm{Trace}(\mathrm{Hess} f)$$

Son symbole principal est égal à la norme riemannienne au carré. Pour avoir un problème elliptique, nous allons considérer une des trois situations (*) suivantes :

(C) la variété est sans bord,

(D) la fonction f s'annule sur le bord (problème de Dirichlet),

(N) la dérivée normale de f est nulle sur le bord (problème de Neumann).

Le théorème de Stokes implique que, sous une de ces 3 hypothèses,

0.1 $$< \Delta f, h > = < f, \Delta h > = < df, dh >.$$

On montre que Δ est autoadjoint et positif. Comme nous supposons le domaine compact, son spectre est discret (cf.[AG], théorème 14.6). Dans les cas (C) et (N), la première valeur propre est nulle et les fonctions propres associées sont les constantes. Seule la partie positive du spectre a donc une signification. Les valeurs propres positives forment une suite croissante qui tend vers $+\infty$ et chaque valeur propre est de multiplicité finie (à cause de l'ellipticité). On les écrit

$$0 < \lambda_1^* \leq \lambda_2^* \leq \ldots \leq \lambda_i^* \leq \ldots,$$

où les λ_i^* sont comptés <u>avec leur multiplicité</u> (<u>nous remplacerons</u> $*$ <u>par</u> C , D <u>ou</u> N suivant le problème concerné). Nous nous intéressons principalement à la <u>première valeur propre positive</u> λ_1^* .

b) <u>Motivations et principe du minimax</u>

Les λ_i^* apparaissent lorsqu'on sépare les variables temps et espace dans l'équation des ondes ou dans l'équation de la chaleur.

L'image physique sous-jacente est celle d'une membrane vibrante à bord fixe (cas (D)) ou à bord libre (cas (N) et (C)). Le λ_1^* est alors le carré de la fréquence fondamentale (pour le rapport avec le flambage d'une plaque encastrée voir [P]).

<u>Notons</u> $\tilde{H}_1^2(*)$ l'espace des fonctions sur M qui ont une dérivée faible qui soit L^2 (ces fonctions étant supposées d'intégrale nulle dans les cas (C) et (N)).

La formule 0.1 donne le <u>principe du minimax</u> (dû à Rayleigh) :

0.2 $$\lambda_1^* = \min_{f \in \tilde{H}_1^2(*)} \left[\frac{< df, df >}{< f, f >} \right]$$

D'où l'intérêt de connaître un minorant C de λ_1^* pour obtenir une inégalité (souvent appelée de Poincaré) :

$$< f, f > \leq \frac{1}{C} < df, df >.$$

La connaissance d'un minorant C de λ_1^D permet aussi de mesurer l'erreur quadratique faite en approximant par une fonction ϕ la solution f du problème

$$\begin{cases} \Delta f = u & \text{sur } M \\ f = v & \text{sur } \partial M, \end{cases}$$

où u et v sont des fonctions prescrites. En effet

$$< f-\phi, f-\phi > \leq \frac{1}{C^2} < u-\Delta\phi, u-\Delta\phi >$$

Dans le cas sans bord, désignons par $\mathcal{M}$ l'espace des métriques riemanniennes sur M. Le laplacien intervient dans les dérivées de la courbure ($r(g)$ ou $u(g)$ vue comme fonction de la métrique, et par conséquent dans l'étude des points critiques et dérivées de multiples fonctionnelles sur $\mathcal{M}$ (problème de Yamabé, structure de l'espace des métriques à courbure scalaire constante, module des déformations d'Einstein d'une métrique d'Einstein, etc...). Il est souvent intéressant de connaître un minorant de λ_1^C afin de savoir pour quelles valeurs de λ l'opérateur $\Delta-\lambda$ est à coup sûr positif.
Il est très rare que λ_1^* soit connu. Même dans le plan euclidien, à part les cas du rectangle, du disque (voir A.1), des ellipses (cf [M-F]), du triangle isocèle rectangle, des triangles équilatéral et semi-équilatéral (cf. [BE]), on ne sait pas calculer le λ_1^D d'un domaine compact. C'est pourquoi nous nous intéressons au calcul de minorants de λ_1^* à l'aide du minimum d'informations sur la géométrie de la variété.

c) <u>Pourquoi la courbure de Ricci intervient-elle dans la minoration de</u> λ_1^* ?

0.3. DÉFINITIONS.- Si R est le tenseur de courbure (4,0) associé à la métrique g, la <u>courbure sectionnelle</u> est la fonction K définie, sur le fibré en grassmannienne des 2-plans tangents, par $K(X\wedge Y) = R(X,Y,X,Y)$ (où $\|X\wedge Y\| = 1$). En prenant des traces par rapport à g, on obtient des tenseurs de moins en moins précis. La <u>courbure de Ricci</u> r est la forme quadratique définie sur chaque espace tangent T_mM par $r(X)=\sum_i R(X,e_i,X,e_i)$ (où les e_i forment une base orthonormée de T_mM). La <u>courbure scalaire</u> est la fonction $u = \sum_i r(e_i)$. <u>Nous noterons</u> r_{min} le minimum de r sur le fibré des vecteurs tangents unitaires. On obtient une interprétation géométrique de la courbure de Ricci au point m en comparant la mesure associée à g et la mesure euclidienne de la carte au voisinage de m. Considérons la <u>carte exponentielle</u> $\exp_m$ définie sur un voisinage de m. Dans cette carte, la métrique euclidienne g_o et la métrique g induisent des formes volumes ω_o et ω. Si X est un vecteur de norme 1 de T_mM, la forme volume au point $\exp_m(t.X)$ s'écrit

0.4 $$\omega = \omega_o\,[1 - \frac{t^2}{3!}\,.\,r(X) + O(t^3)]\,.$$

Remarquons que la courbure de Ricci intervient comme coefficient de degré zéro dans le laplacien sur les 1-formes et que $\Delta(df) = d(\Delta f)$ (voir 2.1.(1)).

Lorsqu'on fait une homothétie (i.e. lorsqu'on remplace g par $\alpha^2.g$), le tenseur r reste inchangé, et les nombres λ_1^* et r_{min} sont divisés par α^2. Si le signe de r_{min} donne des informations sur la géométrie et la topologie de la variété, sa valeur (lorsqu'elle est donnée seule) ne donne donc pas d'information supplémentaire. C'est pourquoi nous serons souvent appelés à remplacer λ_1^* et r_{min} par $d^2.\lambda_1^*$ et $d^2.r_{min}$, ce qui les rend insensibles aux homothéties. Nous nous laissons guider par la démarche heuristique suivante : un résultat de M. Gromov (cf [G2], chapitre 5) montre que, pour une variété sans bord M et pour des constantes a et b données, l'ensemble des

métriques g qui vérifient $r_{min} \geq a$ et $d \leq b$ est précompact pour la topologie de Hausdorf sur l'espace des métriques (attention ! r_o peut être négatif). On espère donc une minoration universelle de $\lambda_1^C.d^2$ par une constante ne dépendant que de $r_{min}.d^2$. Le contre exemple suivant, dû à Calabi, prouve qu'on ne peut espérer trouver mieux.

0.5. PROPOSITION.- Sur toute variété M (avec ou sans bord), il existe une famille de métriques g_t, de volume et de diamètre constants telles que $\lambda_1^*(g_t)$ tende vers zéro quand t tend vers l'infini.

Démonstration : Sur toute variété M, on peut déformer un disque local en un champignon rattaché à M par un cylindre C. On peut mettre sur M une métrique g_t de sorte qu'une partie C_o de C soit le produit riemannien de $[0,\ell]$ par la sphère S^{n-1} de rayon $\frac{1}{t}$.

Notons M_o et M_1 les composantes connexes de $M \setminus C_o$. Considérons une fonction f de $\tilde{H}_1^2(*)$, constante sur M_o et M_1 et variant linéairement sur C_o. Le rapport $\frac{<df,df>}{<f,f>}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{t}$. Le principe du minimax 0.2. permet de conclure. □

Remarques : Il est donc impossible de trouver une minoration universelle de λ_1^* ne dépendant que de n, d et V. Lorsqu'on fait tendre t vers l'infini, la courbure de Ricci tend vers $-\infty$ dans la direction longitudinale, en des points de $C \setminus C_o$. En dimension $n \geq 3$, ceci peut se faire en conservant une courbure scalaire positive sur C (donc bornée inférieurement sur M), car les courbures sectionnelles des 2-plans orthogonaux à la direction longitudinale sont fortement positives. Un minorant universel de λ_1^* dépend donc (au minimum) d'un minorant de r_{min} ou de $d^2.r_{min}$ (nous venons de voir qu'on ne peut remplacer r_{min} par u_{min}). En fait, le diamètre doit également intervenir comme le prouvent les exemples A.1,A.2,A.3 et A.4 placés en appendice. Ceci prouve qu'un minorant universel de λ_1^* est (au mieux) de la forme

0.6 $$\lambda_1^* \geq \frac{C(n,r_o)}{d^2}, \text{ où } r_o \text{ est un minorant de } d^2.r_{min}.$$

Une telle minoration est donnée en 2.3 pour λ_1^C, en 3.13 pour λ_1^D, en 3.14 pour λ_1^N (cas convexe).

1 . INÉGALITES ISOPÉRIMÉTRIQUES

a) Lien avec λ_1^* : le premier résultat connu dans ce sens est le

1.1 THEOREME (Faber-Krahn, 1926, voir [P-S]).- Pour tout domaine D de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, si D^* désigne la boule euclidienne de même volume, alors $\lambda_1^D(D) \geq \lambda_1^D(D^*)$. L'égalité est atteinte ssi $D = D^*$.

Démonstration : C'est une conséquence directe de l'inégalité isopérimétrique $\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial D) \geq \mathrm{Vol}_{n-1}(\partial D^*)$. En effet, si f est la 1° fonction propre du problème de Dirichlet, alors f est de signe constant. Supposons $f \geq 0$. Notons $D(t)$ l'ensemble des points x où $f(x) \geq t$ et $D^*(t)$ la boule euclidienne de même volume. On définit la fonction f^* en posant $f^* = t$ sur $\partial D^*(t)$. Notons $A(t)$, $A^*(t)$, $L(t)$ et $L^*(t)$ les volumes respectifs de $D(t)$, $D^*(t)$, $\partial D(t)$ et $\partial D^*(t)$. Comme $\partial D(t)$ est régulière pour presque tout t, sa forme volume ω_t est telle que $\omega_t \wedge \frac{dt}{|df|}$ soit la forme volume canonique de $\mathbb{R}^n$.
On en déduit

$$\int_{\partial D(t)} \frac{1}{|df|} = A'(t) = A^{*\prime}(t) = \int_{\partial D^*(t)} \frac{1}{|df^*|} .$$

En remarquant que $|df^*|$ est constante sur $\partial D^*(t)$ et que $L(t) \geq L^*(t)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\int_{\partial D(t)} |df| \geq \int_{\partial D^*(t)} |df^*|$. Nous avons donc

$$\langle df, df \rangle = \int_0^{\sup f} \int_{\partial D(t)} |df| \geq \langle df^*, df^* \rangle ,$$

$$\langle f, f \rangle = \int_0^{(\sup f)^2} A(\sqrt{t})dt = \langle f^*, f^* \rangle .$$

Le principe du minimax (0.2) permet de conclure. □

En 1970, J. Cheeger introduit la constante isopérimétrique h_* définie par

$$h_* = \operatorname*{Inf}_D \left[\frac{\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial D)}{\mathrm{Vol}_n(D)} \right] ,$$

pour tous les domaines D à bord C^∞ de M qui vérifient l'une des hypothèses (*') suivantes

(D') $D \cap \partial M = \phi$, lorsque $* = D$ (Dirichlet)
(C') $\mathrm{Vol}(D) \leq \frac{1}{2} \mathrm{Vol}(M)$, lorsque $* = C$ (cas sans bord)
(C') $\mathrm{Vol}(D) \leq \frac{1}{2} \mathrm{Vol}(M)$, lorsque $* = N$ (Neumann).

Dans ce dernier cas, ∂D est l'ensemble des points du bord de D qui n'appartiennent pas à ∂M. C'est donc une hypersurface à bord sur laquelle on fait l'hypothèse $\partial(\partial D) = \partial D \cap \partial M$.

1.2. THÉORÈME (J. Cheeger, 1970, cf[B-G-M] p 196).-

$$\lambda_1^* > \frac{1}{4} h_*^2$$

<u>Démonstration</u> : L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\frac{<df,df>}{<f,f>} > \frac{1}{4} \cdot \frac{(\int_M |d(f^2)|)^2}{<f,f>^2} .$$

Le même changement de variables que dans la démonstration de 1.1 donne, en posant $g = f^2$,

$$\int_M |dg| = \int_0^{\sup g} \mathrm{Vol}_{n-1} [g^{-1}(t)] \, . \, dt$$

$$\int_M g = \int_0^{\sup g} \mathrm{Vol}_n [g^{-1}([t,+\infty[)] . \, dt .$$

Ceci achève la démonstration dans le cas (D) . Dans les cas (C) ou (N) , on se restreint à la partie M^+ où f est positive . Au changement de signe près, $\mathrm{Vol}(M^+) \leq \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(M)$.

. En ajoutant une constante ε à la fonction f on peut toujours supposer que ∂M^+ est régulier. □

L'inégalité de Cheeger étant stricte, on a longtemps cherché à l'améliorer. En fait cette inégalité est la <u>meilleure possible</u> en toute dimension comme le prouve le

1.3. THÉORÈME (P. Buser, [BU] p 33 à 39, 1978)

(i) <u>Pour les boules</u> B_ρ <u>de rayon</u> ρ <u>dans l'espace hyperbolique de dimension</u> n , <u>nous avons</u>

$$h_D > n-1 \quad \underline{\text{et}} \quad \lambda_1^D = \frac{(n-1)^2}{4} + 0(\frac{1}{\rho^2})$$

(ii) <u>Sur toute variété</u> M <u>et pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe une métrique</u> g <u>vérifiant</u>

$$h_C = n-1 \quad \underline{\text{et}} \quad \frac{(n-1)^2}{4} < \lambda_1^C \leq \ldots \leq \lambda_k^C < \frac{(n-1)^2}{4} + \varepsilon .$$

<u>Démonstration de</u> (i) : Si D est un domaine à bord de B_ρ vérifiant (D') , le rapport entre un élément de volume infinitésimal de ∂D situé à une distance s de l'origine et le volume du cône infinitésimal qui l'intercepte est au moins égal à

$$\frac{(\mathrm{sh}s)^{n-1}}{\int_0^s (\mathrm{sh}t)^{n-1} dt}$$

qui est supérieur à n-1. Ceci donne $h_D > n-1$.

<u>Démonstration de</u> (ii) : On reprend le contre-exemple 0.5. On munit le cylindre $C_o = [0,\ell] \times S^{n-1}$ de la métrique $g = (ds)^2 + \alpha . e^{2s}(dx)^2$ au point (s,x). Considérons la fonction f_k , égale à zéro sur M_o et M_1 ,et définie sur C_o par

$$f_k(s,x) = e^{-(\frac{n-1}{2})s} \, . \, \sin\left[\frac{(k+1)\pi}{\ell} s\right] \qquad \text{(pour tout entier } k \text{).}$$

Pour ℓ assez grand, le principe du minimax donne

$$\lambda_k^C \leq \frac{\langle df_k, df_k\rangle}{\langle f_k, f_k\rangle} = \frac{(n-1)^2}{4} + (k+1)^2 \frac{\pi^2}{\ell^2} < \frac{(n-1)^2}{4} + \varepsilon.$$

Lorsque α et $\mathrm{Vol}_n(M_o)$ sont suffisamment petits, on a $h_C(M) \simeq h_N(C_o) = \dfrac{\mathrm{Vol}_{n-1}(S^{n-1}\times\{s\})}{\mathrm{Vol}_n(S^{n-1}\times[0,s])}$ $\geq n-1$. □

Même pour les surfaces de courbure constante -1 , l'inégalité 1.2 est optimale (voir A.5). P. Buser a récemment trouvé une majoration de λ_1^C en fonction de h_C (voir [BU2]).

b) Théorèmes de comparaison à la manière de Rauch

α - Cas où la carte exponentielle est définie au voisinage d'un point.

Nous supposons que $r \geq (n-1)\delta$. La courbure de Ricci est donc plus grande que celle de l'espace simplement connexe de courbure sectionnelle constante δ , noté $(\overline{M},\overline{g})$. Suivant le signe de δ , il s'agit d'une sphère, d'un espace euclidien ou d'un espace hyperbolique. Dans la carte exponentielle $\exp_m$ (voir 0.3),nous notons $v(t)$ le module de la forme volume (pour les coordonnées polaires de la carte) au point $\exp_m(tX)$. Pour deux points donnés m et $\overline{m}$ de M et $\overline{M}$, identifions T_mM et $T_{\overline{m}}\overline{M}$ par une isométrie linéaire. Au point $\overline{\exp_{\overline{m}}}(tX)$ de $(\overline{M},\overline{g})$, on a $\overline{v}(t) = [s_\delta(t)]^{n-1}$, où

$$s_\delta(t) = \begin{cases} = \dfrac{1}{\sqrt{\delta}} \sin(\sqrt{\delta}.t) & \text{, lorsque } \delta > 0 \\ = t & \text{lorsque } \delta = 0 \\ = \dfrac{1}{\sqrt{-\delta}} \operatorname{sh}(\sqrt{-\delta}.t) & \text{, lorsque } \delta < 0 \end{cases}$$

En effet, l'application dérivée de $\overline{\exp_{\overline{m}}}$ est donnée par les champs de Jacobi normaux, qui sont orthogonaux 2 à 2 et de norme $s_\delta(t)$. En comparant les champs de Jacobi, on obtient le

1.4. THÉORÈME ([B-C] p 253-6).- Avant le 1° point conjugué, $\dfrac{d}{dt}[\mathrm{Log}\, v(t)] \leq \dfrac{d}{dt}[\mathrm{Log}\, \overline{v}(t)]$.

Notons $b(s)$ et $a(s)$ le volume de la boule et de la sphère de rayon s (de dimensions respectives n et $n-1$) de $(\overline{M},\overline{g})$. On a

$$b(s) = \mathrm{Vol}\, S^{n-1} \int_0^s s_\delta(t)^{n-1}.dt \quad \text{et} \quad a(s) = \mathrm{Vol}\, S^{n-1} s_\delta(s)^{n-1} .$$

D'après 1.4, si $[t_1,t_2] \subset [r_1,r_2]$, on a

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{v(t)}{v(t_1)} . dt \leq \frac{b(r_2)-b(r_1)}{a(r_1)} .$$

Considérons un point m situé à une distance d_o d'un domaine D de M et une géodésique minimisante γ de longueur l allant de m à un point de D .

Pour le cône de géodésiques infinitésimal C autour de γ, l'inégalité ci-dessus donne

1.5 $$\frac{\mathrm{Vol}_n(C \cap D)}{\mathrm{Vol}_{n-1}(C \cap \partial D)} \leq \int_{d_o}^{\ell} \frac{\bar{v}(t)}{\bar{v}(d_o)} \cdot dt \leq \frac{b(\ell)-b(d_o)}{a(d_o)}$$

β - Cas où la carte exponentielle est définie sur le fibré normal à une hypersurface H.

Considérons le champ N normal à l'hypersurface H (lorsque H est le bord de M, nous choisissons la normale intérieure) et la carte $\phi : (m,t) \longrightarrow \exp_m(t.N_m)$ d'un ouvert de $H \times]0,d[$ dans M. La dérivée de ϕ est donnée par les champs de Jacobi Y, le long des géodésiques normales c_m, qui vérifient $Y'(0) = D_{Y(0)}N$. Ces champs de Jacobi donnent, par produit extérieur, la forme volume lue dans la carte ϕ. Notons $w(t)$ le module de cette forme volume au point $c_m(t)$. La courbure moyenne de H est la fonction K_N définie sur H, égale à $\mathrm{Trace}(X \longrightarrow -D_X N)$. On a donc $w(o) = 1$, $w'(o) = -(n-1)K_N(m)$. Si $\bar{H}$ est une hypersurface de courbure moyenne $\bar{K}_N$ dans $(\bar{M},\bar{g})$, on a

$$\bar{w}(t) = [\, s'_\delta(t) - \bar{K}_N(\bar{m}).s_\delta(t)\,]^{n-1}.$$

Par une méthode proche de celle de 1.4, on obtient le

1.6. THÉORÈME ([H-K] p 460) Si $K_N(m) \geq \bar{K}_N(\bar{m})$ et si t est situé avant le 1° point focal t_o de c_m (i.e. le premier point où ϕ cesse d'être régulière), alors

$$\frac{d}{dt}\Big[\log w(t)\Big] \leq \frac{d}{dt}\Big[\log \bar{w}(t)\Big].$$

Si $\bar{K}_N(\bar{m}) \notin]0,1[$ et si $[t_1,t_2] \subset [0,t_o]$, on a donc $\int_{t_1}^{t_2} w(t) \leq w(t_1).\int_0^{t_2} \bar{w}(t)$.

Cela signifie que, si γ est une géodésique minimisant la distance d'un point x à ∂M et si C est le cylindre infinitésimal autour de γ formé de géodésiques normales à ∂M, nous avons, pour tout domaine D,

1.7 $$\mathrm{Vol}_n(C \cap D) \leq \mathrm{Vol}_{n-1}(C \cap \partial D).\int_0^{\rho} \bar{w}(t).dt \;.$$

c) Inégalités isopérimétriques en dimension 2

Pour toute variété à bord D de dimension 2, nous notons A et L son aire et la longueur de son bord. On a des inégalités isopérimétriques analogues à 1.6. Cependant la formule de Gauss-Bonnet permet, sans avoir recours à un minorant de K_N, le calcul direct de

$$\int_{\partial D} K_N + \text{somme des angles de } \partial D = 2\pi\, \chi_D - \int_D K \;,$$

1.8. THÉORÈME ([O3]) Lorsque $K \leq 0$, on a les propriétés suivantes :

(i) $\rho L \geq A + \pi\chi_D . \rho^2$

(ii) Si D est un domaine plan k-connexe, alors $\rho L \geq \frac{2A}{\sup(2,k)}$

(iii) $L^2 \geq 4\pi\chi_D . A - (\sup K) . A^2$

(iv) Si S est une surface simplement connexe de courbure $K \leq -\alpha^2$, alors $L^2 \geq 4\pi A + \alpha^2 . A^2$ pour tout domaine D de S.

Remarques : Dans (i), l'égalité est atteinte pour un disque plat (entre autres). Dans (iii) et (iv), l'égalité caractérise les disques de l'espace hyperbolique. Dans (ii), l'égalité est atteinte pour une couronne circulaire et pour un cylindre plat.

Démonstration : Posons $D_t = \{m \in D / d(m, \partial D) \geq t\}$. Notons $A(t)$ et $L(t)$ l'aire de D_t et la longueur de son bord. Comme dans 1.b.β , la dérivée de $L(t)$ s'exprime à l'aide de $\int_{\partial D_t} K_N$ et des angles de ∂D_t . Par Gauss-Bonnet, on finit par obtenir

$$L'(t) \leq -2\pi\chi_D + \sup K . A(t) \leq -2\pi\chi_D .$$

En remarquant que $A' = -L$ et en intégrant L et $L'.L$ de 0 à ρ, on obtient (i) et (iii), puis (ii). On montre (iv) en appliquant (iii) au domaine $\tilde{D}$ bordé par le bord externe de D . □

2 . MINORATIONS DU λ_1 D'UNE VARIÉTÉ SANS BORD

Historiquement, la première minoration de λ_1^C fut le

2.1. THÉORÈME (A. Lichnerowicz, voir [B-G-M] p 179).- Si $r > 0$, alors $\lambda_1^C \geq \frac{n}{n-1} r_{min}$.

Démonstration : On calcule le laplacien sur la 1-forme df (où f est une fonction propre). Le défaut de commutation $D_X D_Y df - D_Y D_X df$ fait apparaître la courbure, plus précisément

(1) $$d(\Delta f) = \Delta(df) = D^* D\, df + \sum_k R(e_k, \mathrm{grad} f, e_k, .) .$$

En faisant le produit scalaire intégral avec df et en remarquant que $\langle Ddf, Ddf \rangle \geq \frac{1}{n} \langle \Delta f, \Delta f \rangle$, nous obtenons

$$\lambda^2 \langle f, f \rangle \geq \frac{\lambda^2}{n} \langle f, f \rangle + r(df)$$

ce qui achève la démonstration. □

Remarques : M. Obata a montré que l'égalité est atteinte dans 2.1 ssi $(M,g) = (S^n, \mathrm{can.})$.

-En contradiction apparente avec 0.6, le minorant obtenu en 2.1 ne dépend pas du diamètre. En fait, un théorème de Myers montre que $d^2 \leq \pi^2 . \frac{n-1}{r_{min}}$ (cf [M] p 104).

-Le cas $r > 0$ est loin d'être générique. Par exemple, il n'existe pas toujours de métriques vérifiant $r > 0$ sur une variété donnée (pour cela, il est nécessaire que son π_1 soit fini).

a) Le cas $r \geq 0$: l'ensemble des variétés qui admettent une métrique à $r \geq 0$ est beaucoup plus vaste que celui des variétés qui admettent une métrique à $r > 0$: les obstructions à l'existence de métriques à courbure de Ricci positive ne sont pas toujours des obstructions à l'existence de métriques à $r \geq 0$ (exemple des Tores, des surfaces K3, cf [BB]) ; les variétés vérifiant $0 < b_1 \leq n$ peuvent éventuellement admettre une métrique à $r \geq 0$ mais n'admettent jamais de métrique à $r > 0$. Au regard de A.5, le cas $r \geq 0$ est le seul cas où l'on peut espérer obtenir un meilleur minorant que celui de 1.2 par des méthodes directes. D'où le

2.2. THÉORÈME (S.T.Yau et P.Li, 1978, [Y-L]).- Dans le cas $r \geq 0$, on a

$$\frac{\pi^2}{4d^2} \leq \lambda_1^C \leq \frac{n\pi^2}{d^2} .$$

Remarques : la majoration est due à S.Y.Cheng (cf. [CG]).

- Qualitativement parlant, la minoration de Li et Yau est meilleure que celle de 2.1, même lorsque $r > 0$. En effet le rapport des minorants donnés en 2.1 et 2.2 est borné supérieurement (Théorème de Myers). Par contre il peut tendre vers zéro (songer à un cigare de longueur fixe et presque plat en son milieu).

- Sur un tore rectangulaire, $\lambda_1^C \sim \frac{\pi^2}{d^2}$ lorsque le plus long côté ℓ tend vers l'infini. La minoration 2.2 est donc quasi-optimale. La 1e fonction propre $\bar{u}$ du tore est une fonction sinus (voir A.3).

Démonstration : On compare la première fonction propre u avec $\bar{u}$. On suppose $-\inf u \leq \sup u = 1$. La fonction ϕ = Arc sinus vérifie $|d(\phi o \bar{u})| = 2\pi/\ell$. En un point x_o où $|d(\phi o u)|$ atteint son maximum la formule 2.1.(1) donne

$$0 \geq -|d(\phi o u)|^{-2}.\Delta(|d(\phi o u)|^2) \geq |d(\phi o u)|^2 \left[\frac{\phi'''}{\phi'^3} o u - 2 \frac{\phi''^2}{\phi'^4} o u\right] - \lambda_1^C (1 + u. \frac{\phi''}{\phi'} o u) .$$

Ces inégalités deviennent des égalités lorsqu'on remplace u par $\bar{u}$, ce qui donne

$$|d(\phi o u)|^2 \leq |d(\phi o \bar{u})|^2 . \frac{\lambda_1^C . \ell^2}{4\pi^2} = \lambda_1^C$$

En intégrant $|d(\phi o u)|$ sur une géodésique qui minimise la distance ρ de $u^{-1}(1)$ à $u^{-1}(0)$, on obtient

$$\pi/2 \leq \sqrt{\lambda_1^C}\, \rho \leq \sqrt{\lambda_1^C} . d \quad . \square$$

b) le cas général $d^2 r_{min} \geq -(n-1)\, \alpha^2$.

En 1974, T. Aubin (cf. [AU]) donne un minorant de λ_1^C en fonction de V , d , Min(K) , Max(r) et du rayon d'injectivité. Des minorants du type 0.6 ont été obtenus par S.T.Yau et P.Li ([Y-L] , 1978) et par M. Gromov ([G1] , 1980).

En suivant la méthode de ce dernier, on obtient le

2.3. THÉORÈME .- $\lambda_1^C \geq \frac{C^2(n,\alpha)}{16d^2}$, avec $C(n,\alpha) = \frac{(n-1)\,\alpha}{[e^{(\frac{n-1}{2})\alpha} - 1]\,(1+e^{-\alpha})^{n-1}}$.

Démonstration : Considérons une hypersurface H qui partage M en deux domaines de bord H. Il existe un point m dans un des deux domaines (noté D_o) et une partie X du 2e domaine (noté D_1) vérifiant $\mathrm{Vol}(X) \geq \frac{1}{2}\ \mathrm{Vol}(D_1)$ tels que toute géodésique minimisante allant de m à un point x de X coupe H en au moins un point h vérifiant $d(m,h) \geq d(h,x)$ (appliquer Fubini à $D_o x D_1$). L'inégalité 1.5. donne, pour tout cône C de géodésiques minimisantes de m à des points de X,

$$\frac{\mathrm{Vol}_n(C\cap X)}{\mathrm{Vol}_{n-1}(C\cap H)} \leq \frac{b(d)-b(d/2)}{a(d/2)} .$$

Ceci implique que $h_c \geq \frac{a(d/2)}{b(d)-b(d/2)}$. Le théorème 1.2 et un calcul direct achèvent la démonstration. □

3 . MINORATIONS DE λ_1^D : Rappelons quelques résultats de base :

3.1. La 1e fonction propre f du problème de Dirichlet est de signe constant (strictement) à l'intérieur de M. En effet, $|f|$ réalise le minimax (0.2). Si f admettait un zéro intérieur, on pourrait diminuer $\langle d(|f|), d(|f|)\rangle$ et augmenter $\langle f,f\rangle$ en ajoutant à $|f|$ une petite fonction positive (en contradiction avec 0.2).

3.2. La première valeur propre λ_1^D du problème (D) est simple (sinon une combinaison linéaire de fonctions propres pourrait prendre les 2 signes).

3.3. Si $M \subsetneq M'$, alors $\lambda_1^D(M) > \lambda_1^D(M')$, d'après 0.2 et 3.1. Ce résultat permet des minorations grossières de λ_1^D.

3.4.(cf. [W]).- Pour tout domaine euclidien D de dimension n, notons D^* la boule de même volume, alors $\lambda_1^N(D) \leq \lambda_1^N(D^*) < \lambda_1^D(D^*) \leq \lambda_1^D(D)$.

a) cas des convexes euclidiens :

3.5. THÉORÈME (Payne - Weinberger, 1960, [P-W]).- Pour tout convexe euclidien de dimension n, $\lambda_1^N > \frac{\pi^2}{d^2}$

Ce théorème a été généralisé par Yau et Li et par Chavel-Feldman pour les convexes de courbure positive (voir 3.9.(ii)). Ce résultat est optimal au vu de A.2.

3.6. THÉORÈME (H.J. Brascamp et E.H. Lieb, [B-L], 1974).-

- Si D est un convexe de R^n, les lignes de niveau $f^{-1}(t)$ de la première fonction propre f du problème de Dirichlet sont convexes.
- Si D_o et D_1 sont deux convexes de R^n et si $D_\mu=(1-\mu)D_o+\mu.D_1$, on a

$$\lambda_1^D(D_\mu) \leq (1-\mu)\ \lambda_1^D(D_o) + \mu.\lambda_1^D(D_1).$$

Remarque : Si D_1 est l'image de D_o par une isométrie, ceci donne une manière de minorer $\lambda_1^D(D_o)$ par les $\lambda_1^D(D_\mu)$

Idée de la démonstration : On utilise le fait qu'une fonction F, log-concave en (x,y), donne une fonction $\int F(x,y)dy$ qui est log-concave en x. On montre de cette manière que la solution fondamentale $G_\mu(x,y;t)$ de l'équation de la chaleur sur D_μ est log-concave en (x,y,μ) (on utilise pour cela une écriture explicite de G_μ). A l'aide de 3.2 on a

$$\lambda_1^D(D_\mu) = -\lim_{t\to\infty} t^{-1}.\mathrm{Log}\left(\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i^D.t}\right) = -\lim_{t\to\infty} t^{-1}.\mathrm{Log}\left[\int_{D_\mu} G_\mu(x,x;t).dx\right]$$

et cette fonction est convexe en μ. Par ailleurs, si les f_i sont les fonctions propres associées aux λ_i^D, on a

$$f_1(x).f_1(y) = \lim_{t\to+\infty} [G_\mu(x,y;t).e^{\lambda_1^D.t}].$$

La fonction f_1 est donc log-concave en x et $f_1^{-1}([t,+\infty[)$ est convexe. □

b) Comparaison de λ_1^D avec celui de la boule inscrite.

Pour un domaine euclidien à bord D, nous noterons B_ρ la boule inscrite de rayon ρ. D'après 3.3, on a $\lambda_1^D \le \lambda_1^D(B_\rho)$. En fait, en dimension 2, l'ordre de grandeur de λ_1^D et de $\lambda_1^D(B_\rho)$ est le même (même si le diamètre de D est beaucoup plus grand).

3.7. THÉORÈME (Hayman, 1977, [02]).- Pour tout domaine D de R^2,

(i) $\dfrac{1}{4\rho^2} \le \lambda_1^D \le \dfrac{jo^2}{\rho^2}$ lorsque D est simplement connexe, où j_o est le premier zéro de la fonction de Bessel correspondante

(ii) $\dfrac{1}{k^2\rho^2} \le \lambda_1^D$ lorsque D est k-connexe $(k \ge 2)$.

Démonstration : Soit f la première fonction propre. Pour une valeur régulière t, $f^{-1}(t)$ a au plus k composantes connexes, sinon une de celles-ci borderait un sous-domaine D' inclus dans $f^{-1}(]0,t])$. En remplaçant f par la constante t sur D', on obtiendrait une contradiction avec 0.2. On utilise alors l'inégalité 1.8.(ii) dans une démonstration identique à celle de 1.2. □

Remarques : La minoration de (i) reste valable lorsque $K \le 0$.

- Pour justifier l'intervention de k dans (ii), construisons, pour tout $\varepsilon' > 0$, un domaine k-connexe D tel que $\lambda_1^D < \dfrac{\varepsilon'}{\rho^2}$. En ôtant au disque D^* un assez grand nombre k de disques de rayon ε, on peut rendre ρ petit. En multipliant la 1e fonction propre f^* de D^* par une fonction convenablement choisie, nulle sur les petits disques et en appliquant 0.2 et 3.3, on obtient $\lambda_1^D(D) \simeq \lambda_1^D(D^*)$.

3.8. Contre-exemple : Il est impossible de généraliser (i) en dimension $n \geq 3$. Construisons un domaine D en ôtant à la boule D^* des cônes très étroits dirigés vers le centre de la boule, de manière à rendre ρ très petit en modifiant très peu le volume du domaine et de son bord. En multipliant la première fonction propre f^* de D^* par une fonction convenablement choisie, nulle sur les cônes, on obtient $\lambda_1^D(D) \simeq \lambda_1^D(D^*)$. Par contre, le théorème 3.7. reste vrai en dimension n dès que la courbure moyenne du bord est positive comme le prouve le

3.9. THÉORÈME (Yau et Li, [Y-L], 1978).- Soit M une variété à bord vérifiant $r \geq 0$.

(i) Si la courbure moyenne du bord est positive ou nulle, alors $\lambda_1^D \geq \frac{\pi^2}{4\rho^2}$

(ii) Si le bord est convexe, alors $\lambda_1^N \geq \frac{\pi^2}{4d^2}$

Remarque : L'inégalité (i) a d'abord été prouvée par Hersch pour les convexes de R^n. Cette inégalité est optimale : elle est atteinte pour un cylindre plat et approchée pour des parallélépipèdes rectangles très longs de R^n (voir A.2).

Démonstration : Elle est identique à celle de 2.2. Les hypothèses sur la courbure moyenne et la convexité du bord assurent que le maximum de $|d(\phi o u)|^2$ est atteint en un point intérieur. □

c) le cas $K \leq -\alpha^2$.

3.10. PROPOSITION .- Soit S une surface simplement connexe vérifiant $K \leq -\alpha^2$. Pour tout domaine D de S (même non simplement connexe), notons D^* le disque de même volume dans le plan hyperbolique de courbure constante $-\alpha^2$, alors $\lambda_1(D) \geq \lambda_1(D^*) > \frac{\alpha^2}{4}$ l'égalité étant atteinte ssi $D = D^*$.

On démontre 3.10 par la méthode de Faber Krahn (cf. 1.1) appliquée à l'inégalité isopérimétrique 1.8.(iv). Toujours par des inégalités isopérimétriques, 3.10 admet la généralisation partielle suivante en dimension n, due initialement à Mac Kean.

3.11. THÉORÈME ([Y] p 498).- Soit D un domaine à bord dans une variété complète et simplement connexe vérifiant $K \leq -\alpha^2$, alors

$$\lambda_1^D \geq \frac{(n-1)^2}{4}\alpha^2.$$

d) le cas général : (dim $M = n$ et $r_{min} \geq -(n-1)\alpha^2$, où $\alpha > 0$)

Désignons par η une borne inférieure de la courbure moyenne du bord. L'inégalité isopérimétrique 1.7 donne

$$h_D(M) \geq \left[\int_0^\rho \left(\mathrm{ch}\alpha t - \frac{\eta}{\alpha}\,\mathrm{sh}\alpha t\right)^{n-1} dt\right]^{-1},$$

l'égalité est atteinte pour les boules de l'espace hyperbolique. Par 1.2, nous en déduisons

3.12. THÉORÈME.- $\lambda_1^D \geq \frac{C^2(\alpha\rho, \eta/\alpha)}{4\rho^2}$, où $C(x,y) = x\left[\int_0^x (\mathrm{ch}t - y\,\mathrm{sh}t)^{n-1} dt\right]^{-1}$.

Remarques : Une autre minoration faisant intervenir α, ρ et η est donnée dans [Y-L].

Il est inévitable que le minorant dépende de η d'après 3.8. Dans le cas $\eta \geq 0$, on obtient une généralisation de 3.9.(i). En remplaçant le rayon de la boule inscrite par le rayon de la boule circonscrite, on peut se passer de la donnée de η, comme le montre le

3.13. THÉORÈME .- Soit (M,g) une variété riemannienne complète (sans bord) vérifiant $r \geq -(n-1)\alpha^2$. Soit D un domaine de diamètre d sur M.

(i) Si M est non compacte, alors $\lambda_1^D(D) \geq \frac{(n-1)^2\alpha^2 d^2}{(e^{(n-1)d\alpha}-1)^2} \cdot \frac{1}{4d^2}$

(ii) Si M est compacte, de diamètre d' et si ρ' est le rayon interne de $M\backslash D$, alors

$$\lambda_1^D(D) \geq \frac{1}{4(d'-\rho')^2}\left[\frac{\operatorname{sh}\alpha\rho'}{\operatorname{sh}\alpha d'}\right]^{n-1}$$

Démonstration : l'inégalité 1.5 montre que $h_D \geq \lim_{\ell\to+\infty}\left[\frac{a(\ell)}{b(d+\ell)-b(\ell)}\right]$ dans le cas (i) et que $h_D \geq \frac{a(\rho')}{b(d')-b(\rho')}$ dans le cas (ii). □

3.14. THÉORÈME ([G1] , comparer avec [Y-L]).- Soit (M,g) une variété à bord convexe vérifiant $d^2.r \geq -(n-1)\alpha^2$. Alors

$$\lambda_1^N \geq \frac{C^2(n,\alpha)}{16d^2} \quad \text{,où } C(n,\alpha) \text{ est la constante donnée en 2.3.}$$

La démonstration est identique à celle de 2.3. Un minorant de λ_1^N pour le cas non convexe doit faire intervenir les courbures principales du bord comme le prouve le contre exemple d'un rectangle de largeur très petite reliant deux disques (même démonstration que 0.5).

A.1. La boule euclidienne de rayon ρ: On voit aisément que la première fonction propre du problème de Dirichlet ne dépend que de la distance à l'origine en opérant une symétrisation du type 1.1. En exprimant Δ en coordonnées polaires (r,Θ), on se ramène à la résolution de

$$\phi'' + \left(\frac{n-1}{\rho}\right)\phi' + \lambda_1^D.\phi = 0,$$

ce qui donne

$$\lambda_1^D = \frac{1}{\rho^2} \cdot j^2_{\frac{n-2}{2}} \quad \text{, où } j_{\frac{n-2}{2}} \text{ est le } 1^e \text{ zéro de la fonction de}$$

Bessel $J_{\frac{n-2}{2}}$.

A.2. Le parallélépipède rectangle : Considérons un parallélépipède de $\mathbb{R}^n$ dont les côtés a_i sont classés par ordre croissant. On a $\lambda_1^N = \pi^2.a_n^{-2}$, la fonction propre associée étant $\cos(\frac{\pi.x_n}{a_n})$. On a $\lambda_1^D = \pi^2.\Sigma a_i^{-2}$, la fonction propre associée étant le produit des fonctions $\sin(\frac{\pi.x_i}{a_i})$. Lorsque $a_n \to \infty$, on obtient $\lambda_1^N \sim \pi^2.d^{-2}$. Lorsque $a_2,\ldots,a_n$ tendent vers $+\infty$, alors $\lambda_1^D \sim \frac{\pi^2}{a_1^2} = \frac{\pi^2}{4\ell^2}$.

A.3. Les tores plats rectangulaires : Notons $\ell_1,\dots,\ell_n$ la longueur des côtés. Comme on peut séparer les variables, les fonctions propres sont les

$$f(t_1,\dots,t_n) = e^{2\pi i.\sum_1^n (m_k/\ell_k)t_k},$$

où $(m_1,\dots,m_n) \in \mathbb{Z}^n$. Les valeurs propres sont donc les nombres de la forme $4\pi^2(\sum_1^n \frac{m_k^2}{\ell_k^2})$ et $\lambda_1^C = \frac{4\pi^2}{(\sup \ell_i)^2}$.

A.4. Les surfaces de courbure $K = -1$

Un hexagone H_δ du plan hyperbolique, bordé par des géodésiques γ_i normales 2 à 2, est entièrement déterminé lorsque la longueur de γ_2, γ_4 et γ_6 est fixée et égale à δ. Notons $\ell(\delta)$ la longueur des 3 autres côtés, on a $\ell(\delta)\to+\infty$ quand $\delta\to 0$.

En recollant deux exemplaires de H_δ le long des grands côtés on obtient le "pantalon" Y_δ. En appliquant le principe du minimax (0.2) aux fonctions f nulles sur le bord, on montre que $\lambda_1^D(Y_\delta)\longrightarrow 0$ quand $\delta\to 0$.

THÉORÈME ([BU]).- Sur une surface de Riemann compacte M sans bord, de genre G

(i) $\lambda_{4G-2}^C > 1/4$ pour toute métrique de courbure -1.

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une métrique de courbure -1 (de grand diamètre) telle que $0<\lambda_1^C\le\dots\le\lambda_{2G-3}^C<\varepsilon$.

Remarque : R. Schoen a montré que (ii) est optimal, i.e. il existe une constante $\alpha(G)$ telle que $\lambda_{2G-2} \ge \alpha(G)$ pour toute métrique de courbure -1. Problème : a-t-on $\alpha(G) = \frac{1}{4}$?

Démonstration : On obtient M en recollant $2G-2$ pantalons Y_δ.

Le principe du minimax donne $\lambda_{2G-3}^C \le \lambda_1^D(Y_\delta)$, ce qui prouve (ii). Pour prouver (i) on découpe la surface en $4G-2$ triangles géodésiques convexes T_i. On a donc

$$\lambda_{4G-2}^C \ge \operatorname{Inf}_i \lambda_1^N(T_i) \quad \text{par le principe du minimax.}$$

On montre que $h_N(T_i) \ge 1$ en opérant comme en 1.3.(i). □

A.5. PROPOSITION ([BU]).- En refermant les bords de Y_δ par la relation antipodique, on obtient une surface M_δ (non orientable), de courbure constante -1, vérifiant $h_C \ge 1$ et $\lambda_1^C \simeq \frac{1}{4}$ quand $\delta\to 0$.

Idée de la démonstration : En étudiant les différentes positions d'une courbe fermée et en étudiant le rapport longueur/aire à la manière de 1.3.(i), on obtient $h_C \ge 1$ pour δ petit. Un théorème de majoration de S.Y. Cheng ([CG]) donne

$$\lambda_1^C \le \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{d^2}. \ \square$$

A.6. Estimées sur les autres valeurs propres (cas sans bord)

Une majoration de chaque λ_i^C est donnée dans [CG] .

Une minoration de chaque λ_i^C du type

$$\lambda_i^C \geq \frac{C(n, r_{min}.d^2)}{d^2}$$ est donnée par [Y-L] et [G1].

Il est à remarquer que ces estimées peuvent être rendues (pour les grandes valeurs de i) égales (à une constante près) à l'estimation asymptotique connue

$$\lambda_i^C \sim \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{i}{\text{Vol } B^n.V}\right]^{2/n}$$

La démonstration utilise un principe du minimax pour les λ_i^C . Pour majorer, on inclut (i+1) boules disjointes de même rayon (le plus grand possible) dans (M,g). Dans ce cas λ_i^C est plus petit que le plus grand des λ_1^D de ces boules. Pour minorer, on recouvre (M,g) par i boules de même rayon (le plus petit possible). Dans ce cas λ_i^C est plus grand que le plus petit des λ_1^N de ces boules. On utilise alors des estimées du type 3.13 et 3.14. Remarquons que ces boules ne sont pas homéomorphes à des boules de $\mathbb{R}^n$, sauf lorsque i est suffisamment grand.

RÉFÉRENCES

[AG] S. AGMON, Lectures on Elliptic Boundary value Problems, Van Nostrand, 1965.

[AU] T. AUBIN, Fonction de Green et valeurs propres du laplacien, J. Math. Pures et Appl. 1974, 347-371.

[BE] P. BERARD, Spectres et Groupes cristallographiques I : Domaines Euclidiens, Inventiones Math., 58, 1980, 179-199.

[BB] L. BÉRARD BERGERY, La courbure scalaire des variétés riemanniennes, Séminaire Bourbaki 79/80, n° 556.

[B-C] R.L. BISHOP et R.J. CRITTENDEN, Geometry of Manifolds, Academic Press (1964).

[B-G-M] M. BERGER, P. GAUDUCHON et E. MAZET, le spectre d'une variété riemannienne, Lectures Notes in Maths, 194 (1971).

[B-L] H.J. BRASCAMP et E.H. LIEB, Some Inequalities for Gaussian measures and the long-range order of the one-dimensional plasma, Clarendon Press, Oxford 1975.

[BU1] P. BUSER, On cheeger's Inequality $\lambda_1 \geq h^2/4$, Proceedings of A.M.S. Symposia in Pure Maths, 36, 1980.

[C] J. CHEEGER, A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian, Problems in Analysis, Princeton University Press, 1970, 195-199.

[CG] S.Y. CHENG, Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications, Math. Z. 143(1975), 289-297.

[G1] M. GROMOV, Paul Levy's isoperimetric inequality, soumis à Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. Paris.

[G2] M. GROMOV, Structures métriques pour les variétés riemanniennes, Cedic-Nathan, textes mathématiques n°1, Paris 1981.

[H-K] E. HEINTZE et H. KARCHER, A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. Paris, 11, 1978, 451-470.

[M] J. MILNOR, Morse theory, Annals of Math. Studies, 53, Princeton University Press, Princeton 1963.

[M-F] P. MORSE et FESHBACH, Methods of theoritical Physics, Mc-Graw Hill, 1953.

[01] R. OSSERMAN, The Isoperimetric Inequality, Bull. A. M. S., 84, N°6, 1978, 1182-1238.

[02] R. OSSERMAN, A note on Hayman's theorem on the bass note of a drum, Comment. Math. Helv. 52, 1977, 545-555.

[03] R. OSSERMAN, Bonnesen-style isoperimetric inequalities, American Math. Monthly, 86, 1979, 1-29.

[P] L.E. PAYNE, Isoperimetric inequalities and their applications, SIAM Review, Vol 9, N°3, 1967, 453-488.

[P-W] L.E. PAYNE et H.F. WEINBERGER, An optimal Poincaré inequality for convex domains, Arch. Ration. Mech. Anal., 5(1960), 286-292.

[P-S] G. POLYA et G. SZEGO, Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Annals of Math. Studies N°77, Princeton University Press, Princeton 1951.

[W] H.F. WEINBERGER, An isoperimetric inequality for the N-dimensional free membrane problem, J. Ration. Mech. Anal. 5(1956), 533-636.

[Y] S.T. YAU, Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. Paris 8(1975), 487-507.

[Y-L] S.T. YAU et P. LI, Estimates of eigenvalues of a compact Riemannian manifold, Proc. Symp. Pure Math. A. M. S., 36 (1980), 205-239.

[BU2] P. BUSER, A note on the isoperimetric constant, preprint.

Sylvestre GALLOT

Université de Savoie
Faculté des Sciences et des Techniques
BP 1104
73011 CHAMBERY CEDEX

L.A. CNRS n° 188