

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

HÉLÈNE ESNAULT

Classification des variétés de dimension 3 et plus

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. n° 568, p. 111-131

http://www.numdam.org/item?id=SB_1980-1981__23__111_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CLASSIFICATION DES VARIÉTÉS DE DIMENSION 3 ET PLUS

[d'après T. Fujita, S. Iitaka, Y. Kawamata,
K. Ueno, E. Viehweg]

par Hélène ESNAULT

La classification birationnelle des variétés projectives complexes lisses de grande dimension est un essai d'ordonner grossièrement celles-ci en "classes" définies par des invariants numériques et d'éclairer la structure de quelques-unes de ces classes à partir de structures "bien connues" en dimension plus petite. On est cependant encore loin d'une généralisation du tableau de classification classique de Castelnuovo-Enriques pour les surfaces, même en dimension 3 (§ 1).

Cet exposé doit donner une vue d'ensemble des résultats pour l'heure connus, et expliquer quelques méthodes de démonstration. On ne parlera pas de la théorie non algébrique [16].

La présentation des problèmes doit beaucoup à Eckart Viehweg qui a eu la malchance de se trouver à Paris pendant la préparation de cet exposé.

Définitions et notations

- 1) Une *variété* est toujours lisse, complexe, algébrique, projective, irréductible.
- 2) Soit $f : V \rightarrow W$ un morphisme d'une variété V dans une autre W . On dit que f est un *espace fibré* si f est surjective et de fibre générique connexe. En particulier, toutes les fibres sont connexes, et la fibre générique est irréductible et lisse.
- 3) Soit $f : V \rightarrow W$ un espace fibré. On dit que f est un *fibré étale* s'il existe un revêtement étale $W' \rightarrow W$ tel que le produit fibré $V \times_W W'$ soit un espace fibré trivial sur W' i.e. tel que $V \times_W W'$ soit isomorphe à $W' \times F$, où F est la fibre générale de f .
- 4) $V \sim W$ signifie que les variétés V et W sont birationnellement équivalentes. $V \simeq W$ signifie qu'elles sont isomorphes.
- 5) Soit V une variété. Son *irrégularité* est $q(V) = \dim H^1(V, \mathcal{O}_V)$. Sa *variété d'Albanese* est $A(V) = H^0(V, \Omega_V^1)^* / H_1(V, \mathbb{Z})$. On note $\alpha : V \rightarrow A(V)$ l'application d'Albanese, $\alpha(V)$ l'image de V . L'irrégularité $q(V) = \dim A(V)$ est un invariant

birationnel.

6) Soit $f : V \rightarrow W$ un espace fibré. On note $\omega_{V/W} = \omega_V \otimes f^* \omega_W^{-1}$ la différence des deux faisceaux dualisants. L'anneau de $\omega_{V/W}$ est $R(\omega_{V/W}) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(V, \omega_{V/W}^n)$. On appelle *dimension de Kodaira de V sur W* le nombre

$$\kappa(V/W) = \begin{cases} (\text{degré de transcendance sur } \mathbb{C} \text{ de } R(\omega_{V/W})) - 1 & \text{si } R(\omega_{V/W}) \neq \mathbb{C}, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On appelle *dimension de Kodaira de V* le nombre $\kappa(V) = \kappa(V/\text{Spec } \mathbb{C})$. Lorsque $\kappa \geq 0$, la dimension de Kodaira est le maximum de la dimension de l'image de l'application pluricanonique. C'est aussi l'entier positif ℓ tel qu'il existe a et b positifs tels que $an^\ell \leq \dim H^0(V, \omega_{V/W}^n) \leq bn^\ell$, pour n grand tel que $H^0(V, \omega_{V/W}^n) \neq 0$ [3]. C'est un invariant par transformation birationnelle ou étale.

7) Soit $f : V \rightarrow W$ un espace fibré. Bien que le corps $\overline{\mathbb{C}(W)}$ ne soit pas canoniquement isomorphe à $\mathbb{C}$, on parlera toujours dans la suite de la dimension de Kodaira de la fibre générique F de f . En effet, si la fibre générique F vérifie $\kappa(F) = a$, alors toutes les fibres $f^{-1}(x)$ vérifient $\kappa(f^{-1}(x)) = a$ au dessus du complémentaire de la réunion d'un nombre dénombrable de sous-variétés fermées strictes de W (voir [23] et démonstration du théorème 3).

§ 1. Tableaux de classification

a) $\dim V = 1$. L'irrégularité de la courbe est son genre g .

$\kappa(V)$	$q(V)$	$\dim \alpha(V)$	Structure de V
1	≥ 2	1	courbe de genre ≥ 2
0	1	1	courbe elliptique $V \simeq A(V)$
$-\infty$	0	0	courbe rationnelle $V \simeq \mathbb{P}^1$

b) $\dim V = 2$. La structure de V donnée est celle de son modèle minimal.

$\kappa(V)$	$q(V)$	$\dim \alpha(V)$	Structure de V
2			surface de type général
1			surface elliptique i.e. espace fibré sur une courbe C dont la fibre générique F est une courbe elliptique
0	2	2	surface abélienne $V \simeq A(V)$
	1	1	surface hyperelliptique i.e. $\alpha : V \rightarrow A(V)$ est un fibré étale de fibre elliptique
	0	0	surface K3 si $H^0(V, \omega_V) = \mathbb{C}$ surface d'Enriques si $H^0(V, \omega_V) = 0$
$-\infty$	0	0	surface rationnelle
	≥ 1	1	espace fibré sur une courbe de genre $q(V)$, de fibre générique $\mathbb{P}^1$

Remarque.— Les classifications a) et b) sont "grossières" et adaptées au type de résultats que l'on cherche en dimension supérieure.

c) $\dim V = 3$. Il n'y a pas de modèle minimal de V .

THÉORÈME 1 (§ 5).— *Toute variété de dimension 3 est à équivalence birationnelle près l'une des suivantes :*

$\kappa(V)$	$q(V)$	$\dim \alpha(V)$	Structure de V
3			variété de type général (?)
2			espace fibré sur une surface W et de fibre générique une courbe elliptique F
1			espace fibré sur une courbe W et de fibre générique une surface F telle que $\kappa(F) = 0$
0	3	3	variété abélienne $V \sim A(V)$
	2	2	$\alpha : V \rightarrow A(V)$ est un fibré étale de fibre une courbe elliptique F
	1	1	$\alpha : V \rightarrow A(V)$ est un fibré étale de fibre une surface F telle que $\kappa(F) = 0$
	0	0	?
$-\infty$	≥ 1		la factorisation de Stein $f : V \rightarrow W_0$ de α a une fibre générique F et une désingularisation W telles que :
		2	$\dim F = 1$, $F \simeq \mathbb{P}^1$, $q(W) = q(V)$, $\kappa(W) \geq 0$
		1	$\dim F = 2$, $\kappa(F) = -\infty$, $q(W) = q(V)$, $\kappa(W) \geq 0$
	0	0	?

Remarque.— Les points d'interrogation signifient que l'on n'a pas de théorème de structure [0].

d) $\dim V > 3$

Les propriétés précédentes lorsque $\kappa(V) \geq 1$ se généralisent (cf. § 2, théorème 3) : V est un espace fibré sur W et de fibre générique F tels que $\dim W = \kappa(V)$ et $\kappa(F) = 0$.

Une partie des propriétés précédentes lorsque $\kappa(V) = 0$ se généralisent.

THÉORÈME 2 (§ 5).— (i) Si $\kappa(V) = 0$, alors $\alpha : V \rightarrow A(V)$ est un espace fibré. En particulier $q(V) \leq \dim V$.

(ii) V est birationnellement une variété abélienne si et seulement si $\kappa(V) = 0$ et $q(V) = \dim V$.

(iii) Si $q(V) = \dim V - 1$ et $\kappa(V) = 0$, alors α est un fibré étale de fibre F telle que $\kappa(F) = 0$.

L'objet des chapitres suivants est d'expliquer les méthodes de démonstration

des théorèmes 1 et 2.

§ 2. Théorèmes généraux sur les dimensions de Kodaira

THÉORÈME 3 [1].— Soit V une variété telle que $\kappa(V) \geq 0$. Il existe un modèle birationnel V' de V , un espace fibré $f: V' \rightarrow W$ de fibre générique F tels que $\dim W = \kappa(V)$ et $\kappa(F) = 0$. L'espace fibré f ayant ces propriétés est birationnellement unique.

Idée de la démonstration : On peut supposer $\kappa(V) \geq 0$. Pour un i tel que $H^0(V, \omega_V^i) \neq 0$, on a une inclusion de $H^0(V, \omega_V^i)$ dans $H^0(V, \omega_V^{in})$ qui permet d'identifier les sections. On a donc un diagramme commutatif d'applications rationnelles

$$\begin{array}{ccc} V & \dashrightarrow & V_{in} \subset \mathbb{P}^{\ell(in)} \\ & \searrow p & \downarrow \\ & & V_i \subset \mathbb{P}^{\ell(i)} \end{array}$$

où p est la projection sur "les sections de ω_V^i ", V_i et V_{in} la fermeture des images de V . Le corps $\mathbb{C}(V)$ étant de type fini sur $\mathbb{C}$, la suite d'inclusions des $\mathbb{C}(V_{in})$ est stationnaire. Posons $a = in$ tel que $\mathbb{C}(V_{in}) = \mathbb{C}(V_{i(N+k)})$ et prenons un modèle désingularisé $f: V' \rightarrow W$ de $V \dashrightarrow V_a$. Alors $\dim W = \kappa(V)$.

Dire que les fibres de f sont connexes, c'est dire que la factorisation de Stein W' de f est 1-1 sur W . Notons F_a le morphisme $V' \rightarrow V_a$. Pour n grand, $F_a^* \mathcal{O}_{V'} \otimes \mathcal{O}(n)$ est contenu dans $F_a^* \omega_{V'}^{an}$ et engendré par ses sections globales, de sorte que celles-ci séparent les points de la factorisation de Stein de f , donc les fibres de V sur V_{an} , et $\mathbb{C}(V_{an})$ contient strictement $\mathbb{C}(V_a)$ si $W' \neq W$. Le morphisme f est donc un espace fibré. Le même genre d'argument montre que pour chaque n , le faisceau $f_* \omega_{V'}^{an}$ est inversible sur un ouvert de Zariski U_n de W . Donc $H^0(f^{-1}(x), \omega_{V'}^{an}|_{f^{-1}(x)}) = H^0(f^{-1}(x), \omega_{f^{-1}(x)}^{an}) = \mathbb{C}$, pour x dans l'intersection de ces U_n , et pour le point générique de W .

THÉORÈME 4 [1]-[2].— Soient $f: V \rightarrow W$ un espace fibré, F sa fibre générique. Alors $\kappa(V) \leq \dim W + \kappa(F)$. En particulier, si $\kappa(F) = -\infty$, alors $\kappa(V) = -\infty$.

Idée de la démonstration : On peut supposer que $\kappa(V) \geq 0$. On choisit n grand de sorte que les images de V et F par les applications rationnelles correspondant à $H^0(V, \omega_V^n)$ et $H^0(F, \omega_F^n) = H^0(F, \omega_V^n|_F)$ aient la dimension maximale, et H très ample sur W de sorte que $f_* \omega_V^n \otimes H$ soit engendré par ses sections globales. On a donc les injection $H^0(W, H) \hookrightarrow H^0(W, f_* \omega_V^n \otimes H) = H^0(V, \omega_V^n \otimes f^*H)$ et surjection $H^0(V, \omega_V^n \otimes f^*H) \rightarrow H^0(F, \omega_F^n)$. On conclut en observant que $\kappa(V) \leq \dim \Phi(V)$ et que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V & \dashrightarrow & \Phi(V) \subset \mathbb{P}^{\ell'} \\ f \downarrow & & \downarrow \\ W & \hookrightarrow & \mathbb{P}^{\ell} \end{array}$$

où $\tilde{\Phi}$ est l'application rationnelle associée à $\omega_V^n \otimes f^*H$.

§ 3. Sous-variétés et revêtements d'une variété abélienne

THÉOREME 5 [3].— Soient W une sous-variété de dimension r d'une variété abélienne A de dimension n et $\sigma : W' \rightarrow W$ une désingularisée de W . On suppose que W engendre A en tant que groupe. Alors $\kappa(W') \geq 0$ et $\kappa(W') = 0$ si et seulement si $W = A$.

Démonstration.— Soit $\{x_1, \dots, x_n\}$ un système de coordonnées "globales" de A dont les r premières forment un système de coordonnées locales de W au voisinage d'un point lisse p de W . La r -forme globale $\sigma^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_r)$ est non nulle sur ce voisinage, donc non nulle sur W' et $\kappa(W') \geq 0$. Si $\kappa(W') = 0$, elle est un générateur de $H^0(W', \omega_{W'})$, donc toute r -forme $\sigma^*(dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_r \wedge dx_j)$ est un multiple linéaire de celle-ci, pour $j > r$. Ceci signifie que les équations $\{x_{r+1}, \dots, x_n\}$ de W en p sont linéaires.

COROLLAIRE 6 [3].— Sous les hypothèses du théorème 5, on peut choisir pour W' un fibré étale dont la base X vérifie $\dim X = \kappa(X) = \kappa(W')$ et dont la fibre F est une sous-variété abélienne de A . En particulier, si A est simple, W' est de type général.

Démonstration.— Soit $f : W' \rightarrow X$ un espace fibré tel que la fibre F au dessus du complémentaire de la réunion d'une famille dénombrable de sous-variétés strictes de X vérifie $\kappa(F) = 0$. Un tel F est une sous-variété abélienne de A (théorème 5), translatée par un point. Comme il n'y a qu'un ensemble dénombrable de sous-variétés abéliennes de A , les F sont tous translatés d'une même sous-variété abélienne B de A . Or le morphisme $A \rightarrow A/B$ est un fibré étale. En restreignant ce morphisme à W , en prenant une désingularisée de son image et en prenant pour f la fibration d'Iitaka (théorème 3), on a le corollaire 6.

THÉOREME 7 [10].— Soit $f : W \rightarrow A$ un morphisme génériquement fini d'une variété W sur une variété abélienne A (f est surjectif et de fibre générique finie). Alors $\kappa(W) \geq 0$ et $\kappa(W) = 0$ si et seulement si W est birationnelle à une variété abélienne.

Soient V une variété, $\alpha : V \rightarrow A(V)$ son application d'Albanese, $V \rightarrow W_0$ la factorisation de Stein de α et $f : V \rightarrow W$ un modèle désingularisé de la factorisation de Stein. C'est-à-dire que W est une désingularisée de W_0 , et qu'on a éclaté V pour rendre f partout définie. L'image $\alpha(V)$ de V engendrant $A(V)$ en tant que groupe [3], la factorisation $A(W) \rightarrow A(V)$ de $W \rightarrow A(V)$ est surjective. Alors :

THÉOREME 8.— Sous les hypothèses précédentes, on a $\kappa(W) \geq 0$ et $\kappa(W) = 0$ si et seulement si α est un espace fibré.

Démonstration.— C'est un corollaire immédiat du théorème 7. D'une part, $\kappa(W) \geq 0$ car W est génériquement fini sur une sous-variété d'une variété abélienne et la dimension de Kodaira est croissante ([3] théorème 6-10). D'autre part, si $\kappa(W) = 0$, W est birationnelle à $A(W)$, donc à $A(V)$, et α est un espace fibré.

Le point central de la démonstration du théorème 7 est le

Lemme 9 [10].— Soit D un diviseur réduit et irréductible d'une variété abélienne A telle qu'une désingularisée $\sigma : D' \rightarrow D$ soit de type général. Alors $\dim H^0(D', \Omega_{D'}^k) \geq \binom{n}{k}$ si n est la dimension de A . Si $\dim H^0(D', \Omega_{D'}^{n-1}) = n$, alors toutes les inégalités précédentes sont des égalités et $|\chi(\sigma_{D'})| = 1$.

Idée de la démonstration.— Soit $\{x_1, \dots, x_n\}$ un système de coordonnées "globales" de A telles que les $(n-1)$ premières forment un système de coordonnées locales de D au voisinage d'un point lisse p . Notons f la composée de σ et de l'inclusion dans A , et posons $w_i = f^*(dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n)$. Les w_i sont des formes globales. Si elles étaient linéairement dépendantes, une équation locale x_n dans le voisinage vérifierait $\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1-i} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \lambda_i + \lambda_n = 0$ pour des λ_i de $\mathbb{C}$ non tous nuls. Le vecteur non nul $((-1)^{n-1-i} \lambda_i, \lambda_n)$ engendrerait alors un sous-groupe à un paramètre (λ) stabilisant D , on aurait $(\lambda) + D \subseteq D$, et D ne serait pas de type général (corollaire 6). Donc $\dim H^0(D', \Omega_{D'}^{n-1}) \geq n$, et les k -formes globales $f^*(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})$ sont elles aussi linéairement indépendantes. D'autre part les w_i sont non seulement linéairement indépendantes, mais elles le sont algébriquement. En d'autres termes, l'image E de D' par l'application rationnelle $h : D' \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ associée aux w_i est surjective. Supposons que E soit contenu dans un diviseur F que l'on peut supposer lisse au voisinage de l'image q de p . L'équation locale de F au voisinage de q est alors, après éventuel changement de coordonnées $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ dans D au voisinage de p , du type $\frac{\partial x_n}{\partial x_1} = g(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}})$, où g est holomorphe de valuation ≥ 2 . En particulier $\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial x_n}{\partial x_i}) = \frac{\partial g}{\partial x_i}$ sur $h^{-1}(q)$ et $h^{-1}(q)$ est stable par une droite "parallèle" à $\{x_2 = \dots = x_n = 0\}$. On conclut comme plus haut.

Soit alors une k -forme w . Elle est au voisinage de p combinaison des k -formes $f^*(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})$ à coefficients holomorphes dépendant des variables $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$. En la multipliant par une $(n-1-k)$ -forme du type $f^*(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{n-k-1}})$, on remarque que les coefficients holomorphes sont, à constante près, des combinaisons linéaires des $\frac{\partial x_n}{\partial x_i}$. Le choix de $(n-1-k)$ -formes où apparaît dx_n et l'indépendance algébrique des $\frac{\partial x_n}{\partial x_i}$ permettent de conclure.

Idée de la démonstration du théorème 7.— Il s'agit de généraliser le théorème 5. Pour plus de simplicité, on suppose que A est une variété abélienne simple. Sinon, il faut combiner ce qui suit avec la fibration de Ueno (corollaire 6).

Notons D le discriminant dans A de la factorisation de Stein de f , D_i

ses composantes irréductibles, D'_i désingularisées des D_i et D_{ij} les inverses stricts des D_i dans W sur lesquels f ramifie vraiment. Quitte à changer de modèle pour W , on peut supposer que le diviseur Σ_{ij} est lisse. On suppose $\kappa(W) = 0$. L'image inverse par f de la forme globale de degré maximum de A étant non nulle sur l'ouvert sur lequel f est étale, c'est une section globale de ω_W . Donc $H^0(W, \omega_W) = \mathbb{C}$, et des inclusions $\omega_W \hookrightarrow \omega_W(\Sigma_{ij}) \hookrightarrow \omega_W^2$ on tire $H^0(W, \omega_W(\Sigma_{ij})) = \mathbb{C}$. De la suite exacte longue associée à $0 \rightarrow \omega_W \hookrightarrow \omega_W(\Sigma_{ij}) \rightarrow \bigoplus \omega_{D_{ij}} \rightarrow 0$ on tire $\dim \bigoplus H^0(D_{ij}, \omega_{D_{ij}}) \leq \dim H^1(W, \omega_W) = \dim H^0(W, \Omega_W^{n-1})$ et a fortiori $\dim \bigoplus H^0(D'_i, \omega_{D'_i}) \leq \dim H^0(W, \Omega_W^{n-1})$, où n est la dimension de A . Or $\dim H^0(W, \Omega_W^{n-1}) \leq n$. En effet les images inverses w_i par f des n $(n-1)$ -formes globales de A sont telles que toute autre $(n-1)$ -forme w de W s'annule modulo une combinaison linéaire des w_i sur le lieu étale de f , puisque $H^0(W, \omega_W) = \mathbb{C}$. Cela étant, comme sous-variété de A , D_i vérifie $\dim H^0(D'_i, \omega_{D'_i}) \geq 1$ (théorème 5), et comme sous-variété d'une variété abélienne simple, D_i vérifie que D'_i est de type général (corollaire 6) et $\dim H^0(D'_i, \omega_{D'_i}) \geq n$ (lemme 9). Il n'y a donc qu'un seul $D_i = D$ qui vérifie $|\chi(\mathcal{O}_D)| = 1$ (lemme 9). En remplaçant A par un revêtement étale d'un degré $d > 1$, la caractéristique d'Euler-Poincaré du nouveau diviseur de ramification est multipliée par d . Donc la factorisation de Stein de f est non ramifiée sur W et W est birationnelle à $A(W)$.

COROLLAIRE 10 [13].— Soit $f : W \rightarrow A$ un morphisme génériquement fini sur son image $f(W)$ d'une variété W dans une variété abélienne A . Alors il existe un revêtement étale $W' \rightarrow W$ tel que W' soit birationnelle à $B \times X$, où B est une variété abélienne et X une variété vérifiant $\dim X = \kappa(X) = \kappa(W)$.

Idée de la démonstration.— D'après le théorème 7 et la démonstration du corollaire 6, la fibration d'Itaka (théorème 3) $f : W \rightarrow X'$ a une fibre F birationnelle à $A(F)$, variété abélienne constante car isogène à, et d'un degré fixé sur, son image B_0 constante dans A , et $f(W)$ est un fibré étale sur son image dans A/B_0 . Soit $W \rightarrow Y$ la factorisation de Stein (non lisse) de $W \rightarrow f(W) \rightarrow A/B_0$ et $W_1 \rightarrow Y$ le fibré étale induit. Il existe donc un revêtement $\tau : X_1 \rightarrow Y$ fini qui trivialise W_1 i.e. tel que $W_1 \times_Y X_1 \simeq B_0 \times X_1$, et qui trivialise birationnellement W i.e. tel que $W \times_Y X_1 \sim A(F) \times X_1$. On peut supposer que τ se factorise sur un revêtement étale de Y qui trivialise W_1 et que τ est galoisien de groupe H . Comme $A(F) \times X_1$ est fini sur $B_0 \times X_1$, le morphisme $W \times_Y X_1 \rightarrow B_0 \times_Y X_1$ se factorise sur $A(F) \times X_1$. Notons G le groupe de Galois de $A(F) \times X_1$ sur $B_0 \times X_1$, K celui de $A(F) \times X_1$ sur W_1 et H' celui de $W \times_Y X_1$ sur W . Comme $A(F)$ est étale sur B_0 , le groupe H_1 engendré par les sous-groupes de ramification de H' s'injecte dans H par la suite exacte $1 \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow H \rightarrow 1$.

Quitte à remplacer $A(F) \times X_1$ par $A(F) \times X_1/H_1 = A(F) \times X_2$ et $W \times_Y X_1$ par $W' = W \times_Y X_1/H_1$ et à désingulariser X_2 en X , on a le corollaire 10.

§ 4. Additivité des dimensions de Kodaira : C_{nm}

Reprenons le diagramme du théorème 8 :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\alpha} & \alpha(V) \subset A(V) \\ \downarrow f & \nearrow \tau & \\ W & & \end{array}$$

où τ est génériquement fini sur $\alpha(V)$, où α est l'application d'Albanese de V et où f est un espace fibré de fibre générique F . Du point de vue de la théorie de la classification, on a besoin de connaître le comportement relatif des dimensions de Kodaira de V , W et F . Ce qui a conduit Iitaka [1]-[2] et Ueno [3] à formuler la

CONJECTURE C_{nm} .— Soit $f : V \rightarrow W$ un espace fibré de fibre générique F , tel que $\dim V = n$ et $\dim W = m$. Alors

$$\kappa(V) \geq \kappa(W) + \kappa(F).$$

Une étude plus fine de l'application d'Albanese exige des renseignements plus précis sur les fibres de f , renseignements qui s'expriment [11] sous la forme de la

CONJECTURE C_{nm}^+ .— C_{nm} est vrai et de plus si $\kappa(W) \geq 0$ et $\kappa(F) \geq 0$, alors $\kappa(V) \geq \text{Var } f$.

Définition.— Sous les mêmes hypothèses, la *variation* de f , notée $\text{Var } f$, est définie comme le plus petit entier $k \geq 0$ tel qu'il existe un morphisme surjectif génériquement fini $W_2 \rightarrow W$, un morphisme surjectif $W_2 \rightarrow W_1$ avec $\dim W_1 = k$ et un espace fibré $V_1 \rightarrow W_1$ tels que $V_1 \times_{W_1} W_2$ soit birationnel à $V \times_W W_2$. Si les fibres lisses de f admettent un schéma de modules grossier M , alors f induit une application rationnelle $\Psi : W \dashrightarrow M$, et l'on a $\text{Var } f = \dim \Psi(W)$.

Une autre formulation de C_{nm} (resp. C_{nm}^+) précise l'objet d'étude du problème :

CONJECTURES C'_{nm} et $C_{nm}^{+,1}$ [11].— Soit $f : V \rightarrow W$ un espace fibré de fibre générique F , tel que $\dim V = n$ et $\dim W = m$. Alors $\kappa(V/W) \geq \kappa(F)$ (conjecture C'_{nm}). Si de plus $\kappa(F) \geq 0$, alors $\kappa(V/W) \geq \max\{\kappa(F), \text{Var } f\}$ (conjecture $C_{nm}^{+,1}$).

Lemme 11 [11].— C_{nm} (resp. C_{nm}^+) est vrai si $C'_{n-r, m-r}$ (resp. $C_{n-r, m-r}^{+,1}$) est vrai pour tout r tel que $0 \leq r < m$.

Démonstration.— Si $\kappa(V/W) = -\infty$, alors $\kappa(F) = -\infty$ et C_{nm} (resp. C_{nm}^+) est vrai. Sinon $\omega_{V/W}^a$ a une section pour a grand et on prend a tel que les fibrations d'Iitaka (théorème 3) de V et W soient données par ce a . On a alors un diagramme commutatif d'applications rationnelles

$$\begin{array}{ccccc} V & \dashrightarrow & V_1 & \subset & \mathbb{P}_1 \\ \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow p \\ W & \dashrightarrow & W_1 & \subset & \mathbb{P}_2 \end{array}$$

où p est la projection sur les sections de ω_W^a données par l'inclusion $f^*\omega_W^a \hookrightarrow \omega_V^a$. Notons G et H les fibres de $V \dashrightarrow V_1$ et $W \dashrightarrow W_1$, qui vérifient $\kappa(G) = \kappa(H) = 0$. On a (théorème 4) $\kappa(f^{-1}(H)) \leq \kappa(G) + \dim p^{-1}(x)$ pour un point générique x de W_1 , donc

$$\kappa(V) = \dim V_1 = \dim p^{-1}(x) + (\dim W_1 = \kappa(W)) \geq \kappa(f^{-1}(H)) + \kappa(W).$$

En appliquant C' à $f^{-1}(H) \rightarrow G$ et en remarquant que $\kappa(f^{-1}(H)) \geq \kappa(f^{-1}(H)/G)$, on trouve C_{nm} . Si C_{nm}^{+} est vrai, il suffit de l'appliquer directement à f .

Résultats 12.— Sont vrais

- | | |
|---|-----------|
| 1) $C_{n,n-1}^{+}$ | [5]-[11] |
| 2) $C_{3,1}^{+}$ | [11] |
| 3) C_{nm} si $\dim W = \kappa(W)$ | [13]-[15] |
| 4) $C_{n,1}$ si $n \leq 4$ | [7]-[14] |
| 5) C_{nm}' si F est une variété abélienne | [9] |

Remarque.— Le faisceau $f_*\omega_{V/W}^a$ est étudié dans [14], particulièrement dans le cas où la base W est une courbe elliptique. Bien que cette étude fournisse des renseignements plus précis que $C_{4,1}$, elle ne permet pas cependant de conclure $C_{n,1}$ en général.

§ 5. Démonstration des théorèmes 1 et 2

Point 1 [11].— Soit V une variété de dimension 3 telle que $\kappa(V) = -\infty$. Alors V vérifie le théorème 1.

Démonstration.— La variété V ne peut être génériquement finie sur $A(V)$, car $\kappa(V) = -\infty$. L'espace fibré $f: V \rightarrow W$ du théorème 8 est donc de dimension relative 1 ou 2 et $\kappa(W) \geq 0$. De $C_{3,2}$ et $C_{3,1}$ on tire que $\kappa(F) = -\infty$. La propriété universelle de la variété d'Albanese implique que $A(V)$ et $A(W)$ ont même dimension.

Point 2 [11]-[13].— Soit V une variété de dimension n , telle que $\kappa(V) = 0$. Alors V vérifie le théorème 2 (i)-(ii).

Démonstration.— Supposons que $\kappa(W) > 0$. Alors (corollaire 10), un revêtement étale W' de W admet un morphisme surjectif sur une variété de type général X , donc $V \times_W W' = V'$ aussi. Notons $g: V' \rightarrow X$ ce morphisme, qui est un espace fibré. De C_{nm} lorsque la base X vérifie $\dim X = \kappa(X)$ et de $\kappa(V) = \kappa(V')$, on tire que $\kappa(g^{-1}(x)) = -\infty$, pour un point générique x de X . Mais l'inégalité d'Itaka (théorème 4) montre que c'est impossible. Donc $\kappa(W) = 0$. On applique le théorème 8.

Remarque [11].— Si $\dim V = 3$, de $C_{3,2}$, $C_{3,1}$ et du théorème 8, on tire directement (sans utiliser le corollaire 10) que α est un espace fibré avec l'information

supplémentaire que $\kappa(F) = 0$.

Point 3 [11]. — Il reste à démontrer sous les hypothèses du point 2 que α est un *fibré étale* si $\dim V = 3$ ou si $q(V) = \dim V - 1$ (théorème 2 (iii)). De $C_{3,1}^+$ et $C_{n,n-1}^+$ on tire que $\text{Var } \alpha = 0$, c'est-à-dire que toutes les fibres lisses de α sont isomorphes sur un ouvert de Zariski. Il existe donc un morphisme génériquement fini $\tau : W' \rightarrow A(V)$, où W' est lisse, tel que $V \times_{A(V)} W'$ soit birationnel à $F \times W'$. On peut supposer que τ est galoisien de groupe G et que G est inclus dans $\text{Aut}(F \times W')$. En comparant les ramifications de $F \times W'$ sur $F \times W'/G$ et de W' sur $A(V)$ on trouve que les sous-groupes de ramification d'un diviseur D dans W' et du diviseur $D \times F$ dans $W' \times F$ sont les mêmes. Soit I le sous-groupe de G engendré par ces groupes de ramification. Alors $F \times W'/I$ réalise une trivialisatoin de α après revêtement étale.

Les paragraphes suivants sont consacrés à l'étude de C_{nm} .

§ 6. Quelques constructions et définitions

Pour évaluer le $\kappa(V/W)$ d'un espace fibré $f : V \rightarrow W$, on peut toujours remplacer V par un modèle birationnel V' , car pour tout morphisme birationnel $\tau : V' \rightarrow V$ on a $\tau_* \omega_{V'/W}^a = \omega_{V/W}^a$. On peut toujours aussi remplacer W par un modèle birationnel W' , car pour tout morphisme birationnel $\tau : W' \rightarrow W$, on peut supposer que f se factorise en $f' : V \rightarrow W'$ et on a l'injection $f'_* \omega_{V/W'}^a \hookrightarrow f_* \omega_{V/W}^a$ et donc $\kappa(V/W') \leq \kappa(V/W)$. On supposera donc toujours que le complémentaire d'un ouvert W_0 dans W contenu dans l'ouvert de lissité de f est un diviseur à croisements normaux D , de même que son image inverse $f^{-1}(D)$, complémentaire de l'ouvert lisse V_0 tel que $V_0 = f^{-1}(W_0)$.

Soit $\tau : W' \rightarrow W$ un revêtement entre deux variétés. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} V' & \xrightarrow{d} & V_1 & \xrightarrow{n} & V_2 & \xrightarrow{\tau_2} & V \\ & \searrow f' & \searrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow \\ & & & & W' & \xrightarrow{\tau} & W \end{array}$$

où $V_2 = V \times_W W'$, n est la normalisation de V_2 , d est une désingularisée de V_1 , $\tau_1 = \tau_2 \circ n$, $\tau' = \tau_1 \circ d$, et où les autres morphismes sont les morphismes évidents. On peut supposer que le discriminant dans V de τ_1 est un diviseur à croisements normaux.

Lemme 13. — Sous les hypothèses précédentes, on a les inclusions

$$\begin{aligned} \omega_{V_1/W'} &\hookrightarrow \tau_1^* \omega_{V/W} \\ f'_* \omega_{V'/W'}^a &\hookrightarrow \tau_* f_* \omega_{V/W}^a \end{aligned} \quad \text{pour } a \geq 0$$

En particulier $\kappa(V/W) \geq \kappa(V'/W')$.

Démonstration.— Le revêtement τ_1 ramifiant sur un diviseur à croisements normaux, V_1 n'a que des singularités quotient [30], donc rationnelles et de Cohen-Macaulay. En particulier V_1 admet un faisceau dualisant ω_{V_1} , qui vérifie $d_*\omega_{V_1} = \omega_{V_1}$. Si on définit ω_{V_2} par $\omega_{V_2} = \tau_2^!\omega_{V_1}$, c'est-à-dire que $\tau_{2*}\omega_{V_2} = \underline{\text{Hom}}_V(\tau_{2*}\mathcal{O}_{V_2}, \omega_{V_1})$, alors $\omega_{V_2} \otimes \tau_2^*\omega_{V_1}^{-1} = f_{2*}\omega_{V_1}/W$ puisque τ est plat, donc $\omega_{V_2/W} = \tau_2^*\omega_{V_1/W}$. Le quotient de $n_*\mathcal{O}_{V_1}$ par $\mathcal{O}_{V_2}$ étant de torsion, on a une injection $(n_*\omega_{V_1/W}, = \underline{\text{Hom}}_{V_2}(n_*\mathcal{O}_{V_1}, \omega_{V_2/W})) \hookrightarrow \omega_{V_2/W}$ et donc un morphisme $n_*n_*\omega_{V_1/W} \rightarrow \tau_1^*\omega_{V/W}$. Or $n_*n_*\omega_{V_1/W}$ a pour quotient sans torsion $\omega_{V_1/W}$ et $\tau_1^*\omega_{V/W}$ est inversible. Cela donne la première inclusion. D'autre part, $d_*\omega_{V_1/W} = \omega_{V_1/W}$. Il existe donc un morphisme $d_*\omega_{V_1/W}^a \rightarrow \omega_{V_1/W}^a$ qui est un isomorphisme en dehors d'un diviseur E contenu dans le lieu exceptionnel de d . On a donc une injection $\omega_{V_1/W}^a \hookrightarrow \tau'^*\omega_{V/W}^a \otimes \mathcal{O}(sE)$ pour un multiple sE de E . Ce qui montre que $d_*\omega_{V_1/W}^a$ est inclus dans $\tau_1^*\omega_{V/W}^{a-1} \otimes d_*\omega_{V_1/W}(sE) = \tau_1^*\omega_{V/W}^{a-1} \otimes \omega_{V_1/W} = n^!\tau_2^*\omega_{V/W}^a$. Ce qui donne comme précédemment, en appliquant n_* , l'inclusion $n_*d_*\omega_{V_1/W}^a \hookrightarrow \tau_{2*}\omega_{V/W}^a$. Or τ étant plat, $f_{2*}\tau_2^*\omega_{V/W}^a = \tau^*f_*\omega_{V/W}^a$. En appliquant f_{2*} à l'inégalité précédente, on trouve la deuxième inclusion. La dernière provient de la trace $\tau_*\mathcal{O}_W \rightarrow \mathcal{O}_W$.

Lemme 14 [13]–[19].— Soient W une variété, $D = \sum_{i=1}^r D_i$ un diviseur à croisements normaux, $\{m_1, \dots, m_r\}$ des nombres positifs. Il existe alors une variété W' et un revêtement plat $\tau : W' \rightarrow W$ tel que $D' = (\tau^*D)_{\text{red}}$ soit un diviseur à croisements normaux, m_i divise m_{ij} où m_{ij} est défini par $\tau^*D_i = \sum m_{ij}D_{ij}$, τ^*D_i soit réduit et lisse si $m_i = 1$.

Remarque.— La construction se fait par récurrence, composante de D par composante. On extrait la m_i -ième racine d'une section d'un faisceau H^{m_i} qui a pour diviseur correspondant la réunion d'un diviseur très ample et de la composante D_i .

DÉFINITION 15.— Un faisceau localement libre F sur une variété W est dit *semi-positif* (noté s.p) si pour tout morphisme $\tau : C \rightarrow W$ d'une courbe lisse C dans W et pour tout quotient inversible L de τ^*F , L a un degré positif ou nul sur C . Un faisceau cohérent sans torsion F sur W est dit *faiblement positif* (noté f.p) si pour tout faisceau inversible ample H et tout $a > 0$, il existe $b > 0$ tel que $S^{ba}(F) \otimes H^b$ soit engendré sur un ouvert par ses sections globales, c'est-à-dire que l'application naturelle

$$(*) \quad H^0(W, S^{ba}(F) \otimes H^b) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_W \longrightarrow S^{ba}(F) \otimes H^b$$

soit surjective sur un ouvert.

Remarques.— 1) Le produit symétrique $S^\ell(F)$ est défini ici comme l'extension du produit symétrique sur l'ouvert sur lequel F est localement libre. En particulier l'injection de F dans $S^1(F)$ n'est pas forcément surjective.

2) Si F est localement libre, F est s.p si et seulement si F est f.p et

et l'application (*) est surjective sur W .

3) Si W est une courbe et si F est localement libre, F est s.p si et seulement si F est f.p.

4) Soient $\tau : W' \rightarrow W$ un morphisme birationnel entre deux variétés W et W' , $F \hookrightarrow G$ une inclusion de deux faisceaux cohérents sans torsion sur W' égaux sur un ouvert ; alors si F est f.p., $\tau_* G$ est f.p.

5) Soient $\tau : W' \rightarrow W$ un revêtement plat entre deux variétés W et W' , F un faisceau cohérent sans torsion ; alors si $\tau^* F$ est f.p., F est f.p.

PROPOSITION 16 [13]-[15].— Pour démontrer C_{nm} lorsque la base W est de type général, il suffit de montrer que pour un $\ell > 0$ tel que $f_* \omega_{V/W}^\ell \neq 0$, le faisceau $f_* \omega_{V/W}^\ell$ est f.p.

Démonstration.— Si pour tout $\ell > 0$, $f_* \omega_{V/W}^\ell = 0$, alors $\kappa(F) = -\infty$ et C_{nm} est trivial. Soit donc un ℓ comme dans la proposition. Pour un faisceau très ample inversible H fixé, il existe $a > 0$ tel que H^2 soit contenu dans $\omega_W^{a\ell}$. En effet le nombre des sections de $\omega_W^{a\ell}$ restreint au diviseur de H^2 croît au plus comme $(a\ell)^{m-1}$, et celui de $\omega_W^{a\ell}$ comme $(a\ell)^m$. Soit alors $b > 0$ tel que $S^{ba}(f_* \omega_{V/W}^\ell) \otimes H^b$ soit engendré sur un ouvert par ses sections globales. Supposons que $f_* \omega_{V/W}^\ell$ soit localement libre. L'application naturelle $\pi : S^{ba}(f_* \omega_{V/W}^\ell) \otimes H^b \rightarrow f_* \omega_{V/W}^{\ell ba} \otimes H^b$ est non triviale, donc le deuxième faisceau a une section globale qui fournit une inclusion de $f^* H^b$ dans $\omega_{V/W}^{\ell ba} \otimes f^* H^{2b}$ et par suite une inclusion de $f^* H^b$ dans $\omega_V^{\ell ba}$. On a donc un diagramme commutatif d'applications rationnelles

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{g} & \mathbb{P}_1 \\ f \downarrow & & \downarrow p \\ W & \longrightarrow & \mathbb{P}_2 \end{array}$$

où p est la projection sur les sections de $f^* H^b$, tel que la fibre générique G de g vérifie $\kappa(G) = 0$ (théorème 3), et tel que (théorème 4) $\kappa(F) \leq \dim g(F)$. Donc $\kappa(F) \leq \dim g(V) - \dim W = \kappa(V) - \dim W$. Si $f_* \omega_{V/W}^\ell$ n'est pas localement libre, l'application π n'est pas définie. On prépare dans ce cas $f : V \rightarrow W$ de telle sorte qu'il existe un morphisme birationnel $\tau : V \rightarrow V_0$ tel que tous les diviseurs B de V vérifiant $\text{codim } f(B) \geq 2$ soient dans le lieu exceptionnel de τ [27]. L'application π est alors définie si l'on tensorise $\omega_{V/W}^{\ell ba}$ par un tel diviseur B , et il suffit alors de remarquer que $\kappa(\omega_V(B)) = \kappa(V)$.

Remarque.— Si l'on suppose que $\kappa(V) \geq 0$, on peut toujours trouver un revêtement lisse V' de V tel que $\kappa(V') = \kappa(V)$ et $H^0(V', \omega_{V'}) \neq 0$. Il suffit dans ce cas de montrer la proposition 16 pour $\ell = 1$ [13].

§ 7. Variation de structures de Hodge ou positivité de $f_* \omega_{V/W}^{\otimes \ell}$

Reprenons notre espace fibré $f : V \rightarrow W$ tel que $\dim V = n$ et $\dim W = m$ avec les hypothèses du § 6. Posons $D = \bigcup_1^r D_i$, $f_0 = f|_{V_0}$, notons $H_0 = (R^{n-m} f_{0*} \mathbb{L})_{\text{prim}} \otimes_{\mathcal{O}_{W_0}} \mathcal{O}_{W_0}$ l'espace total de la variation de la structure de Hodge polarisée, $F_0 = f_{0*} \omega_{V_0/W_0}^{\otimes \ell}$ le $(n-m)$ -ième terme de la filtration de Hodge $\{F^p\}_{0 \leq p \leq n-m}$ de H_0 . Supposons de plus que les monodromies locales γ_i autour des D_i de H_0 soient unipotentes. Alors une construction standard (voir par exemple [29] page 234) affirme l'existence d'une extension localement libre H de H_0 qui correspond aux sections s de H_0 qui s'écrivent $s = \sum f_i s_i$ où les f_i sont des fonctions holomorphes multivaluées sur W_0 , ayant au plus des pôles logarithmiques le long de D et les s_i des sections linéairement indépendantes multivaluées, plates par rapport à la connexion de Gauss-Manin, de H_0 . Le "nilpotent orbit theorem" de W. Schmid [29] affirme l'existence d'une extension de la filtration F^p donnée par les mêmes conditions. Posons $F = F^{n-m} H$.

THÉORÈME 17 [6]-[13].— *Sous les hypothèses précédentes, $f_* \omega_{V/W}^{\otimes \ell}$ est localement libre et s.p.*

Démonstration.— Les deux faisceaux F et $f_* \omega_{V/W}^{\otimes \ell}$ sont des extensions de F_0 , qui sont donnés par les mêmes conditions [28]. Ils sont donc égaux et $f_* \omega_{V/W}^{\otimes \ell}$ est localement libre. Soit $\tau : C \rightarrow W$ un morphisme d'une courbe lisse C dans W . Supposons que $C_0 = \tau^{-1}(W_0)$ soit non vide, et notons L un quotient inversible de $\tau^* F$. La polarisation de H_0 définit une métrique hermitienne h sur F_0 , donc des métriques hermitiennes h' et h_L sur $\tau^* F_0$ et $L|_{C_0}$ dont la courbure Θ_L est positive [22]. Les singularités de h_L le long de $C - C_0$ sont logarithmiques.

Lemme 18 [6].— *On a $\deg_C L = \frac{i}{2\pi} \int_{C_0} \Theta_L \geq 0$.*

Idée de la démonstration.— Pour un prolongement $\mathcal{E}^\infty$, Θ de Θ_L à C , le degré de L sur C est $\deg_C L = \frac{i}{2\pi} \int_C \Theta$. On utilise le théorème de Stokes pour ramener le calcul des intégrales autour des points de $C - C_0$ à celui de $\partial \log h_L(s, s)$ sur un cercle entourant un point de $C - C_0$, où s est une section locale de L , et on conclut en utilisant que h_L a au plus des pôles logarithmiques.

Remarque.— Si de plus l'application de C_0 dans le domaine des périodes est non triviale, et que F est inversible, alors $\deg_C F$ est strictement positif ([22], corollary 7-10).

Soient U un voisinage ouvert de D_1 , $D_1^0 = D_1 - \bigcup_2^r D_i$, $U^0 = U - \bigcup_2^r D_i$. Sur $H|_{U-D}$, la monodromie γ_1 est unipotente et définit une unique filtration dite par le poids $\{W_\ell\}_{0 \leq \ell \leq 2(n-m)}$ vérifiant que $NW_\ell \subset W_{\ell-2}$ et que $(N^\ell : \text{Gr}_{(n-m)+\ell}^W(H|_{U-D}) \rightarrow \text{Gr}_{(n-m)-\ell}^W(H|_{U-D}))$ est un isomorphisme pour $N = \log \gamma_1$. Cette filtration W_ℓ admet une extension à $H|_{U_0}$ de sorte que les filtrations

W_ℓ et F^p définissent une variation de structures de Hodge mixtes sur $H|_{D_1^0}$, qui sont polarisées sur leurs parties primitives,
 $Gr_\ell^W(H|_{D_1^0})_{\text{prim}} = \text{Ker}\left(N^{\ell-(n-m)+1} : Gr_\ell^W(H|_{D_1^0}) \longrightarrow Gr_{2(n-m)-\ell-2}^W(H|_{D_1^0})\right)$ pour $\ell \geq (n-m)$ et 0 sinon, par la polarisation sur $W_\ell(H|_{U-D})$ qui en définit une sur $Gr_\ell^W(H|_{U^0})$. Les filtrations W_ℓ , F^p et la polarisation sur $H|_{D_1^0}$ admettent des extensions à $H|_{D_1}$ qui vérifient, de même que plus haut $Gr_\ell^W(F|_{D_1}) = F^{n-m}(Gr_\ell^W(H|_{D_1}))_{\text{prim}}$. Supposons maintenant que $\tau(C) \cap W_0 = \emptyset$ et que $\tau^{-1}(D_1^0) \neq \emptyset$. Il existe un ℓ tel que le morphisme $\tau^*Gr_\ell^W(F|_{D_1}) \longrightarrow L$ soit défini et non nul. Notons L' le sous-faisceau inversible de L ainsi construit. Le même argument que précédemment appliqué à $Gr_\ell^W(F|_{D_1})$ et à $\tau^{-1}(D_1^0)$ dit que $\deg_C L'$ est positif (ou nul), donc a fortiori $\deg_C L$. On termine la démonstration par récurrence...

COROLLAIRE 18.— Pour tout espace fibré $f : V \rightarrow W$, $f_*\omega_{V/W}$ est f.p.

Démonstration.— On combine le lemme 14 qui rend unipotentes les monodromies locales quasi-unipotentes de f , le lemme 13, la définition 15 remarque 5, le théorème 17.

Lemme 19 [15].— Soit H un faisceau inversible ample sur W tel que pour un $a > 0$, $S^a(f_*\omega_{V/W}^\ell \otimes H^\ell)$ soit engendré sur un ouvert par ses sections globales. Alors $f_*\omega_{V/W}^\ell \otimes H^{\ell-1}$ est f.p.

Idée de la démonstration.— Par extraction d'une racine de sections bien choisies de certains faisceaux ([11], § 5), on construit un espace fibré $g : T \rightarrow W$ équipé d'un morphisme $g_*\omega_{T/W} \rightarrow S^1 f_*\omega_{V/W}^\ell \otimes H^{\ell-1}$ surjectif sur un ouvert. Pour cela, on prend une section générale de l'image du morphisme $S^a(f_*\omega_{V/W}^\ell \otimes H^\ell) \rightarrow S^1(f_*\omega_{V/W}^{a\ell} \otimes H^{a\ell})$, dont on peut supposer (§ 6) que le diviseur correspondant $D + \sum c_i F_i$ dans V est à croisements normaux. Si $a\ell$ divise tous les c_i , il suffit de prendre

$T = \text{Spec}_V\left(\bigoplus_0^{a\ell-1} L^{-i}\right)$ où $L^{a\ell} = \mathcal{O}_V(D)$, qui est lisse. Le morphisme cherché est

alors la projection de $g_*\omega_{T/W} = f_*\left(\bigoplus_0^{a\ell-1} L^i \otimes \omega_{V/W}\right)$ sur le facteur

$f_*(\omega_{V/W} \otimes L^{\ell-1}) = f_*(\omega_{V/W}^\ell \otimes H^{\ell-1})$. Sinon, on prend un revêtement intermédiaire

$\tau : S \rightarrow V$ construit comme dans le lemme 14 tel que $\tau^*F_i = a\ell \sum_{ij} c_{ij}^! F_{ij}$, et on utilise que $\omega_{V/W}$ est un facteur direct de $\tau_*\omega_{S/W}$.

THÉORÈME 20 [15].— Pour tout espace fibré $f : V \rightarrow W$ et tout $\ell > 0$, le faisceau $f_*\omega_{V/W}^\ell$ est f.p.

Démonstration.— Soit H un faisceau ample sur W . Il existe alors s tel que H^s vérifie les conditions du lemme 19. Soit r le plus petit s tel que $f_*\omega_{V/W}^\ell \otimes H^{s\ell-1}$ soit f.p. Par définition, il existe $a > 0$ tel que $S^a(f_*\omega_{V/W}^\ell \otimes H^{r\ell-1}) \otimes H^a$ soit engendré sur un ouvert par ses sections globales. Donc (lemme 19) $f_*\omega_{V/W}^\ell \otimes H^{r(\ell-1)}$ est f.p et $r(\ell-1) > (r-1)\ell - 1$, ou encore $r \leq \ell$. Ainsi, pour tout espace fibré $f : V \rightarrow W$ et tout H inversible et ample sur W , $f_*\omega_{V/W}^\ell \otimes H^{\ell^2-\ell}$ est f.p. Prenons un $a > 0$ et un revêtement lisse

$\tau : W' \rightarrow W$ tel que l'on ait $\tau^*H = H'^d$ avec H' ample et $d = 2a(\ell^2 - \ell) + 1$ et dont le discriminant dans W soit à croisements normaux et rencontre transversalement le lieu non lisse de f (lemme 14). Soit $f' : V' \rightarrow W'$ la famille obtenue comme dans le lemme 13. Alors $f'_{*}\omega_{V'/W'}^{\ell} \otimes H'^{\ell^2 - \ell}$ est f.p, donc (lemme 13 et définition 15 remarque 4), $\tau^*f'_{*}\omega_{V'/W'}^{\ell} \otimes H'^{\ell^2 - \ell}$ est f.p. Il existe donc $b > 0$ tel que $S^{2ba}(\tau^*f'_{*}\omega_{V'/W'}^{\ell} \otimes H'^{\ell^2 - \ell}) \otimes H'^b = \tau^*(S^{2ba}(f_{*}\omega_{V/W}^{\ell}) \otimes H^b)$ soit engendré sur un ouvert pas ses sections globales. Si l'on choisit b grand de telle sorte que $\tau_{*}\mathcal{O}_{W'}^b \otimes H^b$ soit engendré par ses sections globales, alors $S^{2ba}(f_{*}\omega_{V/W}^{\ell}) \otimes H^{2b}$ est engendré sur un ouvert par ses sections globales. Donc $f_{*}\omega_{V/W}^{\ell}$ est f.p. Ainsi C_{nm} est vrai si la base W est de type général.

§ 8. Méthodes algébriques ou quelques cas de C_{nm}^{+}

On se place dans le cas où notre espace fibré $f : V \rightarrow W$ est une famille de surfaces de type général ou de courbes de genre ≥ 2 ($\kappa(F) = \dim F$). On suppose de plus que pour tout $\ell > 0$, $f_{*}\omega_{V/W}^{\ell}$ est localement libre. On pose $r(\ell) = \text{rang } F_{\ell}$, on note $r(\ell)$ le rang de F_{ℓ} , et on pose $f_{\ell} = \det F_{\ell} = \bigwedge^{r(\ell)} F_{\ell}$. Alors

THÉOREME 21 [11].— *Sous les hypothèses précédentes, on a*
 $\kappa(W, f_{ab}^{r(a)} \otimes f_a^{-b \cdot r(ab)}) \geq \text{Var } f$ pour a et b grands.

Démonstration.— Pour a grand, les sections de ω_F^a définissent un morphisme birationnel de F sur F' dans $\mathbb{P}^N$, où $N = \dim H^0(F, \omega_F^a) - 1 = r(a) - 1$. Le point du schéma de Hilbert correspondant à $F' \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ est stable au sens de Mumford [24], et il existe un schéma de modules grossier M naturellement plongé dans un projectif $\mathbb{P}$ par $i : M \hookrightarrow \mathbb{P}$, équipé d'une application rationnelle $\Psi : W \dashrightarrow M$. On veut alors comparer le faisceau du théorème 21 et $(i \circ \Psi)^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$. Pour b grand, l'application $S^b(F_a) \rightarrow F_{ab}$ est surjective sur un ouvert de même que l'application $\bigwedge^{r(ab)} (S^b(F_a)) \rightarrow f_{ab}$. Notons L l'image de cette dernière, qui est de rang 1. Pour une trivialisation $t : F_a|_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U^{r(a)}$ sur un ouvert U , de F_a , on a un morphisme $g_t : \bigwedge^{r(ab)} (S^b(\mathcal{O}_U^{r(a)})) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_U \rightarrow L|_U$, donc un morphisme $g_t^* : U \rightarrow \mathbb{P}' = \mathbb{P} \left(\bigwedge^{r(ab)} (S^b(\mathcal{O}_U^{r(a)})) \right)$, sur lequel $\mathbb{P}'$ opère $SL(\mathcal{O}_U^{r(a)})$. Un point $g_t^*(u)$, si la fibre $f^{-1}(u)$ est lisse, est le point correspondant du schéma de Hilbert, qui est stable [24]-[21]. Il existe donc un polynôme homogène sur $\mathbb{P}'$ invariant par $SL(\mathcal{O}_U^{r(a)})$, qui n'annule pas $g_t^*(u)$, et de tels polynômes homogènes séparent les $SL(\mathcal{O}_U^{r(a)})$ -orbites différentes. Notons P un tel polynôme, p son degré. Il induit une section P_t de $L^p|_U$ par g_t . Une autre trivialisation t' de $F_a|_U$ induit une section $P_{t'}$ de $L^p|_U$ qui diffère de P_t par une puissance du déterminant d'un élément β de $GL(\mathcal{O}_U^{r(a)}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_U$ qui transforme t en $t' = \beta t$. Par un calcul explicite, on trouve : $P_{t'} = P_t (\det \beta)^{pbr(ab)/r(a)}$. Ce qui signifie

que P induit une section globale du faisceau $L^P \otimes f_a^{-pbr(ab)/r(a)}$. On conclut en observant que les fibres lisses non isomorphes de f sont séparées par les P et que $\text{Var } f = \dim \Psi(W)$.

Pousser plus loin l'étude de C_{nm}^{+1} dans le cas précédent, c'est donc comparer $\omega_{V/W}^\ell$ et le faisceau du théorème 21. Dans le cas où $\dim V = 3$ et $\dim W = 1$ les F_ℓ sont toujours localement libres, et vérifient le théorème de Riemann-Roch : $\dim H^0(W, F_\ell) - \dim H^1(W, F_\ell) = \deg F_\ell - \text{rang}(F_\ell)(\text{genre } W - 1)$. Or $\deg F_\ell \geq 0$ (théorème 20), et $\deg F_\ell > 0$ si $\text{Var } f > 0$ (théorème 21) pour ℓ grand. Choisissons un tel $\ell = ba$. Alors

$\dim H^0(V, \omega_{V/W}^{ba}) \geq (br(ba)/r(a)) \deg F_a + r(ba)(1 - \text{genre } W)$ où le deuxième membre de l'inégalité croît comme un polynôme en b^3 si $\text{Var } f \neq 0$, ce qui donne $C_{3,1}^{+1}$ dans ce cas. Si $\text{Var } f = 0$, il n'y a rien à démontrer. Donc

THÉORÈME 22 [11].— $C_{3,1}^{+1}$ est vrai si $\kappa(F) = 2$.

Dans le cas d'une famille de courbes $f : V \rightarrow W$, on peut supposer que V est une désingularisation de T telle que $g : T \rightarrow W$ existe et soit un espace fibré semi-stable. En effet [26], il existe un schéma de modules grossier $\bar{M}_g$ des courbes de genre g (le genre de F est g) et une application rationnelle $W \rightarrow \bar{M}_g$ que l'on peut supposer partout définie. Un schéma de modules fin existe comme revêtement $\bar{M}_g^{(\mu)}$ de $\bar{M}_g$. On prend un revêtement W' de W tel qu'un morphisme de W' dans $\bar{M}_g^{(\mu)}$ soit défini. D'après le lemme 14, on peut supposer que W' est lisse. Le pull-back sur W' de la famille universelle sur $\bar{M}_g^{(\mu)}$ est une famille semi-stable sur W' . On applique alors le lemme 13.

Soit donc $f : V \rightarrow W$ une famille semi-stable de courbes de genre g . (Bien que V ne soit pas lisse, le calcul sur les faisceaux dualisants est le même que pour l'espace fibré obtenu par désingularisation de V , car les singularités de V sont rationnelles et de Gorenstein [30]).

THÉORÈME 23 [17].— Sous les hypothèses précédentes et si $g \geq 1$, alors $f_*^{(1)}(\bigwedge^r f_* \omega_{V/W})$ est inclus dans $\omega_{V/W}^{g(g+1)/2}$. En particulier $\kappa(V/W) \geq \kappa(\bigwedge^r f_* \omega_{V/W})^{(1)}$.

Remarque.— On construit cette inclusion par le déterminant de Wronski [5].

Il reste à démontrer que $\kappa(\bigwedge^r f_* \omega_{V/W}) \geq \text{Var } f$, ce que l'on peut faire en utilisant le domaine des périodes des fibres de f et sa construction explicite [17]-[5]. On peut le montrer aussi en utilisant la forme relative du théorème de Riemann-Roch et le théorème 21.

THÉORÈME 23 [25].— Sous les hypothèses précédentes et si $g \geq 2$, avec les notations du théorème 21, alors $f_a = (f_1^{12} \otimes I)^{a(a-1)/2} \otimes f_1$, pour un faisceau d'idéaux I dans $\mathcal{O}_W$.

Un calcul explicite montre alors qu'une puissance de f_1 contient $f_{ab}^{r(a)} \otimes f_a^{-b \cdot r(ab)}$ pour a et b grands. Donc

THÉOREME 24 [5].— $C_{n,n-1}^{+}$ est vrai si $\kappa(F) = \dim F = 1$.

Considérons maintenant un espace fibré $f : V \rightarrow W$ tel que $\dim V = 3$, $\dim W = 1$, F est soit une surface $K3$, soit une surface abélienne, ou bien $\dim V = n = \dim W + 1$ et F est une courbe elliptique. Dans tous les cas $\omega_F = \theta_F$. De même que pour le théorème 23, on peut supposer dans le dernier cas que la famille f est semi-stable et qu'elle est munie après revêtement de W d'un morphisme dans le schéma des modules des courbes elliptiques $\overline{M}_1^{(1)}$, qui est une courbe. Le calcul se ramène donc à un calcul d'une famille de courbe sur une courbe, si $\text{Var } f = 1$, qui est le seul cas à considérer. Dans les trois cas, $f_* \omega_{V/W}$ est un faisceau inversible de degré positif (strictement si $\text{Var } f \neq 0$) d'après le théorème 17 et la remarque du lemme 18. Donc $\deg f_1 \geq \text{Var } f$. Or $f_* \omega_{V/W}$ est inclus dans $\omega_{V/W}$. Ce qui donne le

THÉOREME 24 [5]-[11].— $C_{3,1}^{+}$ est vrai si F est une surface abélienne ou une surface $K3$. $C_{n,n-1}^{+}$ est vrai si F est une courbe elliptique.

Remarque.— Si F est une surface hyperelliptique ou une surface d'Enriques (voir aussi plus bas), on peut se ramener aux cas précédents par un revêtement approprié de V et des arguments du genre de ceux du corollaire 10.

Si enfin on a une famille de surfaces elliptiques sur une courbe, on peut supposer après revêtement de W que f se factorise en $g : V \rightarrow S$ et $h : S \rightarrow W$, où g est un espace fibré dont la fibre est une courbe elliptique. De $C_{3,2}^{+}$ pour g , on tire que $g_* \omega_{V/S}^a$ a une section globale pour a grand, donc une inclusion $\omega_{S/W}^a \hookrightarrow g_* \omega_{V/W}^a$. Si $\kappa(S/W) \geq 1$, on a $C_{3,1}^{+}$ dans ce cas. Sinon, $\kappa(S/W) = -\infty$ (resp. $\kappa(S/W) = 0$) et d'après $C_{2,1}^{+}$, on peut supposer que S est le produit de W et de $\mathbb{P}^1$ (resp. d'une courbe elliptique E). On étudie alors g en comparant par un calcul peu agréable le discriminant dans S' de la réduction semi-stable $g' : V' \rightarrow S'$ de g , avec $g'_* \omega_{V'/S'}^a$. On obtient le

THÉOREME 25 [11].— $C_{3,1}^{+}$ est vrai si F est une surface elliptique.

Ceci épuise tous les cas de la conjecture d'Iitaka, façon forte, utiles à la démonstration des tableaux de classification (§ 1).

§ 9. Quelques questions

1) Bien-sûr, C_{nm} et C_{nm}^{+} . Pour l'étude de l'application d'Albanese, il suffirait (résultats 12-3) et corollaire 10) de connaître C_{nm} lorsque W est birationnelle à $A(W)$.

2) A propos des points d'interrogation du théorème 1.

a) Si $\dim V = \kappa(V)$, l'anneau $R(V)$ est-il de type fini ?

b) Si $\kappa(V) = 0$ et $\dim V = n$, a-t-on $\dim H^0(V, \Omega_V^k) \leq \binom{n}{k}$? [12]. Ceci est vrai comme conséquence du théorème 1 si $\dim V = 3$ et $q(V) \geq 1$ et comme consé-

quence du théorème 2 si V est birationnelle à sa variété d'Albanese ou si $q(V) = \dim V - 1$.

c) Si $\kappa(V) = -\infty$, est-il vrai que pour tout faisceau inversible L , il existe N tel que pour tout $m \geq N$ on ait $H^0(V, L \otimes \omega_V^m) = 0$? Cette question est connue sous le terme "Adjonction terminates". La réponse est positive si $\dim V = 3$ et $q(V) \geq 1$ comme conséquence du théorème 1.

Addendum - Octobre 1981

Depuis Février, les résultats 12 ont été agrandis de plusieurs contributions.

Dans une nouvelle version de [14], Y. Kawamata termine la démonstration de $C_{n,1}$. Par ailleurs, il prouve $C_{n,n-2}$ lorsque F est une surface elliptique et C_{nm}^+ lorsque $\omega_F^\ell = \sigma_F$ pour un $\ell > 0$.

De son côté, E. Viehweg réduit la démonstration de C_{nm}^+ à celle de l'inégalité $\kappa(W, \det f_* \omega_{V/W}^\ell) \geq \text{Var } f$ pour un $\ell > 0$. Quant à cette dernière inégalité, elle est vérifiée comme conséquence des théorèmes 20 et 21 lorsque F est une surface de type général.

On obtient ainsi $C_{n,n-2}$ et C_{nm} pour $n \leq 4$.

On peut alors, en appliquant la même méthode de démonstration que dans le § 5, compléter le théorème 2.

(iv) Si $q(V) = 1$ et $\kappa(V) = 0$, alors α a une fibre F telle que $\kappa(F) = 0$.

(v) Si $q(V) = \dim V - 2$ et $\kappa(V) = 0$, alors α est un fibré étale de fibre F telle que $\kappa(F) = 0$.

De plus, si $\dim V \leq 4$ et $\kappa(V) = -\infty$, alors la factorisation de Stein de α a une fibre F telle que $\kappa(F) = -\infty$.

Pour plus de précisions sur ces derniers développements (et aussi pour une démonstration plus lisible du § 5, point 3), voir dans les "Proceedings of the symposia on algebraic varieties and analytic varieties, Tokyo 7/81", à paraître chez Kinokuniya et North Holland, les articles des deux auteurs pré-cités et la bibliographie correspondante.

BIBLIOGRAPHIE

- [0] M. NOETHER - *Mentre le curve algebriche sono create da Dio, le superficie invece sono opera del Demonio*, Cité par F. Enriques, *Superficie Algebriche*, 1949, 464.

A) Théorie de la classification - Ordre chronologique

- [1] S. IITAKA - *On D-dimensions of algebraic varieties*, J. Math. Soc. Japan 23(1971).
- [2] S. IITAKA - *Genera and classification of algebraic varieties I* (en japonais), Sugaku 24(1972), 14-27.

Dans ces deux articles, S. Iitaka introduit les dimensions de Kodaira, démontre les théorèmes 3 et 4 et formule la conjecture C_{nm} ainsi que le premier programme de classification.

- [3] K. UENO - *Classification Theory of Algebraic Varieties and Compact Complex Spaces*, Springer Lecture Notes 620.
Oeuvre de référence. Démonstration des théorèmes 5 et 6.
- [4] K. UENO - *Kodaira dimension of certain fibre spaces*, Complex Analysis and Algebraic Geometry, 279-292, Iwanami (1977).
Première démonstration de $C_{2,1}$ sans utiliser la classification des surfaces.
- [5] E. VIEHWEG - *Canonical divisors and the additivity of the Kodaira dimension for morphisms of relative dimension one*, Comp. Math. 35(1977), 197-233.
Démonstration de $C_{n,n-1}^+$.
- [6] T. FUJITA - *On Kähler fibre spaces over curves*, J. Math. Soc. Japan 30(1978), 779-794.
- [7] T. FUJITA - *The sheaf of relative canonical forms of a Kähler fibre space over a curve*, Proc. Japan Acad. 54(1978), 183-184.
Première utilisation de la théorie de Hodge pour un espace fibré f tel que f ne soit pas lisse. Démonstration des lemme 18 et théorème 17 lorsque $\dim W = 1$.
Démonstration du théorème 24.
- [8] K. UENO - *Classification of algebraic varieties II - Algebraic threefolds of parabolic type*, Int. Symp. on Alg. Geom. Kyoto (1977), 693-708.
Démonstration des théorèmes 7 et 8 lorsque $\dim W \leq 3$. Démonstration de quelques points du théorème 1.
- [9] K. UENO - *On algebraic fibre spaces of abelian varieties*, Math. Ann. 237(1978), 1-22.
Démonstration de C_{nm}^+ lorsque F est une variété abélienne.

- [10] Y. KAWAMATA, E. VIEHWEG - *On a characterization of an abelian variety in the classification theory of algebraic varieties*, Comp. Math. 41(1980), 355-359.
Démonstration des théorèmes 7 et 8.
- [11] E. VIEHWEG - *Klassifikationstheorie algebraischer Varietäten der Dimension drei*, Comp. Math. 41(1980), 361-400.
Démonstration de $C_{3,1}^+$ et autre démonstration de $C_{n,n-1}^+$. Démonstration complète du théorème 1.
- [12] K. UENO - *Birational geometry of algebraic threefolds*, Géométrie algébrique, Angers (1979), 311-323.
Exemples de classes de variétés sans modèle minimal. Calcul de $\dim H^0(V, \Omega_V^2)$ lorsque $\kappa(V) = 0$ et $q(V) \geq 1$. Discussion de problèmes ouverts.
- [13] Y. KAWAMATA - *Characterization of abelian varieties*, Manuscrit.
Démonstration des théorèmes 2 et 17. Démonstration de C_{nm} lorsque $\kappa(W) = \dim W$ et $\kappa(V) \geq 0$.
- [14] Y. KAWAMATA - *Kodaira dimension of algebraic fibre spaces over curves*, Manuscrit 2ème version.
Démonstration de quelques cas de $C_{n,1}$.
- [15] E. VIEHWEG - *Die Additivität der Kodaira Dimension für projektive Faserraume über Varietäten des allgemeinen Typs*, Manuscrit. A paraître dans Journal für die reine und ungewandte Mathematik.
Démonstration de C_{nm} lorsque $\kappa(W) = \dim W$ en utilisant [13].
- [16] K. UENO - *On three-dimensional compact complex manifolds with non-positive Kodaira dimension*, Manuscrit.
Recherche de variétés complexes non algébriques V telles que $\kappa(V) \leq 0$.

B) Références concernant les méthodes utilisées

- [17] S. Ju. ARAKELOV - *Families of algebraic curves with fixed degeneracies*, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math. 35(1971) - Math. USSR Izv. 5(1971), 1277-1302.
- [18] M.F. ATIYAH - *Vector bundles over an elliptic curve*, Proc. London Math. Soc. (3), 7(1957), 414-452.
- [19] S. BLOCH and D. GIESEKER - *The positivity of the Chern classes of an ample vector bundle*, Inventiones Math. 12(1971), 112-117.
- [20] P. DELIGNE - *Théorie de Hodge II*, Publ. Math. I.H.E.S. 40(1971), 5-58.
- [21] D. GIESEKER - *Global moduli for surfaces of general type*, Inventiones Math. 43(1977), 233-282.
- [22] P. GRIFFITHS - *Period of integrals on algebraic manifolds III*, Publ. Math. I.H.E.S. 38(1970), 125-180.

- [23] D. LIEBERMAN and E. SERNESI - *Semicontinuity of L-dimension*, Math. Ann. 225(1977), 77-88.
- [24] D. MUMFORD - *Geometric Invariant Theory*, Springer 1965.
- [25] D. MUMFORD - *Stability of projective varieties*, L'Enseignement Math. 23(1977).
- [26] H. POPP - *On moduli of algebraic varieties III. Fine moduli spaces*, Comp. Math. 31(1975), 237-258.
- [27] M. RAYNAUD - *Flat modules in algebraic geometry*, Comp. Math. 24(1972), 11-13.
- [28] F. SAKAI - *Kodaira dimension of complements of divisors*, Complex Analysis and Algebraic Geometry, 1977, Iwanami, 239-257.
- [29] W. SCHMID - *Variation of Hodge structure : The singularities of the period mapping*, Inventiones Math. 22(1973), 211-319.
- [30] E. VIEHWEG - *Rational singularities of higher dimensional schemes*, Proc. of the A.M.S. 63(1977), 6-8.

Hélène ESNAULT
 Université de Paris VII
 U.E.R. de Mathématiques
 Tour 45-55 - 5e étage
 2 Place Jussieu
 F-75251 PARIS CEDEX 05