SÉMINAIRE N. BOURBAKI

B. BEAUZAMY

Sous-espaces invariants dans les espaces de Banach

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. nº 549, p. 95-111
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1979-1980__22__95_0>

SOUS-ESPACES INVARIANTS DANS LES ESPACES DE BANACH

★ ☆ ★

PAR B. BEAUZAMY

★ ☆ ★

Si E est un espace de Banach complexe et T un opérateur (linéaire continu) de E dans lui-même, un sous-espace vectoriel fermé F de E est dit *invariant* par T si $TF \subset F$; il est *hyper-invariant* par T s'il est aussi invariant par tous les opérateurs qui commutent avec T. Il est *non-trivial* s'il est différent de $\{0\}$ et de E.

Le problème de la recherche, pour un opérateur T donné, de ses sous-espaces invariants non triviaux (en abrégé S.I.N.T.) est très ancien : c'est la question la plus naturelle que l'on puisse se poser si l'on cherche à étendre aux espaces de dimension infinie les théorèmes sur l'existence de valeurs propres et vecteurs propres en dimension finie. La recherche de valeurs propres et vecteurs propres est elle-même en général sans espoir : même l'opérateur le plus simple, le shift sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ défini par $Te_n = e_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, n'en a pas.

Si E n'est pas séparable, la question ne présente pas de difficulté, puisque, pour tout point $x \neq 0$ de E, l'espace $F_x = \overline{\text{span}}\,\{x, Tx, \ldots, T^n x, \ldots\}$ est un S.I.N.T. .

En revanche, si E est un espace de Hilbert séparable, la question n'est pas résolue dans sa généralité. Néanmoins, on a pu établir l'existence de S.I.N.T. pour de très nombreuses classes d'opérateurs ; c'est l'ensemble de ces résultats que nous allons maintenant passer en revue.

Nous les rangerons en deux groupes, faisant l'objet des deux premiers paragraphes, suivant la nature des techniques employées, mais aussi selon la nature des S.I. obtenus : les résultats obtenus par des techniques de compacité, et ceux qui utilisent un calcul fonctionnel. Il faut noter que l'un de ceux-ci (dû à J. Wermer) a déjà été exposé au Séminaire Bourbaki [16] en 1953. Ce nouvel épisode permettra donc de mesurer les progrès accomplis au cours de ces vingt six années.

Si E est un espace de Banach séparable, la question posée a, bien évidemment, aussi un sens, et bon nombre des résultats dont nous parlerons y sont également vrais. Mais il faut noter, dans ce cadre plus vaste, l'existence d'un contre-exemple, construit par P. Enflo : un espace de Banach séparable et un opérateur T sur E sans S.I.N.T. . Ceci fera l'objet de notre troisième paragraphe.

I. SOUS-ESPACES INVARIANTS OBTENUS PAR DES TECHNIQUES DE COMPACITÉ

C'est dans cette direction que l'on trouve les résultats les plus anciens : Von Neumann (non publié) et Aronzajn-Smith (1954) : tout opérateur compact, défini sur un espace de Banach, a un S.I.N.T. .

Le résultat le plus remarquable fut obtenu par Lomonossov [15] en 1973 : sur un espace de Banach, tout opérateur (différent d'un multiple de l'identité) qui commute avec un opérateur compact (non nul) a un sous-espace hyper-invariant non trivial (en abrégé S.H.N.T.). La démonstration de ce résultat, qui utilise un théorème de point fixe, est d'une simplicité surprenante ; nous allons donner les grandes lignes d'une version simplifiée.

THÉORÈME (Lomonossov [15]). - *Si* T *est un opérateur compact non nul sur un espace de Banach* E, *il existe un sous-espace fermé non trivial invariant par tous les opérateurs qui commutent avec* T.

Démonstration. - On peut se placer dans le cas où T n'a pas de vecteur propre, car s'il existe $x \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $Tx = \lambda x$, le sous-espace $F = \{z, Tz = \lambda z\}$ est non-trivial et invariant par tout opérateur qui commute avec T.

Il existe un point $x_o \in E$ tel que $\inf\limits_{x \in B(x_o;1)} \|Tx\| > 0$ (en effet, on choisit un point x_1 tel que $Tx_1 \neq 0$, et on fait une homothétie) ; notons $B = B(x_o;1)$ (boule fermée) et $\overset{\circ}{B}$ la boule ouverte, soit TB l'image de B et $\overline{TB}$ son adhérence. Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre des opérateurs qui commutent avec T. Nous allons montrer qu'il existe un point $y_o \in E$, $y_o \neq 0$, tel que $\forall T_1 \in \mathcal{A}$, $\|T_1 y_o - x_o\| \geq 1$: ceci démontrera le théorème, car l'e.v. G engendré par les $T_1 y_o$, $T_1 \in \mathcal{A}$ est hyper-invariant pour T, et comme il ne rencontre pas $\overset{\circ}{B}$, son adhérence ne peut être E tout entier.

Supposons au contraire que $\forall y \neq 0$, $\exists T_1 \in \mathcal{A}$, tel que $\|T_1 y - x_o\| < 1$. Puisque $\overline{TB}$ est compact, on peut trouver un nombre fini d'opérateurs $T_1 \ldots T_n \in \mathcal{A}$ tels que $\forall y \in \overline{TB}$, $\exists i \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $\|T_i y - x_o\| < 1$.

Posons $f(t) = 1-t$ si $0 \leq t \leq 1$, 0 sinon, et soit $\Phi : \overline{TB} \to E$ défini par :

$$\Phi(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(\|T_i y - x_o\|) T_i y}{\sum_{i=1}^{n} f(\|T_i y - x_o\|)} .$$

C'est une fonction continue sur le compact $\overline{TB}$, donc d'image compacte. Cette image est une combinaison convexe de ceux des $T_i y$ qui sont dans la boule B, elle est donc contenue dans cette boule.

La composée $\Phi \circ T$ transforme donc continûment B en un ensemble relativement compact contenu dans B. Si K est l'enveloppe convexe de l'adhérence de cet ensemble, K est compact, et $\Phi \circ T$ est continue de K dans K, et donc a un point fixe x. Il en résulte que :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_i \circ T(x) = x,$$

$$\text{avec} \qquad \alpha_i = \frac{f(\|T_i x - x_o\|)}{\sum_{i=1}^{n} f(\|T_i x - x_o\|)}$$

Si maintenant $H = \{z, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_i \circ T(z) = z\}$, c'est un s.e.v. non réduit à $\{0\}$, de dimension finie, car $\Sigma\alpha_i T_i \circ T$ est compact, et invariant par T. Donc T a un vecteur propre, ce qui contredit l'hypothèse.

La technique de Lomonossov a été reprise par de nombreux auteurs, qui ont donné des extensions de ce résultat, tout en conservant les mêmes idées. Mentionnons principalement :

- Kim - Pearcy - Shields [13] (1976) :

  S'il existe un opérateur compact non nul tel que $\dim \mathrm{Im}(TK-KT) \leqslant 1$, T a un S.H.N.T.

Il faut noter à cet égard que $\dim \mathrm{Im}(TK-KT) \leqslant 2$ n'est pas une restriction sur T : c'est évident si l'on prend pour K une projection sur un s.e.v. de dimension 1, mais on peut même, $\forall k \in \mathbb{N}$, trouver un opérateur compact K avec $\dim \mathrm{Im}K \geqslant k$, satisfaisant cette condition.

- C.K. Fong - Nordgren - Radjabalipour - Radjavi - Rosenthal [12] (1979) :

  Si $\mathscr{A}$ est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{L}(E)$ et s'il existe deux opérateurs compacts non nuls K_1 et K_2 tels que

  (2) $\mathscr{A} K_1 \subset K_2 \mathscr{A}$

  alors $\mathscr{A}$ a un sous-espace invariant non trivial et son commutant aussi.

La condition (2) signifie simplement que $\forall A \in \mathscr{A}$, $\exists B \in \mathscr{A}$ tel que $AK_1 = K_2 B$; elle n'implique pas la commutation d'un quelconque élément de $\mathscr{A}$ avec un opérateur compact.

Le théorème de Lomonossov et ses dérivés assurent donc l'existence de S.I.N.T. pour de larges classes d'opérateurs (on ne sait pas, en vérité, bien mesurer l'étendue de ces classes ; en particulier on ne connaît pas d'exemple d'opérateur sur un Hilbert qui "échappe" au théorème de Lomonossov). Mais le critère n'est pas aisément vérifiable dans la pratique : il n'est pas facile de voir si un opérateur commute avec un opérateur qui commute avec un opérateur compact ! On est donc amené à utiliser des hypothèses portant plus directement sur l'opérateur.

Avant d'aborder celles-ci, nous allons mentionner un concept (introduit par P. Halmos) qui a permis d'obtenir une réduction du problème général et qui, par ailleurs, a été à la base de nombreux résultats de la théorie des opérateurs.

Un opérateur T, défini sur un espace de Banach E, est dit quasi-triangulaire s'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de projections de rang fini, convergeant vers l'identité (i.e. $\forall x \in E,\ P_n x \to x$), telle que

$$\|P_n T P_n - T P_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Dans un espace de Hilbert, un théorème d'Apostol - Foiaş - Voiculescu [1] montre qu'on peut se restreindre, pour la recherche de S.I.N.T., aux opérateurs quasi-triangulaires : si T n'est pas quasi-triangulaire son adjoint T^* a en effet une valeur propre ; l'orthogonal du sous-espace propre est alors invariant par T.

Ce concept, introduit initialement en vue de la recherche de sous-espaces invariants, s'est révélé fructueux pour l'étude générale des opérateurs (c'est d'ailleurs le cas pour la plupart des idées utilisées dans les théorèmes que nous mentionnons, mais, vu le thème de cet exposé, nous nous limiterons à cet exemple). Il a en effet permis à Apostol - Foiaş - Voiculescu [2] de décrire les opérateurs qui sont limites d'une suite d'opérateurs nihilpotents.

Soit H un espace de Hilbert (séparable, complexe) ; le spectre essentiel $\sigma_{ess}(T)$ est le spectre de T dans l'algèbre de Calkin $\mathcal{L}(H)/\mathcal{K}(H)$ des opérateurs bornés modulo les opérateurs compacts.

<u>THÉORÈME</u> (Apostol - Foiaş - Voiculescu [2]). - *Soit* T *un opérateur sur* H *; il est limite en norme d'une suite d'opérateurs nihilpotents si et seulement si les conditions suivantes sont simultanément satisfaites :*

a) T *et* T^* *sont quasi-triangulaires ;*

b) $\sigma(T)$ *et* $\sigma_{ess}(T)$ *sont connexes ;*

c) $0 \in \sigma_{ess}(T)$.

Ce théorème admet une autre formulation, utilisant une description de la quasi-triangularité démontrée par les mêmes auteurs :

Un opérateur T est *semi-Fredholm* si T est d'image fermée et si, ou bien dim Ker $T < \infty$, ou bien codim Im$T < \infty$. L'indice $i(T)$ est alors défini par $i(T) = \dim \operatorname{Ker} T - \operatorname{codim} \operatorname{Im}(T)$ (il peut être $+\infty$ ou $-\infty$).

<u>THÉORÈME</u> (Apostol - Foiaş - Voiculescu [1]). - *T et* T^* *sont quasi-triangulaires si et seulement si, pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $T-\lambda I$ *soit semi-Fredholm,* $i(T-\lambda I) = 0$.

II. CALCUL FONCTIONNEL

Sous sa forme la plus simple, l'idée est la suivante : on fait sur l'opérateur T des hypothèses permettant, pour une certaine fonction f, de définir l'opérateur f(T) ; on déduit alors l'existence de S.I.N.T. des propriétés de la fonction f. Ces techniques ont été beaucoup développées ces dernières années ; elles permettent de donner des énoncés positifs sous des hypothèses assez variées, que nous rangerons en plusieurs groupes ; nous renvoyons à Bourbaki [6] pour un exposé plus complet sur les calculs fonctionnels.

1° *Hypothèses portant sur la configuration du spectre* $\sigma(T)$.

Le résultat le plus ancien dans cette direction est celui de F. Riesz (1913) : si le spectre σ est réunion de deux fermés disjoints σ_1 et σ_2, T a deux S.I.N.T. F_1 et F_2, et $\sigma(T|_{F_1}) = \sigma_1$, $\sigma(T|_{F_2}) = \sigma_2$.

Le calcul fonctionnel utilisé est un calcul holomorphe : si U est un ouvert contenant σ, limité par une courbe $\mathscr{C}$, on peut donner un sens à

$$f(T) = \int_{\mathscr{C}} f(z)(zI-T)^{-1} dz,$$

pour toute fonction f analytique dans U ; l'opérateur ainsi obtenu commute avec T.

Si σ est constitué de deux morceaux disjoints σ_1 et σ_2, soient U_1 et U_2 deux ouverts disjoints contenant respectivement σ_1 et σ_2 ; soit f_1 valant 1 sur U_1 et 0 sur U_2 et f_2 l'inverse. On obtient à partir de la formule de définition $f_1(T) + f_2(T) = I$, $(f_1(T))^2 = f_1(T)$, $(f_2(T))^2 = f_2(T)$; $f_1(T)$ et

$f_2(T)$ sont donc des projections ; leurs images sont les sous-espaces invariants cherchés.

L'un des résultats les plus récents dans cette direction est celui de Brown - Chevreau - Pearcy [8] (1979), pour les opérateurs définis sur l'espace de Hilbert :

Si $T \in \mathcal{L}(H)$ et $\|T\| = 1$, et si l'ensemble $M = \sigma(T) \cap \{|z| < 1\}$ est assez grand pour que $\forall h \in H^\infty$, $\sup\limits_{\lambda \in M} |\widetilde{h}(\lambda)| = \|h\|_\infty$, T admet un S.I.N.T.

(Rappelons que $H^\infty = L^\infty \cap H^2$, et si $h(\theta) = \sum\limits_{o}^{\infty} h_n e^{in\theta} \in H^2$, $\widetilde{h}(z) = \sum\limits_{o}^{\infty} h_n z^n$).

Ce résultat s'applique en particulier aux contractions dont le spectre est le disque fermé tout entier, ou contient une couronne $\{1-\varepsilon \leqslant |z| \leqslant 1\}$, ou même contient le cercle unité plus une spirale qui y est tangente.

Là aussi, on utilise un calcul fonctionnel, celui de Nagy-Foiaş [17] : pour tout $h \in H^\infty$, si $h = \sum\limits_{o}^{\infty} h_n e^{in\theta}$, on définit $h(T) = \lim\limits_{r \to 1} \sum\limits_{o}^{\infty} r^n h_n T^n$.

On met en évidence deux vecteurs $x,y \in H$ tels que $\forall h \in H^\infty$, on ait : $\widetilde{h}(0) = \langle h(T)x, y \rangle$. Prenant $h=1$, on voit que x et y sont différents de 0 ; prenant $h(\theta) = e^{in\theta}$, on obtient $\langle T^{n+1}x,y \rangle = 0 \quad \forall n$, d'où résulte immédiatement l'existence d'un S.I.N.T. .

Ce théorème, à la différence de deux que nous allons maintenant aborder, ne s'applique pas au shift usuel ("shift bilatéral") sur $\ell^2(\mathbb{Z})$, dont le spectre est le cercle unité. Il est intéressant de voir quels sont les sous-espaces invariants de ce shift (que l'on peut aussi considérer comme l'opérateur de multiplication par $e^{i\theta}$ sur $L^2(\mathbb{T})$).

Soit T l'opérateur de multiplication par $e^{i\theta}$ dans $L^2(\mathbb{T})$; les S.I.N.T. F de T sont de deux types :

- ou bien il existe un ensemble E de mesure positive contenu dans $\mathbb{T}$ tel que $F = \{f \in L^2,\ f=0 \text{ sur } E\}$,
- ou bien il existe une fonction $m \in L^2$, avec $|m| = 1$, telle que $F = m.H^2$.

Le premier cas se produit si F est aussi invariant par T^{-1}, sinon c'est le second.

Si $f \in L^2$ s'annule sur un ensemble de mesure positive, l'e.v. $\overline{\mathrm{span}}\{f, Tf, T^2f, \dots\}$ est un S.I.N.T. du premier type ; si $f \in L^2$ vérifie $\int_{-\pi}^{\pi} \log |f(\theta)| d\theta > -\infty$, cet e.v. est un S.I.N.T. du second type (c'est une conséquence du théorème de Szegö). Si aucune de ces conditions n'est remplie, $\overline{\mathrm{span}}\{f, Tf, \dots\}$ est l'espace tout entier ; f est alors cyclique.

Les calculs fonctionnels développés ci-après permettront, selon le cas, de trouver l'un ou l'autre de ces deux types de S.I.N.T. lorsqu'ils seront appliqués à cet opérateur.

2° *Hypothèses sur la croissance des itérés ; contractions de classe* C_1.

C'est une idée naturelle que de tenter de classifier les opérateurs par le comportement des itérés $T^n x$, ou des normes $\|T^n\|$, ou $\|T^{-n}\|$ lorsque T^{-1} existe. Les hypothèses que l'on est ainsi amené à faire ont le mérite d'être de vérification facile.

L'un des premiers résultats dans cette direction est celui de J. Wermer [18] (1953), exposé par R. Pallu de la Barrière au Séminaire Bourbaki de décembre 1953 : si T est un opérateur inversible dont le spectre n'est pas réduit à un point, et si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\log\|T^n\|}{1+n^2} < \infty$, T a un S.H.N.T.

Si le spectre de T est réduit à un point, c'est seulement très récemment (1979) que A. Atzmon a démontré [2] que le résultat subsistait ; il a toutefois été amené à faire l'hypothèse plus forte $\|T^n\| \leqslant Ce^{\sqrt{|n|}}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Un autre type d'hypothèses, portant à la fois sur la configuration du spectre et sur des estimations de croissance, est celui étudié notamment par Ljubic et Macaev [14] . Il consiste à supposer que le spectre $\sigma(T)$ contient un arc de Jordan exposé $\mathscr{C}$ (c'est-à-dire un arc suffisamment régulier tel qu'il existe un disque ouvert D avec $\sigma(T) \cap D = \mathscr{C}$) et qu'en tout point z_0 de $\mathscr{C}$, sur tout segment fermé qui rencontre $\sigma(T)$ en z_0 seulement, on a une estimation sur la résolvante $(z-T)^{-1}$. On peut alors conclure à l'existence de S.H.N.T.

Une classe dont l'introduction est naturelle et qui a été étudiée depuis fort longtemps est celle des contractions de classe $C_1.$ (cette terminologie est due à Nagy - Foias, 1964), c'est-à-dire des opérateurs de norme 1 tels que, pour tout $x \in E$, $T^n x \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$. Même pour cette classe, même sur l'espace de Hilbert, même pour un isomorphisme, l'existence de S.I.N.T. n'est pas connue. En 1965, Colojoară et Foiaş [9] ont démontré que si E était réflexif, et si T et ${}^tT$ étaient de classe $C_1.$ dans E et E' respectivement, T avait un S.H.N.T. Le résultat de J. Wermer impliquait l'existence d'un S.H.N.T., pour les contraction de classe $C_1.$, si $\sum_{n \geq 0} \frac{\log \|T^n\|}{1+n^2} < \infty$. Très récemment (1979), il a été démontré par l'auteur [4] l'existence de S.H.N.T. pour ces contractions dès que, pour un certain point $z \in E$, $z \neq 0$, on avait $\|T^{-n}z\| \leq \rho_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, où ρ_n est une suite croissante vérifiant $\sum_{n \geq 0} \frac{\log \rho_n}{1+n^2} < \infty$. Les hypothèses ne portent donc plus sur les $\|T^{-n}\|$, mais sur les itérés d'un point, ce qui est plus faible, et le résultat contient tous ceux précédemment connus. Comme eux, il utilise en calcul fonctionnel, mais de nature différente : on met en évidence, dans $\mathscr{A}(\mathbb{T})$ (fonctions dont la série de Fourier est absolument sommable) deux fonctions f et g à supports disjoints, telles que si $f = \sum a_k e^{ik\theta}$, $g = \sum b_j e^{ij\theta}$, et si l'on pose $h_n(T) = \sum_{k \geq -n} a_k T^{k+n}$, $p_m(T) = \sum_{j \geq -m} b_j T^{j+m}$, on ait, pour certains points x_o, x_1, y, tous $\neq 0$ dans E,

$$T^{-m} p_m(T) x_o \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} y \neq 0 \in E, \quad h_n(T) x_1 \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0, \text{ tandis que } h_n(T) y \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Il est alors clair que $\{z \; ; \; h_n(T) z \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0\}$ est un S.H.N.T.

L'existence des fonctions f et g repose sur certains théorèmes concernant les Algèbres de Beurling non quasi-analytiques.

3° *Résultats pour certaines classes d'opérateurs sur les espaces de Hilbert reliées aux opérateurs normaux.*

Pour les opérateurs normaux eux-mêmes (opérateurs qui commutent avec leur adjoint) les résultats sont très anciens (Hilbert, F. Riesz, Von Neumann) et reposent sur deux théorèmes : tout opérateur normal est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication par une fonction $\Phi \in L^\infty$, sur un espace (Ω, μ), où μ est une mesure finie (c'est-à-dire :

$\exists$U, unitaire, tel que $T = U M_\Phi U^{-1}$, où M_Φ est l'opérateur de multiplication par Φ de L^2 dans lui-même), et l'existence de mesures spectrales. Donnons les grandes lignes de cette dernière théorie, qui a inspiré de nombreux développements, renvoyant à Bourbaki [6] pour l'étude de ces mesures spectrales.

Si H est un Hilbert séparable, une mesure spectrale E est une application des boréliens du plan complexe dans le sous-ensemble de $\mathcal{L}(H)$ constitué des projections, vérifiant :

- $E(\mathbb{C}) = Id$,
- E est dénombrablement additive (si B_n sont deux à deux disjoints, $E(\cup B_n) = \Sigma\, EB_n$; série convergeant pour la norme),
- E est à support compact.

Si E est une mesure spectrale, $\forall x, y \in H$, $\mu(B) = \langle E(B)x,y \rangle$ est une mesure sur les boréliens de $\mathbb{C}$; on note $\int f(\lambda)d(E_\lambda x,y)$ l'intégrale d'une fonction f par rapport à cette mesure.

Le théorème essentiel dit que si T est un opérateur normal, il existe une unique mesure spectrale E telle que $\forall x, y \in H$,

$$\langle Tx,y \rangle = \int \lambda \, d(E_\lambda x,y).$$

Il en résulte que si f est une fonction borélienne bornée sur $\sigma(T)$, on peut définir f(T) par

$$\langle f(T)x,y \rangle = \int f(\lambda)d(E_\lambda x,y) \;;$$

l'application $f \to f(T)$ ainsi définie est un homomorphisme d'algèbres.

Il est aisé d'en déduire l'existence de S.H.N.T. pour l'opérateur T : on montre que $\sigma(T)$ n'est pas réduit à un point ; on prend pour f la fonction caractéristique d'un sous-ensemble strict de $\sigma(T)$; l'opérateur f(T) est alors une projection, et on vérifie que son image est un sous-espace hyper-invariant pour T.

Un opérateur T sur l'espace de Hilbert H est dit *hyponormal* si $A = T^*T - TT^*$ est un opérateur positif (c'est-à-dire $\langle Ax, x \rangle \geqslant 0$, $\forall x \in H$).

On ne sait pas si tout opérateur hyponormal a un S.I.N.T., néanmoins C.A. Berger a démontré récemment (1978) [5] que si T est hyponormal, on peut trouver $n_o \in \mathbb{N}$ tel que toutes les puissances T^n $(n \geqslant n_o)$ aient des S.I.N.T. . Ceci ne résout pas le problème pour T car on ne sait pas si le fait que T^2 ait un S.I.N.T. implique le même résultat pour T. Mentionnons à ce propos un problème ouvert du même ordre : si T est inversible et si T^{-1} a un S.I.N.T., en est-il de même pour T ?

Une autre extension de la notion de normalité, qui a donné lieu à des recherches fort anciennes, est la suivante : si T est un opérateur normal sur H et si F est un S.I.N.T. pour T, la restriction de T à F n'est plus nécessairement un opérateur normal : on l'appelle opérateur sous-normal ; l'exemple caractéristique est celui du shift sur $\ell^2(\mathbb{N})$, restriction du shift sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. Cette notion a été introduite par Halmos en 1950 ; elle correspond à la remarque suivante : les théorèmes sur les opérateurs normaux permettent d'obtenir un S.I.N.T., mais pas une chaîne de S.I.N.T. emboîtés, puisqu'on ne peut pas recommencer.

Les premiers résultats sur les opérateurs sous-normaux ont été obtenus vers 1955 (Bram, Wermer), mais le problème n'a été résolu que très récemment (1978) par Scott W. Brown [7] ; c'est l'un des faits les plus marquants parmi les développements récents de la recherche de S.I.N.T.

S. Brown commence par réduire le problème au cas où l'opérateur hyponormal T vérifie la condition suivante (déjà évoquée) :

l'ensemble $M = \sigma(T) \cap \{|(z)| < 1\}$ est assez grand pour que

$$\forall h \in H^\infty, \qquad \sup_{\lambda \in M} |\widetilde{h}(\lambda)| = \|h\|_\infty \quad ;$$

pour un opérateur de cette sorte, un calcul fonctionnel dans H^∞ peut être utilisé. Ce résultat, et ces techniques, ont été à la base de plusieurs travaux récents, où les hypothèses portent sur la configuration du spectre ; il a notamment précédé (et inspiré) celui de Brown - Chevreau - Pearcy que, pour des raisons de commodité d'exposition, nous avons mentionné quelques pages auparavant.

Un mélange des techniques liées à la croissance et de celles utilisées pour les opérateurs normaux a permis de traiter le cas de certaines perturbations compactes d'opérateurs normaux (le spectre de ceux-ci étant contenu dans un arc de Jordan) (voir Ljubic - Macaev [14], Dunford - Schwartz [10]).

III. LE CONTRE-EXEMPLE DE P. ENFLO

Nous allons maintenant donner une brève introduction à un travail récent de P. Enflo [11] destiné à produire un exemple d'espace de Banach et d'opérateur sur cet espace sans sous-espace invariant non trivial. Il serait difficile de donner davantage de détails, du fait de la complexité de l'exemple, mais du fait, aussi, que certains calculs n'ont pas été complètement vérifiés (ce qui oblige à certaines réserves).

L'espace de Banach sera la complétion, pour une certaine norme, des polynômes à une variable à coefficients complexes ; l'opérateur T sera la multiplication par la variable x.

Soit $(q_n, \varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une énumération des paires constituées d'un polynôme dont les coefficients ont une partie réelle et une partie imaginaire rationnelles, et d'un nombre de la forme $1/2^k$, $k \in \mathbb{N}$. On suppose cette énumération faite de telle sorte que $\forall n$, $d^\circ\, q_n \leqslant n$, et, si q est un polynôme donné, et si $n_1, \dots, n_k, \dots$ sont les indices tels que $q_{n_1} = \dots = q_{n_k} = \dots = q$, alors $\varepsilon_{n_1} > \dots > \varepsilon_{n_k} > \dots$

L'espace étant la complétion des polynômes, il est clair que le vecteur 1 est cyclique (i.e. $\overline{\mathrm{span}}\,\{1, x, x^2, \dots\} = E$). Dans un premier temps, on va s'arranger pour rendre cycliques tous les q_n (ce qui ne sera pas difficile) : on aura donc un ensemble dense de vecteurs cycliques. On s'arrangera ensuite (et c'est là la vraie difficulté) pour avoir une certaine uniformité permettant de rendre cycliques tous les vecteurs.

Soit $(\ell_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes et $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres, $C_k > 2$ $\forall k$. Pour tout polynôme p, on peut considérer les représentations de p en $p = \sum_{i,\beta} a_{i,\beta}\, x^i\, \ell_1^{\beta_1} \dots \ell_n^{\beta_n}$ (avec $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$) et définir, l'infimum portant sur ces représentations :

$$|p|_{op\ n} = \inf \{ \sum_{i,\beta} |a_{i,\beta}| 2^i (C_1 |\ell_1|_1)^{\beta_1} \dots (C_n |\ell_n|_1)^{\beta_n}$$

(en notant $|.|_1$ la norme d'un polynôme égale à la somme des modules de ses coefficients).

On obtient ainsi une suite décroissante de normes, minorée par la norme $|.|_1$; on a $|p_1 \times p_2|_{op\ n} \leqslant |p_1|_{op\ n} \times |p_2|_{op\ n}$, et

$|\ell_k|_{op\ n} \leqslant C_k |\ell_k|_1$ si $k \leqslant n$.

On va maintenant définir la suite des normes $|.|^{(k)}$. On pose $|p|^{(0)} = |p|_1$. Supposons $|.|^{(1)}, \dots, |.|^{(n-1)}$ définies. Soient $\alpha_j > 0$ tels que $|\alpha_j q_j|^{(j-1)} = 1$, pour $j = 1,\dots,n$. Pour tout polynôme p, on considère les représentations, où S_k, r sont des polynômes arbitraires :

$$p = \sum_1^n S_k(\ell_k \alpha_k q_k - 1) + r$$

et on pose :

$$|p|^{(n)} = \inf \{ \sum_1^n |S_k|_{op\ n}\ \varepsilon_k + |r|_1 \}.$$

La suite des normes $|.|^{(n)}$ est décroissante ; chacune est majorée par la norme $|.|_1$, et équivalente à celle-ci. Si p_1 et p_2 sont deux polynômes, on a $|p_1 \times p_2|^{(n)} \leqslant |p_1|_{op\ n} \cdot |p_2|^{(n)}$. Pour $k = 1,..,n$, on a :

$$|\ell_k \alpha_k q_k - 1|^{(n)} \leqslant \varepsilon_k,$$

ce qui signifie que la multiplication par ℓ_k rapproche $\alpha_k q_k$ de 1, dans la norme $|.|^n$.

Soit $\|p\| = \lim_{n \to +\infty} |p|^{(n)}$. On a donc : $\|\ell_k \alpha_k q_k - 1\| \leqslant \varepsilon_k$ $\forall k$, et chaque q_k est cyclique (chacun est répété une infinité de fois, avec une suite décroissante de ε). On va demander une uniformité sur les normes $|.|_1$ des ℓ_k qui rapprochent $\alpha_k q_k$ de 1, si $\alpha_k q_k$ est dans un voisinage d'un $\alpha_n q_n$, n fixé.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons $\{k \in \mathbb{N}$; $k \leqslant n$, $\varepsilon_k = \varepsilon_n$ et

$|\alpha_k q_k - \alpha_n q_n|^{(n-1)} < \varepsilon_n\}$. Soit $K = \text{Inf } k$. On suppose que $|\ell_n|_1$ et C_n ne dépendent que de K, plus précisément, que, une suite $(L_m)_{m \in \mathbb{N}}$ strictement croissante de réels, tendant vers $+\infty$, ayant été préalablement donnée, on a $C_n = |\ell_n|_1 = L_K$.

On va encore demander à la suite des normes $|.|^n$ d'être stationnaire à partir d'un certain rang :

$$\forall p, \quad \text{si } d^\circ p \leqslant m+1, \qquad |p|^{(m)} = |p|^{(m+1)} = \ldots.$$

(cette condition assure en particulier que la norme limite n'est pas zéro). Alors, si on a réussi à choisir la suite de polynômes ℓ_k et la suite de nombres C_k de façon à satisfaire l'hypothèse d'uniformité et l'hypothèse de stationnarité, on obtient :

THÉORÈME. - *La multiplication par* x, *dans la norme limite* $\|.\|$, *n'a pas de sous-espace invariant non trivial.*

Démonstration. - Soit $q \in E$ (complété des polynômes pour la norme $\|.\|$), avec $\|q\| = 1$. Soit ε une puissance négative fixée de 2.

On peut trouver une suite $n_k \to +\infty$ telle que $\varepsilon_{n_k} = \varepsilon$ et $q_{n_k} \to q$ dans E, donc $\|q_{n_k}\| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 1$. Mais puisque $d^\circ q_{n_k} \leqslant n_k$, on a $\|q_{n_k}\| = |q_{n_k}|^{(n_k-1)}$, donc $\alpha_{n_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 1$ (car $|\alpha_{n_k} q_{n_k}|^{(n_k-1)} = 1$) ; il en résulte que $\alpha_{n_k} q_{n_k} \to q$ dans E. Quitte à éliminer les premiers termes, on peut supposer que $\forall k$, $\|\alpha_{n_k} q_{n_k} - q\| < \varepsilon/2$.

Donc, pour $k > 1$, $\quad |\alpha_{n_k} q_{n_k} - \alpha_{n_1} q_{n_1}|^{(n_k-1)} < \varepsilon$.

D'après l'hypothèse d'uniformité, on obtient $C_{n_k} \leqslant L_{n_1}$ et $|\ell_{n_k}|_1 \leqslant L_{n_1}$. Pour calculer la norme $|\ell_{n_k}|_{\text{op } n_k}$, on peut utiliser la décomposition triviale, qui donne :

$$|\ell_{n_k}|_{\text{op } n_k} \leqslant C_{n_k} |\ell_{n_k}|_1 \leqslant (L_{n_1})^2 \qquad \forall k.$$

Posons $A = (L_{n_1})^2$.

On obtient :

$$\|\ell_{n_k} q - 1\| \leqslant \|\ell_{n_k} \alpha_{n_k} q_{n_k} - 1\| + \|\ell_{n_k}(q - \alpha_{n_k} q_{n_k})\|$$

$$\leqslant \varepsilon + A\|q - \alpha_{n_k} q_{n_k}\|.$$

Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, 1 est à distance au plus égale à ε de l'espace engendré par les itérés de q, donc appartient au s.e.v. fermé engendré par ces itérés.

Faisons pour terminer quelques remarques sur cette construction. On réalise les deux conditions demandées (uniformité - stationnarité) en prenant des polynômes ℓ_k très lacunaires, consécutifs sur les puissances de x, et avec des coefficients très petits en module.

Du fait de cette lacunarité, l'espace E construit contient un sous-espace isomorphe à ℓ^1 : si des polynômes sont situés dans les "trous" des ℓ_k, leur norme est la norme ℓ^1. Un tel contre-exemple ne peut donc pas, a priori, être construit dans un espace réflexif, ni, a fortiori, dans un espace de Hilbert.

L'opérateur de multiplication par x a pour norme 2, il n'est pas inversible. Par ailleurs $(\frac{1}{2} T)^n z \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $\forall z \in E$. La question subsiste donc, dans n'importe quel espace de Banach, de savoir si une contraction de classe $C_{1\cdot}$, a des sous-espaces invariants non triviaux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. APOSTOL, C. FOIAS, D. VOICULESCU, *Some results on non quasi-triangular operators, IV*, Revue Roumaine Math. Pures et Appl., 18 (1973), 487-514.

[2] C. APOSTOL, C. FOIAS, D. VOICULESCU, *On the norm closure of nilpotents II*, Revue Roumaine Math. Pures et Appl., 19, (1974), 549-557.

[3] A. ATZMON, *Operators which are annihilated by analytic functions and invariant subspaces*, à paraître à Acta Math.

[4] B. BEAUZAMY, *Sous-espaces invariants de type fonctionnel dans les espaces de Banach*, à paraître à Acta Math.

[5] C.A. BERGER, *Sufficiently high powers of hyponormal operators have rationally invariant subspaces*, J. of Integral Equations and Operator Theory, vol. 1, n° 3, (1978), 444-447.

[6] N. BOURBAKI, *Théories spectrales*, Hermann, Paris, 1967.

[7] S. BROWN, *Some invariant subspaces for subnormal operators*, à paraître au J. of Int. Equ. and Operator Theory.

[8] S. BROWN, B. CHEVREAU, C. PEARCY, *Contractions with rich spectrum have invariant subspaces*, J. of Operator Theory, 1 (1979), 123-136.

[9] I. COLOJOARA, C. FOIAS, *General Spectral Theory*, Gordon and Breach, 1968.

[10] N. DUNFORD, J.T. SCHWARTZ, *Linear Operators*, New-York, 1971.

[11] P. ENFLO, *On the Invariant subspace problem in Banach spaces*, à paraître.

[12] C.K. FONG, E. NORDGREN, M. RADJABALIPOUR, H. RADJAVI, P. ROSENTHAL, *Extensions of Lomonossov's invariant subspace theorem*, Acta Sc. Math. Szejed, 41 (1979), 55-62.

[13] H. KIM, C. PEARCY, A. SHIELDS, *Rank one commutators and hyperinvariant subspaces*, Michigan Math. J., 23, (1976), 235-243.

[14] J.I. LJUBIC, V.I. MACAEV, *On operators with separable spectrum*, American Math. Soc. Translations (traduit du russe) : 2-47 (1965), 89-129.