SÉMINAIRE N. BOURBAKI

DALE HUSEMOLLER

La décomposition des espaces des lacets et la torsion impaire des groupes d'homotopie

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. n° 547, p. 54-72

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1979-1980__22__54_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
32e année, 1979-80, n° 547

Novembre 1979

LA DÉCOMPOSITION DES ESPACES DES LACETS ET LA TORSION IMPAIRE DES GROUPES D'HOMOTOPIE

[d'après F. COHEN, J.C. MOORE, J. NEISENDORFER, et P. SELICK]

par Dale HUSEMOLLER

Depuis la thèse de Serre [21], nous savons que les groupes d'homotopie des sphères sont finis sauf pour deux exceptions: $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ et $\pi_{4n-1}(S^{2n}) = \mathbb{Z} + (\text{fini})$. Les résultats classiques sont $\pi_i(S^n) = 0$ si $i < n$ et $\pi_i(S^1) = 0$ si $i > 1$. La determination des p - composants $\pi_*(S^n)_{(p)}$ des groupes $\pi_*(S^n)$ a commencé avec Serre [21], [22] et la thèse de Moore [12], mais il est encore un probleme trop difficile. Toutefois, on a de bons résultats sur la hauteur de la p - torsion pour n fixe.

Le fibré de Hopf $h : S^3 \longrightarrow S^2$ de fibre S^1 fournit un isomorphisme $h_* : \pi_i(S^3) \longrightarrow \pi_i(S^2)$ si $i \geq 3$, le produit de $\Omega(h)$ et le plongement $S^1 \longrightarrow \Omega S^2$ est une équivalence d'homotopie $S^1 \times \Omega S^3 \longrightarrow \Omega S^2$. Alors $\pi_3(S^3) = \pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$, et $\pi_i(S^3) = \pi_i(S^2)$ est fini si $i \geq 4$. Nous avons aussi les résultats:

$$\pi_4(S^3) = \pi_5(S^3) = \mathbb{Z}/2, \quad \pi_6(S^3) = \mathbb{Z}/12, \quad \pi_{2p}(S^3)_{(p)} = \mathbb{Z}/p,$$
$$\text{et } \pi_i(S^3)_{(p)} = 0 \quad \text{si } i < 2p.$$

Dans le travail de James [9] et [10] et de Toda [24] on trouve la relation

$$p^2\pi_i(S^3)_{(p)} = 0 \quad \text{si } i \geq 4$$

pour tout p. Si $p = 2$, le calcul $\pi_6(S^3)_{(2)} = \mathbb{Z}/4$ montre que la hauteur de la 2 - torsion est 2^2, mais M. Barratt a conjecturé que la hauteur de la p - torsion est p si p est impair.

THÉORÈME. (Selick [20]) <u>Pour</u> p <u>impair</u> $p\pi_i(S^3)_{(p)} = 0$ <u>si</u> $i \geq 4$.

Nous ne donnons pas ici la démonstration de Selick puisque le théorème est un cas particulier des résultats qui suivent sur S^{2n+1} pour tout n. Il existe une application $\Omega S^{4n-1} \longrightarrow \Omega S^{2n}$, qui généralise $\Omega h : \Omega S^3 \longrightarrow \Omega S^2$, telle que le produit de cette application et du plongement $S^{2n-1} \longrightarrow \Omega S^{2n}$, tensorisé par $\mathbb{Z}[1/2]$,

soit une équivalence d'homotopie $S^{2n-1}[1/2] \times \Omega S^{4n-1}[1/2] \longrightarrow \Omega S^{2n}[1/2]$, voir [12], [22]. Pour p impair, il suffit alors d'étudier les groupes d'homotopie des sphères impaires et la suspension double

$$E^2 : \pi_i(S^{2n-1}) \longrightarrow \pi_i(\Omega^2 S^{2n+1}) = \pi_{i+2}(S^{2n+1})$$

induite par $S^{2n-1} \longrightarrow \Omega^2 S^{2n+1}$.

Dans le travail [24], Toda montre que l'on a la relation $p^{2n}\pi_i(S^{2n+1})_{(p)} = 0$ si $i > 2n+1$ pour tout p impair. Barratt a conjecturé que la hauteur de la p-torsion dans le groupe $\pi_i(S^{2n+1})_{(p)}$ est p^n. Cette conjecture de Barratt résulte du théorème suivant. Rappelons qu'une sphère impaire localisée en un nombre premier p impair $S^{2n-1}_{(p)}$ a une structure de H-espace. L'application $p : S^{2n-1}_{(p)} \longrightarrow S^{2n-1}_{(p)}$ est, donc, définie par $x \longmapsto x^p$.

THÉORÈME. (Cohen, Moore, et Neisendorfer [3], [4]). <u>L'application de suspension double</u> $E^2 : S^{2n-1}_{(p)} \longrightarrow \Omega^2 S^{2n+1}_{(p)}$, <u>localisée en</u> p <u>impair, a un quasi-inverse</u> $\pi : \Omega^2 S^{2n+1}_{(p)} \longrightarrow S^{2n-1}_{(p)}$ <u>tel que les composés</u> $E^2 \circ \pi = p$ <u>et</u> $\pi \circ E^2 = p$ <u>sur les</u> H - <u>espaces</u> $\Omega^2 S^{2n+1}_{(p)}$ <u>et</u> $S^{2n-1}_{(p)}$.

On a la suite des p-groupes abéliens

$$0 = \pi_j(S^1)_{(p)} \underset{\pi}{\overset{E^2}{\rightleftarrows}} \pi_{j+2}(S^3)_{(p)} \underset{\pi}{\overset{E^2}{\rightleftarrows}} \pi_{j+4}(S^5)_{(p)} \underset{\pi}{\overset{E^2}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{\pi}{\overset{E^2}{\rightleftarrows}} \pi_{j+2n}(S^{2n+1})_{(p)} \underset{\pi}{\overset{E^2}{\rightleftarrows}} \cdots$$

Par récurrence sur n, cela démontre la conjecture de Barratt

$$\boxed{p^n \pi_j(S^{2n+1})_{(p)} = 0 \quad \text{si } i > 2n+1}$$

Rappelons que $\tilde{K}(\mathbb{P}_{2n}(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2^{a(n)}$ où $2^{a(n)} = c_{2n}$ [7, p. 219-221], et aussi $a(n+4) = 4 + a(n)$, $a(0) = 0$, $a(1) = 2$, $a(2) = 3$, $a(3) = 3$, $a(4) = 4, \ldots$

CONJECTURE. - (Barratt et Mahowald)

(1) $2^{a(n)}$. Tors $\pi_*(S^{2n+1})_{(2)} = 0$, et il existe un élément d'ordre $2^{a(n)}$.

(2) $2^{a(2n-1)}$. Tors $\pi_*(S^{2n})_{(2)} = 0$, et il existe un élément d'ordre $2^{a(2n-1)}$.

§1. L'homotopie modulo q des espaces lacets

Pour étudier la torsion de l'homologie $H_*(X) = H_*(X, \mathbb{Z})$, on utilise l'homologie $H_*(X, \mathbb{Z}/q)$ avec les coefficients finis $\mathbb{Z}/q$. C'est la même chose pour l'homotopie. La $\mathbb{Z}/q$ - sphère $S^n(q)$ ou espace de Moore, voir [11] et [18], se définit comme la cofibre de l'application de degré q,

$$S^{n-1} \xrightarrow{q} S^{n-1} \longrightarrow S^n(q) = S^{n-1} \cup_q e^n \quad (n > 1).$$

Les trois auteurs emploient la notation $P^n(q)$ pour $S^n(q)$, mais cette notation est réservée pour les espaces projectifs. Notons que $S^n(q)$ est une suspension $S(S^{n-1}(q)) = S^n(q)$ si $n > 2$. Les groupes d'homotopie (absolus) sont $\pi_i(X) = [S^i, X]$ si $i \geq 1$, et les groupes d'homotopie modulo q sont $\pi_i(X, \mathbb{Z}/q) = [S^i(q), X]$ pour $i \geq 2$; la structure des groupes se définit comme la structure de la suspension sur S^i et $S^i(q)$.

Vu que $[S^n(2), S^n(2)] = \mathbb{Z}/4$ et $[S^n(q), S^n(q)] = \mathbb{Z}/q$ pour q impair, $(n \geq 4)$, nous nous limitons au cas q impair. Dans ce cas-là, le groupe $\pi_i(X, \mathbb{Z}/q)$ est un module sur l'anneau $\mathbb{Z}/q$.

Pour un espace X muni d'un point-base, décomposons l'homologie $H_*(X,R) = R \oplus \bar{H}_*(X,R)$ où $R = \mathrm{im}(H_*(*,R) \longrightarrow H_*(X,R))$ et $\bar{H}_*(X,R)$ est l'homologie réduite. Dans l'exposé, R désigne un anneau commutatif ayant un élément unité. Le composé $X \longrightarrow X \times X \longrightarrow X \wedge X$ induit un morphisme

$$\bar{H}_*(X,R) \longrightarrow \bar{H}_*(X \wedge X, R),$$

et le sous-foncteur $PH_*(X,R)$ des éléments primitifs se définit comme

$$PH_*(X,R) = \ker(\bar{H}_*(X,R) \longrightarrow \bar{H}_*(X \wedge X, R)).$$

Si $H_*(X,R)$ est R - plat, alors $\bar{H}_*(X \wedge X, R) = \bar{H}_*(X,R) \otimes \bar{H}_*(X,R)$ par le théorème de Künneth, et pour $x \in H_*(X,R)$, on a $x \in PH_*(X,R)$ si et seulement si $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, où $\Delta : H_*(X,R) \longrightarrow H_*(X,R) \otimes H_*(X,R)$ est la comultiplication sur la coalgèbre $H_*(X,R)$. Si $X = S(Y)$ est une suspension, alors $PH_*(X,R) = \bar{H}_*(X,R)$. Par exemple, $PH_*(S^n(q),R) = \bar{H}_*(S^n(q),R)$.

Choisissons un générateur $H_n(S^n(q), \mathbb{Z}/q) = \mathbb{Z}/q.i_n$, et définissons le <u>morphisme de Hurewicz</u> $\phi : \pi_n(X, \mathbb{Z}/q) \longrightarrow H_n(X, \mathbb{Z}/q)$ par la relation $\phi([u]) = u_*(i_n)$ où $u : S^n(q) \longrightarrow X$ est une application. Le générateur est compatible avec un générateur de $H_n(S^n, \mathbb{Z})$, qui est donné.

(2.1) THÉORÈME. (de Hurewicz modulo q, voir [14], [15]).- Soit X un espace 1 - connexe. Alors $\pi_i(X, \mathbb{Z}/q) = 0$ pour $i < n$ si et seulement si $\bar{H}_i(X, \mathbb{Z}/q) = 0$ pour $i < n$, et $\phi : \pi_i(X, \mathbb{Z}/q) \longrightarrow H_i(X, \mathbb{Z}/q)$ est un isomorphisme pour $i = n$ et un épimorphisme pour $i = n + 1$.

La suite cofibrée, qui définit $S^n(q)$, se prolonge à

$$S^{n-1} \xrightarrow{q} S^{n-1} \longrightarrow S^n(q) \longrightarrow S^n \xrightarrow{q} S^n,$$

et elle donne un couple exact:

$$\begin{tikzcd} \pi_*(X) \arrow[rr] & & \pi_*(X) \arrow[dl] \\ & \pi_*(X, \mathbb{Z}/q). \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Le morphisme de Hurewicz est un morphisme des couples exacts

$$\begin{tikzcd} \pi_*(X) \arrow[rr, "q"] & & \pi_*(X) \arrow[dl] & & H_*(X) \arrow[rr, "q"] & & H_*(X) \arrow[dl] \\ & \pi_*(X, \mathbb{Z}/q) \arrow[ul] \arrow[rr, "\phi"] & & & & H_*(X, \mathbb{Z}/q) \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

(2.2) Définition.- Les suites spectrales de Bockstein $E^r\pi_*(X, \mathbb{Z}/p)$ et $E^rH_*(X, \mathbb{Z}/p)$ sont les suites spectrales engendrées par les couples exacts ci-dessus. Ici p est un nombre premier $\neq 2$.

Le morphisme de Hurewicz induit un morphisme des suites spectrales $E^r\phi : E^r\pi_*(X, \mathbb{Z}/p) \longrightarrow E^rH_*(X, \mathbb{Z}/p)$.

Puisque $PH_*(S^n(q), \mathbb{Z}/q) = \bar{H}_*(S^n(q), \mathbb{Z}/q)$ le morphisme de Hurewicz est défini comme $\phi : \pi_*(X, \mathbb{Z}/q) \longrightarrow PH_*(X, \mathbb{Z}/q) \subset H_*(X, \mathbb{Z}/q)$. De même, la suite spectrale de Bockstein $E^rH_*(X, \mathbb{Z}/p)$ est une suite spectrale de coalgèbres, et le morphisme $E^r\phi$ est défini $E^r\phi : E^r\pi_*(X, \mathbb{Z}/p) \longrightarrow PE^rH_*(X, \mathbb{Z}/p) \subset E^rH_*(X, \mathbb{Z}/p)$.

Soit $\Omega X \longrightarrow EX \longrightarrow X$ le fibré des chemins, d'origine fixée, de fibre ΩX et de base X. Le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} \pi_*(\Omega X, \mathbb{Z}/q) \arrow[d, "\phi"] & \pi_*(EX, \Omega X; \mathbb{Z}/q) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \pi_*(X, *; \mathbb{Z}/q) = \pi_*(X, \mathbb{Z}/q) \arrow[d, "\phi"] \\ H_*(\Omega X, \mathbb{Z}/q) & H_*(EX, \Omega X; \mathbb{Z}/q) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[r] & H_*(X, *; \mathbb{Z}/q) = \bar{H}_*(X, \mathbb{Z}/q). \end{tikzcd}$$

Le composé $H_*(\Omega X, \mathbb{Z}/q) \xrightarrow{\partial^{-1}} H_*(EX, \Omega X; \mathbb{Z}/q) \longrightarrow \bar{H}_*(X, \mathbb{Z}/q)$ s'appelle la suspension σ. Donc le morphisme de Hurewicz ϕ de X est un composé de la suspension et du morphisme de Hurewicz ϕ de ΩX, à isomorphisme près. Alors, on aura une meilleure chance d'apercevoir l'homotopie si on regarde ϕ sur ΩX. Effectivement,

la situation est très bonne modulo la torsion.

(1.3) THÉORÈME. [11]- Soit Y un H - espace, par exemple, $Y = \Omega X$. Le morphisme de Hurewicz sur les nombres rationnels $\phi \otimes \mathbb{Q} : \pi_*(Y) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow PH_*(Y,\mathbb{Q})$ est un isomorphisme.

La multiplication des lacets $\Omega X \times \Omega X \longrightarrow \Omega X$ induit une structure d'algèbre (graduée) sur $H_*(\Omega X,R)$, et en plus, une structure d'algèbre de Lie, avec le crochet $[x,y] = xy - (-1)^{ij}yx$ si $x \in H_i(\Omega X)$, $y \in H_j(\Omega X)$. Voir (3.1) pour la définition d'algèbres de Lie graduées. En plus, $PH_*(\Omega X,R)$ est une sous-algèbre de Lie de $H_*(\Omega X,R)$ muni de $[x,y]$. Si $H_*(\Omega X,R)$ est R - plat, alors $H_*(\Omega X,R)$ est une algèbre de Hopf.

Il existe une application $\theta : S^{i+j}(q) \longrightarrow S^i(q) \wedge S^j(q)$ puisque l'espace $S^i(q) \wedge S^j(q)$ se décompose en le bouquet $S^{i+j}(q) \vee S^{i+j-1}(q)$. Si $u : S^i(q) \longrightarrow \Omega X$ et $v : S^j(q) \longrightarrow \Omega X$ sont deux applications continues, on forme le commutateur dans ΩX: $w = u.v.u^{-1}.v^{-1} : S^i(q) \wedge S^j(q) \longrightarrow \Omega X$, et le composé avec θ est un crochet $[u,v] ; S^{i+j}(q) \longrightarrow \Omega X$. Le crochet est défini sur les classes d'homotopie

$$[\ ,\ ] : \pi_i(\Omega X, \mathbb{Z}/q) \times \pi_j(\Omega X, \mathbb{Z}/q) \longrightarrow \pi_{i+j}(\Omega X, \mathbb{Z}/q),$$

et il s'appelle le crochet de Lie (ou de Samelson ou de Whitehead).

(1.4) THÉORÈME. [14], [15] - Soit q un entier premier à 6. Alors $\pi_*(\Omega X, \mathbb{Z}/q)$ est un algèbre Lie (graduée), et si $q = p$ un nombre premier, alors la suite spectrale de Bockstein $E^r\pi_*(\Omega X, \mathbb{Z}/p)$ est une suite spectrale d' algèbres de Lie. Le morphisme de Hurewicz est un morphisme d'algèbres de Lie, et si $q = p$, alors,

$$E^r\phi : E^r\pi_*(\Omega X, \mathbb{Z}/p) \longrightarrow PE^rH_*(\Omega X, \mathbb{Z}/p)$$

est un morphisme d'algèbres de Lie différentielles.

§2. Les espaces principaux et la décomposition de leurs suspensions

Soit $X \longrightarrow \Omega SX$ le plongement canonique et la suspension induite $\bar{H}_*(X,R) \longrightarrow \bar{H}_*(\Omega SX,R)$. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \bar{H}_*(X,R) \otimes H_*(\Omega SX,R) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr] & & \bar{H}_*(\Omega SX,R) \\ & \bar{H}_*(\Omega SX,R) \otimes H_*(\Omega SX,R), \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

induit par le produit sur l'algèbre $H_*(\Omega SX,R)$, définit le morphisme ψ.

(2.1) THÉORÈME. [7, p. 289] Si $H_*(X,R)$ est R - plat, alors ψ est un isomorphisme, et la suspension se prolonge à l'algèbre tensorielle

$$T(\bar{H}_*(X,R)) \longrightarrow H_*(\Omega SX,R)$$

en un isomorphisme l'algèbres. De plus, $T(\bar{H}_*(X,R))$ est muni d'une structure d'algèbre de Hopf, qui est induit par la structure de coalgèbre sur $H_*(X,R)$, et le morphisme ci-dessus est un isomorphism d'algèbres de Hopf.

(2.2) Exemples.- L'homologie $H_*(\Omega S^{m+1},R) = T(x_m)$ est l'algèbre tensorielle sur un générateur x_m de dimension m. L'homologie $H_*(\Omega S^{m+1}(p^r), \mathbb{Z}/p^r) = T(v_m,u_{m-1})$ est l'algèbre tensorielle sur deux générateurs v_m et u_{m-1}. Notons $\Delta(x_m) = x_m \otimes 1 + 1 \otimes x_m$ où x_m est un élément primitif, et où u_{m-1} et v_m sont primitifs sauf pour le cas $m = 2$ et $p^r = 2$. Si m est impaire, x_m^2 est aussi primitif, puisque $(x_m \otimes 1)(1 \otimes x_m) = -(1 \otimes x_m)(x_m \otimes 1)$ et $\Delta(x_m^2) = x_m^2 \otimes 1 + 1 \otimes x_m^2$. Donc par (1.3) le morphisme de Hurewicz rationnel est un isomorphisme

$\pi_*(\Omega S^{2n+1}) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}.x_{2n}$ et $\pi_*(\Omega S^{2n}) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}.x_{2n-1} \oplus \mathbb{Q}.x_{2n-1}^2$, et ceci implique que les $\pi_i(S^n)$ sont finis sauf pour $\pi_m(S^m) = \mathbb{Z}$ et $\pi_{4n-1}(S^{2n}) = \mathbb{Z} + (\text{fini})$.

(2.3) PROPOSITION. [7, p.292]- Il existe une décomposition

$$S(X \times Y) = S(X) \vee S(Y) \vee S(X \wedge Y)$$

à homotopie près.

Faisons le produit de $S^m \longrightarrow \Omega S^{m+1}$ k - fois avec lui-même $(S^m)^k \longrightarrow \Omega S^{m+1}$, et observons que $H_{nk}((S^m)^k) \longrightarrow H_{mk}(\Omega S^{m+1})$ est un isomorphisme. D'ailleurs, par (2.3)

$$S((S^m)^k) = S^{mk+1} \bigvee \text{ (bouquet des sphères de dim} < mk+1)$$

La suspension $S((S^m)^k) \longrightarrow S(\Omega S^{m+1})$ se restreint à $u_k : S^{mk+1} \longrightarrow S\Omega S^{m+1}$ telle que l'application sur le bouquet $u : \bigvee_{k=1} S^{mk+1} \longrightarrow S(\Omega S^{m+1})$, où $u|S^{mk+1} = u_k$,

soit un isomorphisme d'homologie.

(2.4) THÉORÈME.- <u>L'application</u> $u : \bigvee_k S^{mk+1} \longrightarrow S(\Omega S^{m+1})$ <u>est une équivalence d'homotopie</u>.

Pour le reste de cette section tout espace est localisé en un nombre premier p.

(2.5) <u>Définition</u>.- Soit $S^m\{p^r\}$ (ou $S^m\{p^r\} \longrightarrow S^m$) la fibre homotopique de $S^m \xrightarrow{p^r} S^m$. Soit $F^m\{p^r\}$ (ou $F^m\{p^r\} \longrightarrow S^m(p^r)$) la fibre homotopique de $S^m(p^r) \longrightarrow S^m$.

On a un diagramme commutatif où la ligne horizontale est une suite cofibrée, et les lignes obliques sont des fibrés associés aux applications horizontales.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & S^m \arrow[r, "p^r"] & S^m \arrow[r] \arrow[d, dashed] & S^{m+1}(p^r) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & S^{m+1} \arrow[r, "p^r"] \arrow[d, dashed] & S^{m+1} \arrow[r] & \cdots \\
& Y^m \arrow[ur] & F^{m+1}\{p^r\} \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[d, dashed] & S^{m+1}\{p^r\} \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[d, dashed] & Y^{m+1} \arrow[ur] & & \\
& \Omega S^{m+1} \arrow[r, "\Omega p^r"] \arrow[ur] \arrow[d, equal] & \Omega S^{m+1} \arrow[r] \arrow[ur] & \Omega S^{m+2}(p^r) \arrow[ur] & & & \\
& \Omega S^{m+1} \arrow[ur, "\Omega p^r"'] & & & & &
\end{tikzcd}$$

L'espace ΩS^m agit sur $F^m\{p^r\}$ et $S^m\{p^r\}$, et les espaces sont principaux au sens homotopique. Les applications $\Omega S^m \longrightarrow F^m\{p^r\}$ et $\Omega S^m \longrightarrow S^m\{p^r\}$ sont ΩS^m - équivariants. L'existence des quatre flèches verticales, qui complète le diagramme, résulte des propriétés généraux des suites de fibrés.

$S^m \longrightarrow F^{m+1}\{p^r\}$, $F^{m+1}\{p^r\} \longrightarrow \Omega S^{m+1}$, $S^{m+1}(p^r) \longrightarrow S^{m+1}\{p^r\}$, $S^{m+1}\{p^r\} \longrightarrow \Omega S^{m+2}(p^r)$.

(2.6) THÉORÈME.-

(1) $\bar{H}_*(F^{m+1}\{p^r\},R)$ <u>est un</u> $H_*(\Omega S^{m+1},R)$ - <u>module libre de rang</u> 1. <u>Une base est l'image par</u> $H_m(S^m,R) \longrightarrow H_m(F^{m+1}\{p^r\},R)$ <u>d'un générateur de</u> $H_m(S^m,R)$.

(2) $\bar{H}_*(S^{m+1}\{p^r\}, \mathbb{Z}/p^s)$ $(s \leq r)$ <u>est un</u> $H_*(\Omega S^{m+1}, \mathbb{Z}/p^s)$ - <u>module libre de rang</u> 2. <u>Une base est l'image par</u> $H_i(S^{m+1}(p^r), \mathbb{Z}/p^s) \longrightarrow H_i(S^{m+1}\{p^r\}, \mathbb{Z}/p^s)$ <u>d'un générateur de</u> $H_m(S^{m+1}(p^r), \mathbb{Z}/p^s)$ <u>et un générateur de</u> $H_{m+1}(S^{m+1}(p^r), \mathbb{Z}/p^s)$.

Les deux suites spectrales sur $\mathbb{Z}/p^r$ avec $E^2 = H_*(S^{m+1}(p^r)) \otimes H_*(\Omega S^{m+1})$ et $E^2 = H_*(S^{m+1}) \otimes H_*(\Omega S^{m+1})$ dégénèrent. Maintenant, on applique la méthode, qui donne (2.4). Faisons agir ΩS^{m+1} $(k-1)$- fois sur $F^{m+1}\{p^r\}$

$$\begin{tikzcd} F^{m+1}\{p^r\} \times (\Omega S^{m+1})^{k-1} \arrow[r] & F^{m+1}\{p^r\} \\ S^m \times (S^m)^{k-1} \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

et observons que $H_{mk}(S^m \times (S^m)^{k-1}) \longrightarrow H_{mk}(F^{m+1}\{p^r\})$ est un isomorphisme. De plus, par (2.3),

$$S(S^m \times (S^m)^{k-1}) \simeq S^{mk+1} \vee (\text{bouquet des sphères de dim} < mk+1),$$

et la suspension se restreint à $u_k : S^{mk+1} \longrightarrow SF^{m+1}\{p^r\}$ telle que l'application $u' : \bigvee_k S^{mk+1} \longrightarrow SF^{m+1}\{p^r\}$ soit un isomorphisme d'homologie, donc, une équivalence d'homotopie.

Faisons agir ΩS^{m+1} $(k-1)$ fois sur $S^{m+1}\{p^r\}$

$$\begin{tikzcd} S^{m+1}\{p^r\} \times (\Omega S^{m+1})^{k-1} \arrow[r] & S^{m+1}\{p^r\} \\ S^m \times (S^m)^{k-1} \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

et observons que $H_{mk}(S^m(p^r) \times (S^m)^{k-1}) \longrightarrow H_{mk}(S^{m+1}\{p^r\})$ est un isomorphisme sur $\mathbb{F}_p$ de la suite spectrale de Bockstein. Encore, par (2.3),

$$S(S^m(p^r) \times (S^m)^{k-1}) \simeq S^{mk+1}(p^r) \vee (\text{bouquet d'autres espaces}),$$

et la suspension se restreint à $u_k : S^{mk+1}(p^r) \longrightarrow S(S^{m+1}\{p^r\})$ telle que l'application $u'' : \bigvee_k S^{mk+1}(p^r) \longrightarrow S(S^{m+1}\{p^r\})$ soit un isomorphisme d'homologie, donc, une équivalence d'homotopie.

(2.7) THÉORÈME.- <u>Les applications</u>
$u' : \bigvee_k S^{mk+1} \longrightarrow SF^{m+1}\{p^r\}$ <u>et</u> $u'' : \bigvee_k S^{mk+1}(p^r) \longrightarrow S(S^{m+1}\{p^r\})$
<u>sont des équivalences d'homotopie</u>.

§3. Préliminaires algébriques I. Algèbres de Lie libres.

Tous les modules et les algèbres sont gradués sur un anneau commutatif R ayant un élément unité dans ce §.

(3.1) Définition.- Une algèbre de Lie est un module L muni d'une application bilinéaire $[\ ,\ ] : L \times L \longrightarrow L$ telle que

(a) (antisymétrie) $[x,y] = (-1)^{ij}[y,x]$ si $x \in L_i$, $y \in L_j$,

(b) (identité de Jacobi) $[x,[y,z]] = [[x,y],z] - (-1)^{ij}[y,[x,z]]$ si $x \in L_i$, $y \in L_j$, et $z \in L_k$, et

(c) $[x,[x,x]] = 0$ si x a un degré impair.

Dans notre cas, L est connexe, c'est-à-dire, $L_o = 0$. Un morphisme $f : L \longrightarrow L'$ d'algèbres de Lie est un morphisme des modules tel que $f([x,y]) = [f(x),f(y)]$.

Soit A une algèbre. Le crochet sur A se définie par $[x,y] = xy - (-1)^{ij}yx$ si x de L_i, y de L_j. Le module A muni de $[x,y]$ est une algèbre de Lie, désignée par Lie(A) ou A. A toute algèbre de Lie L, nous associons une algèbre associative U(L) et un morphisme $i : L \longrightarrow U(L)$ d'algèbres de Lie tel que pour tout morphisme $f : L \longrightarrow \mathrm{Lie}(A)$, il existe un seul morphisme $g : U(L) \longrightarrow A$ tel que $g \circ i = f$. On peut construire U(L) comme le quotient de T(L), l'algèbre tensorielle, par l'idéal I engendré par les $x \otimes y - (-1)^{ij} y \otimes x - [x,y]$ où $x \in L_i$, $y \in L_j$.

(3.2) Remarque.- Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt dit qu'il existe une filtration $F_pU(L)$ telle que le module gradué associé $E^oU(L)$ est isomorphe à une algèbre symétrique sur une suspension de L. Si L est un module libre, alors $i : L \longrightarrow U(L)$ est un monomorphisme scindé, et U(L) est un module libre. Si L est connexe, et si tout L_m est libre de rang a(m), alors $U(L)_m$ est libre de rang fini, et la série de Poincaré est

$$\chi_{U(L)}(t) = \Sigma_{m\geq 0} (\mathrm{rang}\ U(L)_m)\ t^m = \frac{\prod_{n\geq 1} (1 + t^{2n+1})^{a(2n+1)}}{\prod_{n\geq 1} (1 - t^{2n})^{a(2n)}}$$

Soit W un module. L'algèbre de Lie libre L(W) engendré par W se définit par la propriété suivante de $i : W \longrightarrow L(W)$: Pour tout morphisme $f : W \longrightarrow L$, où L est une algèbre de Lie, il existe un seul morphisme $g : L(W) \longrightarrow L$ tel que $g \circ i = f$. Si W est connexe ($W_o = 0$), L(W) est de même connexe.

(3.3) Remarque.- Si W est un module libre, L(W) est un module libre, et $U(L(W)) \longrightarrow T(W)$ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf. Inversement, si L est une algèbre de Lie avec U(L) isomorphique a T(W) ou W est libre et connexe, L est isomorphique a L(W). Si W est connexe et si tout W_m est libre de rang fini, L(W) a une séries de Poincaré

$$\chi_{L(W)}(t) = \Sigma_{1\leq m} a(m)t^m \quad \text{et} \quad \chi_{T(W)}(t) = \frac{1}{1 - \chi_W(t)} = \frac{\prod_{n\geq 1} (1 + t^{2n+1})^{a(2n+1)}}{\prod_{n\geq 1} (1 - t^{2n})^{a(2n)}} .$$

(3.4) PROPOSITION.- Soit $0 \longrightarrow L' \longrightarrow L \longrightarrow L'' \longrightarrow 0$ une suite exacte d'algèbres de Lie, qui sont libres de type fini. Alors U(L) est isomorphe à $U(L'') \otimes U(L')$ comme U(L') - module à droite et comme U(L") - comodule à gauche.

Donc $\chi_{U(L)}(t) = \chi_{U(L')}(t).\chi_{U(L'')}(t)$.

(3.5) PROPOSITION.- Soit L' une sous-algèbre de Lie de L telle que L = L(W) soit libre, L et W soient R - libre et connexe, et $L' \longrightarrow L$ soit scindé comme un morphisme des modules. Alors L' est une algèbre libre L(W') avec W" un R - module libre. Si W est de type fini, W' l'est aussi.

Voir [3, p. 130] pour (3.4) et (3.5).

Soit $L = L\langle u_{2n}, v_{2n+e}\rangle$, e = +1 ou -1, l'algèbre de Lie libre sur deux générateurs u_{2n} et v_{2n+e} de degrés 2n et 2n+e. Considérons les deux suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & [L,L] & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L^{ab} = \langle u,v\rangle & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & L & \longrightarrow & \langle u\rangle & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où <u,v> et <u> sont les algèbres de Lie commutatives des rangs 2 et 1.

(a). On pose $Q(A) = \operatorname{coker}(\phi : I(A) \otimes I(A) \longrightarrow I(A))$, les éléments indécomposables pour une algèbre A connexe où $A = R \oplus I(A)$. Par (3.5) les algèbres de Lie [L,L] et L' sont aussi libres comme L. Donc, pour [L,L] = L(W), on a U([L,L]) = T(W) où W = QU([L,L]), et pour L' = L(W"), on a U(L') = T(W') où W" = QU(L').

(b). D'après (3.4), nous avons les décompositions
$U(L) = T(u,v) = U\langle u,v\rangle \otimes T(W)$ et $U(L) = T(u,v) = U\langle u\rangle \otimes T(W')$.
Ici $U\langle u,v\rangle$ est l'algèbre symétrique $S(u,v)$ engendrée par u et v, et $U\langle u\rangle$ est l'algèbre symétrique $S(u)$ sur u. Dans ce cas la $S(u)$ est l'algèbre de polynomes de u.

(c). Formons les éléments de [L,L]

$$\mathrm{ad}^k(u_{2n})([u_{2n},v_{2n+e}]) = x_k \qquad \deg(x_k) = 2nk + 4n + e,$$
$$\mathrm{ad}^k(u_{2n})([v_{2n+e},v_{2n+e}]) = y_k \qquad \deg(y_k) = 2nk + 4n + 2e,$$

et les éléments de L'

$$\mathrm{ad}^k(u_{2n})(v_{2n+e}) = z_k, \qquad \deg(z_k) = 2nk + 2n + e.$$

Dans le module des éléments indécomposables $W = Q(U([L,L]))$, les éléments x_k, y_k pour $k = 0, 1, \ldots$ sont linéairement indépendants, et dans le module des éléments indécomposables $W'' = Q(U(L'))$, les éléments z_k pour $k = 0, 1, \ldots$ sont linéairement indépendants par un critérium de Cohen, Moore, et Neisendorfer [3, p. 132].

(3.6) <u>Remarques</u>.- Calculons les séries de Poincaré. D'abord $\chi_{U(L)}(t) = \chi_{U\langle u,v\rangle}(t) \cdot \chi_{U([L,L])}(t)$ peut s'écrire

$$\frac{1}{1 - t^{2n} - t^{2n+e}} = \frac{1 + t^{2n+e}}{1 - t^{2n}} \cdot \frac{1}{1 - \chi_W(t)}$$

Donc $$\chi_W(t) = \frac{t^{4n+e} + t^{4n+2e}}{1 - t^{2n}} = t^{4n+e} \Sigma_{0\leq k}\, t^{2nk} + t^{4n+2e} \Sigma_{0\leq k}\, t^{2nk},$$

et les éléments x_k, y_k $(0\leq k)$ forment une base de $Q(U([L,L])) = W$. Cela montre que: [L,L] <u>est une algèbre de Lie libre sur les générateurs</u> x_k, y_k $(0\leq k)$.

D'autre part, $\chi_{U(L)}(t) = \chi_{U\langle u\rangle}(t) \cdot \chi_{U(L')}(t)$ peut s'écrire

$$\frac{1}{1 - t^{2n} - t^{2n+e}} = \frac{1}{1 - t^{2n}} \cdot \frac{1}{1 - \chi_{W'}(t)}$$

Donc $$\chi_{W'}(t) = \frac{t^{2n+e}}{1 - t^{2n}} = t^{2n+e} \Sigma_{0\leq k}\, t^{2nk},$$

et les éléments z_k $(0\leq k)$ forment une base de $Q(U(L')) = W'$. Cela montre que: L' <u>est une algèbre de Lie libre sur les générateurs</u> z_k $(0\leq k)$.

§4. Décomposition de ΩS^{2n+2} et $\Omega S^{2n+2}(p^r)$

Le plongement $v : S^{2n+1} \longrightarrow \Omega S^{2n+2}$ et le crochet $u' = [v,v] : S^{4n+2} \longrightarrow \Omega S^{2n+2}$, qui induit une application $u : \Omega S^{4n+3} \longrightarrow \Omega S^{2n+2}$, ont un produit w sur ΩS^{2n+2}. L'application $w : S^{2n+1} \times \Omega S^{4n+3} \longrightarrow \Omega S^{2n+2}$ induit un isomorphisme d'homologie avec coefficients d'un corps pour toutes caractéristiques sauf 2. Donc on a:

(4.1) THÉORÈME. voir [22], [13] - L'application w localisée
$$w : S^{2n+1}[1/2] \times \Omega S^{4n+3}[1/2] \longrightarrow \Omega S^{2n+2}[1/2]$$
est une équivalence d'homotopie.

Supposons que tous les espaces soient localisés en p, un nombre premier > 3. Pour décomposer $\Omega S^{2n+2}(p^r)$, nous utilisons l'homologie $H_*(\Omega S^{2n+2}(p^r), \mathbb{Z}/p^r) = T(u_{2n}, v_{2n+1}) = U(L)$ où $L = L\langle u_{2n}, v_{2n+1}\rangle$ est l'algèbre de Lie libre sur deux générateurs u_{2n} et v_{2n+1}, voir (2.1) et (3.6). L'algèbre enveloppante universelle se décompose comme un produit tensoriel des $U([L,L])$ - modules à droite et des $U(L^{ab})$ - comodules à gauche $T(u_{2n}, v_{2n+1}) = U(L) = U(L^{ab}) \otimes U([L,L])$ d'après (3.4).

L'application $S^{2n+1}\{p^r\} \longrightarrow \Omega S^{2n+2}(p^r)$, qui est définie par le diagramme après (2.5), est une injection en homologie sur le facteur $U(L^{ab})$ de $U(L)$. On a donc un isomorphisme $H_*(S^{2n+1}\{p^r\}) \otimes U([L,L]) \longrightarrow U(L) = H_*(\Omega S^{2n+2}(p^r), \mathbb{Z}/p^r)$.

D'après (3.6), $[L,L]$ est une algèbre de Lie libre engendrée par les éléments $ad^k(u)[v,v]$ et $ad^k(u)[u,v]$ pour $k \geq 0$, qui sont dans l'image du morphisme de Hurewicz. Il existe une application $S^{4n+2+2kn}(p^r) \longrightarrow \Omega S^{2n+2}(p^r)$ telle que l'image de $H_*(S^{4n+2+2kn}(p^r), \mathbb{Z}/p^r)$ soit le sous-module libre engendré par les éléments $ad^k(u)[v,v]$ et $ad^k(u)[u,v]$. Le bouquet des applications $\bigvee_{k\geq 0} S^{4n+2+2kn}(p^r) \longrightarrow \Omega S^{2n+2}(p^r)$ induit une application de $T = \Omega(\bigvee_{k\geq 0} S^{4n+3+2kn}(p^r)) \longrightarrow \Omega S^{2n+2}(p^r)$. Cette application et $S^{2n+1}\{p^r\} \longrightarrow \Omega S^{2n+2}(p^r)$ donne le produit $S^{2n+1}\{p^r\} \times T \longrightarrow \Omega S^{2n+2}(p^r)$, qui est un isomorphisme d'homologie avec coefficients dans $\mathbb{Z}/p^r$.

(4.2) THÉORÈME. [3] - L'application au-dessus
$$S^{2n+1}\{p^r\} \times \Omega(\bigvee_{k\geq 0} S^{4n+3+2kn}(p^r)) \longrightarrow \Omega S^{2n+2}(p^r)$$
est une équivalence d'homotopie.

La décomposition de $\Omega S^{2n+2}(p^r)$ est analogue à celle de Serre $\Omega S^{2n+2} \simeq S^{2n+1} \times \Omega S^{4n+3}$, car $\Omega S^{4n+3}(p^r)$ est un facteur de T. La décomposition de $\Omega S^{2n+1}(p^r)$ est plus difficile, et elle est très proche de la décomposition de $\Omega F^{2n+1}(p^r)$, qui est étudiée dans §6, §7.

§5. Préliminaires algébriques II. Algèbres différentielles de Lie

Une algèbre différentielle A sur R est une algèbre A munie d'une différentielle $\beta : A \longrightarrow A$ de degré -1 telle que $\beta(xy) = \beta(x)y + (-1)^i x\beta(y)$ si $x \in A_i$, $y \in A_j$. L'homologie $H_*(A)$ de A a une structure canonique d'algèbre. Si A est commutative, $H_*(A)$ l'est aussi.

Une algèbre différentielle de Lie L sur R est une algèbre de Lie L munie d'une différentielle $\beta : L \longrightarrow L$ de degré -1 telle que

$$\beta([x,y]) = [\beta(x),y] + (-1)^i[x,\beta(y)] \quad \text{si } x \in L_i,\ y \in L_j.$$

L'homologie $H_*(L)$ de L a une structure canonique d'algèbre de Lie induite par la structure sur L. Si L est commutative, $H_*(L)$ l'est aussi.

(5.1) Remarque.-

Si M est un module différentiel tel que M et $H_*(M)$ soient R - plats, le morphisme canonique $Z_*(M) \longrightarrow H_*(T(M))$ induit un morphisme $T(H_*(M)) \longrightarrow H_*(T(M))$, qui est un isomorphisme d'algèbres de Hopf. Ici T(M) est une algèbre de Hopf où tout élément de M est primitif dans T(M). Par exemple, si $M = R.x \oplus R.\beta(x)$ est de rang 2 avec $H_*(M) = 0$, on a $H_*(T(M)) = R$.

Soit k un corps de caractéristique $p > 0$ dans ce §. Si A est une algèbre différentielle commutative sur k, on a la relation $\beta(x^{p^j}) = 0$ pour tout x de A_n. De plus, si A est $S(x_m,\beta x_m)$, l'algèbre symétrique engendrée par x_m, de degré m, et βx_m. L'homologie est

$$H(S(x_m,\beta x_m)) = k \quad \text{si } m = 2n+1,$$
$$= S(x_m{}^p, x_m{}^{p-1}\beta x_m) \quad \text{si } m = 2n.$$

(5.2) Remarque.-

Si A est une algèbre sur k, on a la relation

$$\beta(x^{p^j}) = \mathrm{ad}^{p^j-1}(x)(\beta(x)), \quad \text{et alors} \quad \beta[\mathrm{ad}^{p^j-1}(x)(\beta(x))] = 0$$

où $\mathrm{ad}(x)(y) = [x,y]$. Dans une algèbre différentielle de Lie $\beta[\mathrm{ad}^{p^j-1}(x)(\beta(x))] = 0$, puisque c'est vrai dans la sous-algèbre de Lie engendrée par x et $\beta(x)$ de $T(x,\beta(x))$.

§6. La Décomposition de $F^{2n+1}\{p^r\}$

Tous les espaces sont localisés en p impair.

(6.1) THÉORÈME.- Il existe une décomposition à homotopie près

$$S^{2n-1} \times \prod_{j\geq 1} S^{2np^{j-1}\{p^{r+1}\}} \times \Omega(\bigvee_i S^{n(i)}(p^r)) \longrightarrow \Omega F^{2n+1}\{p^r\}$$

où $n(i) \geqq 4n-1$ et $n(i) \longrightarrow +\infty$. La restriction à S^{2n-1} de cette application est le composé $S^{2n-1} \longrightarrow \Omega^2 S^{2n+1} \longrightarrow \Omega F^{2n+1}\{p^r\}$ de E^2 et d'une application de la suite des fibrés, qui définit l'espace $F^{2n+1}\{p^r\}$. (voir (2.5)).

Pour une esquisse de la démonstration ($p > 3$), considérons le diagramme commutatif induit par le fibré $F^{2n+1}\{p^r\} \longrightarrow \Omega S^{2n+1}(p^r) \longrightarrow \Omega S^{2n+1}$, et le morphisme de Hurewicz

$$\begin{array}{ccccc}
 & & L(u_{2n},v_{2n-1}) & & \\
 & & \cap & & \\
\pi_*(\Omega F^{2n+1}\{p^r\}, \mathbb{Z}/p) & \longrightarrow & \pi_*(\Omega S^{2n+1}(p^r), \mathbb{Z}/p) & \longrightarrow & \pi_*(\Omega S^{2n+1}, \mathbb{Z}/p) \\
\downarrow\phi & & \downarrow\phi & & \downarrow\phi \\
H_*(\Omega F^{2n+1}\{p^r\}, \mathbb{Z}/p) & \longrightarrow & H_*(\Omega S^{2n+1}(p^r), \mathbb{Z}/p) & \longrightarrow & H_*(\Omega S^{2n+1}, \mathbb{Z}/p) \\
 & & \| & & \| \\
 & & T(x_{2n},y_{2n-1}) & & T(x_{2n}).
\end{array}$$

Ici $T(x_{2n},y_{2n-1})$ et $T(x_{2n})$ sont les algèbres tensorielles, et on choisit u_{2n}, v_{2n-1} tels que $\phi(u_{2n}) = x_{2n}$ et $\phi(v_{2n-1}) = y_{2n-1}$. Les éléments u_{2n}, v_{2n-1} engendrent une sous-algèbre de Lie libre $L(u_{2n},v_{2n-1})$ de $\pi_*(\Omega S^{2n+1}(p^r), \mathbb{Z}/p)$. Les différentielles de Bockstein sur $H_*(\Omega S^{2n+1}(p^r), \mathbb{Z}/p)$ sont determinées par

$$\beta_s(x_{2n}) = 0 \text{ si } s < r \text{ et } \beta_r(x_{2n}) = y_{2n-1}.$$

Pour $n > 1$, nous montrons l'existence des facteurs $S^{2np^{j-1}\{p^{r+1}\}}$ dans le produit faible $\prod$, qui est la limite inductive des produits finis. Ces facteurs s'appliquent avec le point base dans $\Omega F^{2n+1}\{p^r\}$ et $\Omega S^{2n+1}(p^r)$, et les facteurs $\Omega(\bigvee_i S^{n(i)}(p^r))$ sont envoyés par un isomorphisme sur un facteur direct de $\Omega F^{2n+1}\{p^r\}$ et $\Omega S^{2n+1}(p^r)$. D'apres (5.2), on a pour $j = 1$

$$\beta_r(\mathrm{ad}^{p^j-1}(u)(v)) = 0,$$

puisque $\beta_r(x_{2n}) = y_{2n-1}$ implique que $\beta_r(u) = v$. La relation est valable dans $E^r\pi_*(\Omega F^{2n+1}\{p^r\})$ et $E^r\pi_*(\Omega S^{2n+1}(p^r)$ par la théorie des produits relatifs de Samelson. Cherchons un élément w tel que $\beta_r(w) = \mathrm{ad}^{p^j-1}(u)(v)$. On calcule dans l'algèbre tensorielle $H_*(\Omega S^{2n+1}(p^r), \mathbb{Z}/p)$

$$\beta_r(x^{p^j} - \phi(w)) = \mathrm{ad}(x)^{p^j-1}(y) - \phi(\mathrm{ad}^{p^j-1}(u)(v)) = 0$$

puisque ϕ est un morphisme d'algèbres de Lie. D'après (5.1), l'homologie

$$\bar{H}_*[H_*(\Omega S^{2n+1}(p^r), \mathbb{Z}/p), \beta_r] = \mathbb{Z}/p,$$

et il existe z dans $H_*(\Omega S^{2n+1}(p^r))$ de degré impair avec $\beta_r(z) = x^{p^j} - \phi(w)$. Cet élément z donne zéro dans $H_*(\Omega S^{2n+1}, \mathbb{Z}/p)$; donc, x^{p^j} et $\phi(w)$ s'appliquent sur le même élément de $H_*(\Omega S^{2n+1}, \mathbb{Z}/p)$, et cela implique que

$$x^{p^j} \text{ appartient à } \operatorname{im}(\phi : \pi_*(\Omega S^{2n+1}, \mathbb{Z}/p) \longrightarrow H_*(\Omega S^{2n+1}, \mathbb{Z}/p)),$$

ce qui est absurde par la non-existence des éléments de Hopf invariant un modulo p, voir [23] et [9]'. Donc un tel w n'existe pas, et $ad^{p^j-1}(u)(v)$ définit un élément de $E^{r+1}\pi_{2np^j-1}(\Omega S^{2n+1}(p^r))$, qui s'applique sur zéro dans $\pi_{2np^j-1}(\Omega S^{2n+1})$.

Cet élément défini modulo p^{r+1} dans l'homotopie de $\Omega S^{2n+1}(p^r)$ se relève à $\Omega F^{2n+1}\{p^r\}$ dans la suite de fibrés par la théorie des produits relatifs de Samelson, voir [3,§6]. On a donc une application

$$S^{2np^j-1}(p^{r+1}) \longrightarrow \Omega F^{2n+1}\{p^r\},$$

qui induit une application

$$\Omega S^{2np^j}(p^{r+1}) \longrightarrow \Omega F^{2n+1}\{p^r\},$$

et nous composons avec $S^{2np^j-1}\{p^{r+1}\} \longrightarrow \Omega S^{2np^j}(p^{r+1})$ de (2.5). Nous formons le produit faible sur tout $j \geq 1$ pour trouver le premier facteur.

Pour l'autre facteur, voir [3,§12].

§7. La quasi-inverse de la suspension double E^2

Rappelons le diagramme commutatif suivant (tous les espaces soient localisés en $p > 2$):

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d] \arrow[dr] & & & \\
 & F^{2n+1}\{p^r\} \arrow[r] \arrow[dd] & S^{2n+1}(p^r) \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
 & & & S^{2n+1}\{p^r\} \arrow[r] & S^{2n+1} \arrow[r, "p^r"] & S^{2n+1} \\
 & \Omega S^{2n+1} \arrow[rr] & & & &
\end{tikzcd}$$

où $X \longrightarrow F^{2n+1}\{p^r\} \longrightarrow \Omega S^{2n}$ est un fibré. Le théoreme ci-dessous découle de (6.1).

(7.1) THÉORÈME.- Il existe un espace Y et une application $Y \longrightarrow \Omega X$ tels que le composé suivant est une équivalence d'homotopie (la dernière application est le produit sur un espace des lacets)

$$S^{2n-1} \times Y \longrightarrow \Omega F^{2n+1}\{p^r\} \times \Omega X \longrightarrow \Omega F^{2n+1}\{p^r\} \times \Omega F^{2n+1}\{p^r\} \longrightarrow \Omega F^{2n+1}\{p^r\}.$$

Soit $r = 1$. Nous avons un diagramme commutatif où I est l'inverse de l'équivalence d'homotopie du théorème (7.1).

$$\begin{tikzcd}
S^{2n-1} \times Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rrr, bend left, "\text{inverse} = I"] & \Omega F^{2n+1}\{p\} \times \Omega F^{2n+1}\{p\} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega F^{2n+1}\{p\} \arrow[dr] & \Omega^2 S^{2n+1} \arrow[d, "\Omega^2 p"] \\
S^{2n-1} \times * \arrow[r] & \Omega^2 S^{2n+1} \times \Omega^2 S^{2n+1} \arrow[rr] & & \Omega^2 S^{2n+1}
\end{tikzcd}$$

Cela nous conduit à une factorisation de $\Omega^2 p$

$$\Omega^2 S^{2n+1} \longrightarrow \Omega F^{2n+1}\{p\} \xrightarrow{\text{pro}I} S^{2n-1} \xrightarrow{E^2} \Omega^2 S^{2n+1}.$$

Soit $\pi : \Omega^2 S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n-1}$ le composé des deux premières applications. Alors, $E^2 \circ \pi$ est $\Omega^2 p$; $\pi \circ E^2$ est de degré p, c'est-à-dire, $\pi \circ E^2 = p$.

(7.2) THÉORÈME.- L'application de suspension double $E^2 : S^{2n-1} \longrightarrow \Omega^2 S^{2n+1}$ a un quasi-inverse $\pi : \Omega^2 S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n-1}$ tel que $E^2 \circ \pi = p$ et $\pi \circ E^2 = p$ sur les H-espaces $\Omega^2 S^{2n+1}$ et S^{2n-1}.

§8. Les exposants

(8.1) Définition.- Un espace X simplement connexe a l'exposant p^r en un nombre premier p si $p^r.\mathrm{Tors}\ \pi_*(X)_{(p)} = 0$. Un H-espace X a l'exposant multiplicatif k si l'application "puissance kème", $k : X \longrightarrow X$, définie par $x \longmapsto x^k$, est homotopiquement triviale.

Théorème (7.2) implique que S^{2n+1} a l'exposant p^n en p pour un nombre premier impair p. Cette assertion est la meilleure possible; en effet S^{2n+1} n'a pas l'exposant p^{n-1} en p selon les résultats de B. Gray [6]'.

Si $X\{k\}$ désigne la fibre de l'application $k : X \longrightarrow X$ pour un H-espace X, alors $\Omega^3(X\{k\})$ a le même type d'homotopie que l'espace $\mathrm{Map}(S^4(k),X)$ de la suite fibrée

$$\mathrm{Map}(S^4(k),X) \longrightarrow \mathrm{Map}(S^3,X) \longrightarrow \mathrm{Map}(S^3,X) = \Omega^3 X.$$

Pour un H-espace X, le H-espace $\Omega^3(X\{k\})$ a l'exposant 2k, et dans le cas où k soit impair, il a l'exposant k. Pour tout k impair, on a $k.\pi_*(S^{2n+1}\{k\}) = 0$, puisque la sphère localisée $S^{2n+1}[1/2]$ est un H-espace, et les considérations ci-dessus sont applicables à $X = S^{2n+1}[1/2]$.

(8.2) Résultats sur les exposants. [3], [16], [17].

(a) La composante de l'identité de $\Omega^{2n+1}S^{2n+1}$ a l'exposant p^n.

(b) Voici une variante plus précise du théorème (7.2): La fibre de la suspension double $E^2 : S^{2n-1}_{(p)} \longrightarrow \Omega^2 S^{2n+1}_{(p)}$ a une structure de H-espace naturelle telle que son exposant multiplicatif soit p.

L'étude de la décomposition des espaces lacets a son origine dans le problème de la détermination de l'exposant de $S^m(p^r)$. D'après [3], on a un exposant p^{2r+1} pour $S^m(p^r)$ si p est > 3. Le travail récent de Neisendorfer nous donne l'assertion suivante:

(c) Le H-espace $\Omega^2 S^m(p^r)$ est d'exposant multiplicatif p^{r+2} pour tout p impair et $m \geq 3$. La conjecture est, que $S^m(p^r)$ a l'exposant p^{r+1}, et qu'il existe un exposant pour $S^m(2^r)$.

(8.3) La conjecture de Moore. Tout complexe fini X simplement connexe, tel que $\pi_*(X) \otimes Q$ soit de dimension totale finie, a un exposant en tous les nombres premiers p, c'est-à-dire, il existe n(p) pour chaque nombre premier p tel que $p^{n(p)}.\mathrm{Tors}\ \pi_*(X)_{(p)} = 0$.

BIBLIOGRAPHE

[1] J.F. ADAMS - The sphere, considered as an H - space mod p, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 12 (1961), p. 52-60.

[2] W. BROWDER - Torsion in H - spaces, Ann. of Math., 74 (1961), p. 24-51.

[3] F.R. COHEN, J.C. MOORE, and J.A. NEISENDORFER - Torsion in homotopy groups, Ann. of Math., 109 (1979), p. 121-168.

[4] F.R. COHEN, J.C. MOORE, and J.A. NEISENDORFER - The double suspension and exponents of the homotopy groups of spheres, Ann. of Math., 110 (1979), p. 549-565.

[5] F.R. COHEN, J.C. MOORE, and J.A. NEISENDORFER - Note on higher torsion in the homotopy groups of single suspensions, Illinois Journal, (to appear, 1980).

[6] F.R. COHEN, J.C. MOORE, and J.A. NEISENDORFER - Decomposition of loop spaces and applications to exponents, Proceedings of the Aarhus Topology Symposium (to appear, Lecture Notes).

[7] D. HUSEMOLLER - Fibre Bundles, 2nd. Ed., Springer Verlag, 1966.

[8] I. JAMES - Reduced product spaces, Ann. of Math., 62 (1955), p. 190-197.

[9] I. JAMES - On the suspension sequence, Ann. of Math., 65 (1957), p. 74-107.

[10] J.W. MILNOR and J.C. MOORE - On the structure of Hopf algebras, Ann. of Math., 81 (1965), p. 211-264.

[11] J.C. MOORE - On homotopy groups of spaces with a single non-vanishing homology group, Ann. of Math., 59 (1954), p. 549 - 557.

[12] J.C. MOORE - The double suspension and p - primary components of the homotopy groups of spheres, Boll. Soc. Mat. Mexicana, 1 (1956), p. 28-37.

[13] J.C. MOORE - Some applications of homology theory to homotopy problems, Ann. of Math., 58 (1953), p. 325-350.

[14] J.A. NEISENDORFER - Homotopy theory modulo an odd prime, Princeton University Thesis, 1972.

[15] J.A. NEISENDORFER - Primary homotopy theory, Mem. A.M.S. No. 232 (1980).

[16] J.A. NEISENDORFER - Smaller exponents for Moore spaces, (to appear).

[17] J.A. NEISENDORFER - 3 Primary exponents, (to appear).

[18] F.P. PETERSON - Generalized cohomotopy groups, Amer. J. Math, 78 (1956), p. 259 - 281.

[19] P.S. SELICK - Odd primary torsion in the homotopy groups of spheres, Princeton University Thesis, 1977.

[20] P.S. SELICK - Odd primary torsion in $\pi_k(S^3)$, Topology, 17 (1978), p. 407 - 412.

[21] J-P. SERRE - Homologie singulière des espaces fibrés. Applications, Ann. of Math., 54 (1951), p. 425 - 505.

[22] J-P. SERRE - Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens, Ann. of Math., 58 (1953), p. 258 - 294.

[23] N. SHIMADA and T.YAMANOSHITA - On triviality of the mod p Hopf invariant, Japan J. of Math., 31 (1961), p. 1 - 25.

[24] H. TODA-On the double suspension E^2, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ., Ser. A, 7 (1965), p. 103 - 145.

[25] H. TODA - p - primary components of homotopy groups II, mod p Hopf invariant, Mem. Coll. Sci. Univ. of Kyoto, Ser. A, 31 (1958), p. 143 - 160.

[26] G.W. WHITEHEAD - On mappings into group-like spaces, Comment. Mth. Helv., 28 (1954), p. 320 - 328.

[6]' B. Gray, On the sphere of origin of infinite families in the homotopy groups of spheres, Topology, 8 (1969), p. 219-232.

[9]' A. Liulevicius, The factorization of cyclic reduced powers by secondary cohomology operations, Mem. A.M.S. No. 42 (1962).

Dale HUSEMOLLER

Haverford College
Haverford, PA 19041
USA