CLAUDE BARDOS

Apparition éventuelle de singularités dans des problèmes d'évolution non linéaires

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. nº 555, p. 215-224

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1979-1980__22__215_0>

Séminaire BOURBAKI 555-01
32e année, 1979/80, n° 555 Juin 1980

APPARITION ÉVENTUELLE DE SINGULARITÉS DANS DES PROBLÈMES D'ÉVOLUTION NON LINÉAIRES [d'après S. Klainerman, B. Glassey, J. Chadam, F. John (et d'autres)]

par Claude BARDOS

I. Introduction

On sait que l'équation $u' + au = 0$, $u(0) = u_o$ admet une solution définie pour tout temps donnée par l'expression $u(t) = e^{-at}u_o$, tandis que l'équation $u' = u^2$, $u(0) = u_o > 0$ n'admet une solution, donnée par $u(t) = u_o/(1 - tu_o)$ que pour $t < 1/u_o$.

Une situation analogue se présente pour les équations d'évolutions non linéaires, de la forme $\frac{du}{dt} + A(u) = 0$, où u est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}_+$, à valeur dans un espace fonctionnel convenable, tandis que A est un opérateur non linéaire. Les exemples types considérés dans cet exposé seront les suivants :

$$(1)\quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u) = 0 , \quad (2)\quad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 , \quad (3)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}(K(\frac{\partial u}{\partial x})) = 0 ,$$

$$(4)\quad \frac{i\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) = 0 , \quad (5)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = G(u, Du, D^2_{ij}u) .$$

Dans tous ces exemples $x \in \mathbb{R}^d$ (éventuellement $d = 1$) désignera la variable d'espace et $t \in \mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{R}^+$) la variable de temps.

Une différence fondamentale entre ces exemples et l'équation $y' = y^2$ est que certaines normes peuvent rester bornées tandis que d'autres seront infinies. Ceci ne se produira pas dans l'exemple (1) car il s'agit d'une équation parabolique et on peut montrer que, dès que u est borné, toutes les dérivées de u seront aussi bornées. Ceci correspond à la propriété régularisante des équations paraboliques linéaires. Pour (1) les seules apparitions de singularités seront dues à la croissance de $\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^2 dx$ (cf. Fujita [3]). Par contre pour les équations (2) et (3) on a respectivement :

$$(6)\quad \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|^2 dx = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2}|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)|^2 + H(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)))dx = 0$$

où H désigne une primitive de la fonction $\xi \longrightarrow K(\xi)$; aussi les singularités interviendront par les dérivées d'ordre supérieur ($\frac{\partial u}{\partial x}$ pour (2) et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pour (3)).

Les lois de conservation (6) sont liées au caractère hyperbolique des équations (réversibilité en temps en particulier). Au lieu de simplement propager des singularités comme dans le cas linéaire, les problèmes hyperboliques non linéaires engendrent, pour des solutions bornées ces singularités.

Dans les exemples (4) et (5) apparaît un phénomène nouveau, qui est la décroissance locale de la solution du problème linéarisé ; cet effet peut compenser la non linéarité, surtout comme on le verra lorsque la non linéarité est assez élevée, et empêcher la formation de singularités ; dans ce cas la solution se comporte asymptotiquement (pour $|t| \longrightarrow \infty$) comme la solution d'un problème linéaire et ceci donne lieu à une théorie de la diffusion (cf. W. Strauss [16] et bien d'autres). Le plan de l'exposé est le suivant : au § II on considère les problèmes hyperboliques en dimension 1 , au § III on étudie l'équation de Schrödinger non linéaire en dimension 1 ; ceci permet de mettre très simplement en évidence l'effet de la dispersion. Enfin au § IV on étudie l'équation des ondes non linéaires en dimension supérieure à 6 . On suit l'idée de Klainerman, qui consiste à améliorer le procédé itératif du § III. Au lieu d'une méthode d'itération du type Picard, on utilise une méthode d'itération du type Newton de manière à avoir une convergence quadratique. Ceci conduit à utiliser la version du théorème de Nash-Moser donnée par Hörmander. Une esquisse de la démonstration est faite au § V.

En conclusion l'apparition de singularités se produit surtout dans des équations non linéaires, présentant des propriétés de conservation (voir les exemples du § II) ; ces propriétés disparaissent lorsque l'effet de dispersion devient trop grand. Comme ces singularités décrivent (en mécanique des fluides) l'apparition d'ondes de choc, on peut en déduire que la vie serait plus douce dans un espace de dimension supérieure à 5 .

Bien entendu un problème fondamental ouvert reste l'existence éventuelle de singularités pour l'équation d'Euler en 3 dimensions. Avec les exemples donnés dans cet exposé, l'équation d'Euler partage le caractère quadratique ; elle ne présente pas cependant de quantités conservées ou d'invariants assez nombreux ; de plus la propriété de dispersion est remplacée par la propriété d'incompressibilité ; on trouvera sur l'éventualité des singularités des remarques dans Bardos-Frisch [1] et une étude numérique dans Morf, Orzag et Frisch [13] qui semble suggérer l'existence de singularités.

II. Problèmes hyperboliques à une dimension d'espace

L'équation modèle est l'équation de Burger $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $u(x,0) = u_o(x)$. On sait que cette équation admet une unique solution faible (compte tenu des conditions d'entropie). Même si u_o est une fonction régulière, la solution présente des discontinuités à partir d'un temps fini. Ceci se voit en introduisant les courbes caractéristiques $x(t)$ solutions des équations

$$\dot{x}(t) = u(x(t),t) \tag{7}$$

La solution de l'équation de Burger est constante le long des caractéristiques. Ainsi on a

$$u(x,t) = u_o(x_o) \quad \text{si} \quad x = x_o + u_o(x_o)t \ . \tag{8}$$

Les caractéristiques sont donc des droites et dès qu'elles se coupent une discontinuité apparaît dans la solution. Une autre manière de prévoir la singularité consiste à dériver l'équation de Burger par rapport à x . On obtient

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 , \tag{9}$$

soit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x(t),t) = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2(x(t),t) , \tag{10}$$

ce qui est une expression du type $y' = -y^2$. On en déduit que $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_\infty$ devient infini après un temps fini. Ces démonstrations simples sont basées sur le fait que u se "propage" sans dispersion. Une situation analogue se produit pour l'équation (3). Par changement de variable on écrit (3) sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(K(v)) = 0 . \tag{11}$$

Pour que le système (11) soit hyperbolique on suppose que l'on a, pour tout ξ , $K'(\xi) > 0$. On introduit alors les invariants de Riemann.

$$\begin{cases} \ell(v,w) = \frac{1}{2}\left(w + \int_0^v \sqrt{K'(\xi)}\,d\xi\right) \\ r(v,w) = \frac{1}{2}\left(w - \int_0^v \sqrt{K'(\xi)}\,d\xi\right) \end{cases} \tag{12}$$

Ces deux invariants sont conservés respectivement le long des courbes caractéristiques : $x'(t) = -\sqrt{K'(w(x(t),t))}$ et $x'(t) = \sqrt{K'(w(x(t),t))}$.

En utilisant cette invariance et en s'inspirant de la relation (10) on peut prouver que pour toute donnée initiale régulière et tendant vers zéro pour $|x| \to \infty$, les expressions $\left|\frac{\partial \ell}{\partial x}\right|_\infty$ et $\left|\frac{\partial r}{\partial x}\right|_\infty$ (1) tendent vers l'infini au bout d'un temps fini.

Ceci a été prouvé par Lax [12] sous l'hypothèse $K''(\xi) \neq 0$ $\forall \xi$ (système vraiment non linéaire) et généralisé au cas d'un système vraiment non linéaire, à n inconnues, en dimension un d'espace par John [8] (2). Le cas où $K''(\xi)$ peut s'annuler a été traité par Klainerman et Majda [11]. Les systèmes vraiment non linéaires correspondent aux

---

(1) On désigne par $|\ |_p$ la norme d'une fonction dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

(2) Cf. aussi Liu [19].

hypothèses de la mécanique des fluides et expliquent la formation d'ondes de choc. Le cas traité par Klainerman et Majda [11] correspond à des cordes vibrantes avec effet non linéaire.

III. Un premier exemple de dissipation : l'équation de Schrödinger non linéaire

Au § II on a vu que l'apparition de singularités était liée d'une part à la non linéarité, d'autre part à des propriétés de propagation ; l'exemple de l'équation de Schrödinger non linéaire montre que des propriétés de dispersion peuvent compenser les singularités. On considèrera l'équation

$$i\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g|u|^{p-1}u = 0 \ , \quad (g \geq 0 \ , \ p > 1) \quad ; \quad u(.,0) = \varphi(.) \in \mathcal{S} \tag{13}$$

On sait que si $g = 0$, $u(x,t)$, solution de l'équation de Schrödinger linéaire, donnée par

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2i\pi t}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4it}} \varphi(y)dy \ . \tag{14}$$

décroit (en norme du sup), pour $|t| \longrightarrow \infty$, comme $1/\sqrt{t}\,|\varphi|_1$. On va utiliser cette propriété pour prouver le

THÉORÈME 1.- On suppose que $p > 4$ et que la donnée initiale $\varphi \in \mathcal{S}$ est assez petite au sens suivant

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(|\varphi(x)|^2 + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\right|^2 + |\varphi(x)| \right)dx < a \ , \tag{15}$$

alors le problème (13) admet une unique solution régulière, définie pour tout t , vérifiant la majoration

$$(1+\sqrt{|t|})|u(x,t)| \leq \varepsilon(a) < +\infty \ . \tag{16}$$

Démonstration.- On utilise une méthode itérative en définissant la suite u_n par les relations :

$$i\frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - g|u_{n-1}|^{p-1}u_n = 0 \ , \quad u_n(x,0) = \varphi(x) \ . \tag{17}$$

En multipliant par $\overline{u}_n$ cette équation linéaire en u_n on voit que l'on a $|u_n(x,t)|_2^2 = |\varphi(x)|_2$. Le point essentiel est de montrer par récurrence que $(\sqrt{1+t})|u_n(x,t)|$ reste uniformément borné, (on se limite à $t > 0$) ; on pose : $X_n = \sup_t \sqrt{1+t}\,|u_n(.,t)|_\infty$.

On a alors :

$$\sqrt{1+t}.|u_n(x,t)| \leq \sqrt{1+t}\,|(e^{it\Delta}\varphi)(x,t)| + \int_0^t g\sqrt{1+t}\,|e^{i(t-s)\Delta}(|u_n(.,s)|^{p-1}u_{n-1}(.,s))|_\infty ds \ . \tag{18}$$

En utilisant la relation (14) on voit que l'on a :

$$|e^{i(t-s)\Delta}(|u_n(.,s)|^{p-1}u_{n-1}(.,s))|_\infty \leq \frac{Cg}{\sqrt{(t-s)}}|u_n(.,s)|^{p-2}|u_n(.,s)|_2|u_{n-1}(.,s)|_2 \tag{19}$$

où C désigne une constante indépendante de n et de la donnée initiale. De (18) et (19) on déduit la relation de récurrence :

(20) $$X_n \le X_o + Cga \int_o^t \left(\sqrt{\frac{1+t}{t-s}} \frac{ds}{(\sqrt{1+s})^{p-2}}\right) X_{n-1}^{p-2}$$

Pour $p > 4$ cette dernière intégrale est bornée et X_n vérifie une relation de récurrence de la forme

(21) $$X_n \le X_o + C\, X_{n-1}^{p-2}$$

ce qui implique que X_n est borné dès que X_o est assez petit. Comme X_o tend vers zéro avec a , pour a assez petit on obtient une suite bornée dans $L^\infty(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}))$ et dans $L^\infty(\mathbb{R};L^\infty(\mathbb{R}))$, cela suffit pour prouver la convergence vers une limite régulière.

Remarque 1.- R. Glassey [4] a prouvé que si $p > 4$ certaines données initiales pouvaient engendrer, au bout d'un temps fini, des singularités ; l'hypothèse fondamentale que doit vérifier la donnée initiale est

(22) $$\int_{\mathbb{R}} \frac{2g}{(p+2)} |\varphi(x)|^{p+1} dx \ge \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2 dx$$

(cette hypothèse n'est plus vérifiée si on remplace φ par $\varepsilon\varphi$ et si on fait tendre ε vers zéro). Bien qu'il n'y ait pas de "propagation" la démonstration de Glassey se base sur l'existence d'invariants.

Remarque 2.- De la propriété de croissance pour la norme $|\ |_\infty$ on déduit l'existence de solutions $u_\pm$ de l'équation libre telles que l'on ait

$$\lim_{t\to\pm\infty} |u_\pm(.,t) - u|_2 = 0 .$$

On sait d'autre part que pour tout p l'équation (13) possède des solitons, qui ne se comportent pas comme des solutions de l'équation libre, mais bien sûr ces solitons ne vérifient pas une condition du type (15) avec a petit. Enfin pour $p = 3$ on peut résoudre explicitement (15) avec la méthode inverse (cf. Zakharov et Shabat [17]) et dans ce cas on obtient des solutions vérifiant une condition du type (15) mais se comportant asymptotiquement comme une somme de solitons.

IV. L'équation des ondes non linéaire en dimension supérieure à 1

En dimension 1 les solutions de l'équation des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ s'écrivent comme sommes d'ondes se propageant aux vitesses ± 1 ; elles ne décroissent pas (en norme du sup) ; par contre pour $d \ge 2$ on a un phénomène de dispersion : d'une part l'énergie de la solution est conservée :

(23) $$\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 + |\nabla u(x,t)|^2\right) dx\right) = 0 ,$$

d'autre part $u(.,t) = \sin t\sqrt{-\Delta}\varphi$ solution du problème

(24) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 , \quad u(x,0) = 0 , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi(x) .$$

vérifie pour d impair la relation

(25) $$|u(x,t)| \le Ct^{-(d-1)/2} |D_x^{(d-1)/2}\varphi|_1$$

et pour n pair la relation

(26) $$|u(x,t)| \le Ct^{-(d-1)/2} \sum_{i=0}^{d/2} |D_x^i \varphi|_1 \ .$$

On se propose d'utiliser cette décroissance pour prouver l'existence, pour tout t, de solutions d'équations des ondes non linéaires, avec des données initiales suffisamment petites.

On considérera donc des équations de la forme

(27) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = G(u, D_i u, D_{ij}^2 u) \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \ ,$$

avec des données initiales

(28) $$u(x,0) = u_o(x) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)$$

assez petites.

Si $d = 3$ et si G est une non linéarité cubique de la forme

$$G(u, D_i u, D_{ij} u) = u^2 (\Sigma \alpha_i (u) D_i u)$$

ou de la forme $G(u, D_i u, D_{ij} u) = u^3$, on montre que (27) admet une solution régulière pour tout t, si les données initiales sont suffisamment petites.

La démonstration s'obtient en s'inspirant des majorations a priori du § III en utilisant (25) au lieu de (14). Le cas de la non linéarité quadratique échappe à cette méthode et en fait on peut prouver que pour $1 < p < 1+\sqrt{2}$, l'équation $\square u = |u|^p$ ne possède pas en dimension 3 de solution régulière pour tout t, ayant des données initiales à support compact, non identiquement nulle (John [7], Glassey [18]).

Le cas de la non linéarité quadratique reste donc à étudier. Ceci fait l'objet du

THÉORÈME 2 (Klainerman [9]).- <u>On considère l'équation des ondes dans</u> $\mathbb{R}^d$

(29) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = G(D_i u, D_{ij}^2 u) \ .$$

<u>On suppose que</u> $G(\xi_i, \eta_{ij})$ <u>est une fonction régulière de</u> ξ <u>et</u> η <u>nulle pour</u> $\xi = 0$ <u>et</u> $\eta = 0$. <u>Alors si</u> $d \ge 6$, <u>pour toutes données initiales régulières et assez petites, c'est-à-dire vérifiant une relation de la forme</u>

(30) $$(\|\nabla u_o\|_{L^1,N} + \|u_1\|_{L^1,N}) + (\|\nabla u_o\|_{L^2,N} + \|u_1\|_{L^2,N}) \le \eta \ ,$$

<u>l'équation</u> (29) <u>admet une solution régulière pour tout</u> t.

IV. <u>Démonstration du théorème</u> 2

On se propose de donner les idées principales de la démonstration. On va construire une suite u^n définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, convergeant vers la solution, mais on va choisir cette convergence quadratique pour compenser la faible non linéarité. On s'inspire de la méthode de Newton. Pour résoudre l'équation $\Phi(u) = 0$, on construit la suite u_n définie par la relation :

(31) $$u_{n+1} = u_n - (\Phi'(u_n))^{-1}\Phi(u_n)$$

Ici on désignera par $\Phi(u)$ l'opérateur :

(32) $$\Phi(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - G(D_i u, D_{ij}^2 u)$$

défini sur les fonctions régulières.

On suppose que $\lambda \longrightarrow G(\lambda)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{2d}$ vérifiant pour λ petit :

(33) $$|G(\lambda)| \leq C|\lambda|^2 .$$

On note Λu le vecteur de composantes $(D_i u, D_{ij}^2 u)$. L'opérateur $\Phi'(u)v$ s'écrit

(34) $$\Phi'(u)v = \Box v - G'_\lambda(\Lambda u)\Lambda v ;$$

et la méthode de Newton conduit à l'introduction de la suite u^n définie par les relations

(35) $$\Box u^o = 0 , \quad u^o(.,0) = u_o(.) , \quad \frac{\partial u^o}{\partial t}(.,0) = u_1(.) ,$$

(36) $$v^n(.,0) = \frac{\partial v^n}{\partial t}(.,0) , \quad \Box v^n(.,0) - G'_\lambda(\Lambda u^n)\Lambda v^n = -\Phi(u^n) ,$$

(37) $$u^{n+1} = u^n + v^n .$$

Dans le passage de u^n à $\Phi(u^n)$, puis à v^n on contrôle "mal" la régularité et la décroissance pour $t \longrightarrow \infty$, aussi suivant la démonstration du théorème de Nash Moser [14,15], donnée par Hörmander [6] on introduit une suite d'opérateurs régularisants S_n et on modifie légèrement le schéma d'itération.

On désigne par $\chi(t)$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,1/2]$ et par $\rho(x)$ une fonction positive indéfiniment dérivable, à support dans la boule de rayon 1 , vérifiant $\int \rho(x)dx = 1$. On pose

(38) $$(\tilde{S}_\theta v)(x,t) = \chi(\theta t)(\theta^d \rho(\theta .) * v(.,t))(x) , \quad \tilde{S}_n = S_{2^n} \quad \text{si } n > 0 .$$

$\tilde{S}_n$ converge vers l'identité.

On remplace l'opérateur linéaire figurant dans le premier membre de (36) par l'opérateur

(39) $$L_n . = \Box . - G'_\lambda(\tilde{S}_n(\Lambda u^n))\Lambda .$$

On définit maintenant les suites u^n et v^n par les relations

(40) $$L_n v^n = g_n , \quad v_n(.,0) = \frac{\partial v^n}{\partial t}(.,0) = 0$$

(41) $$g_n = -(\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1})(\sum_{i=0}^{n-2} e_i) - \tilde{S}_n e_{n-1} - (\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1})\Phi(u^o)$$

(42) $$e_i = \Phi(u_{i+1}) - \Phi(u_i) - L_i(u_{i+1} - u_i)$$

De (40), (41) et (42) on déduit que l'on a

(43) $$\Phi(u_{n+1}) = (I - \tilde{S}_n)\sum_{i=0}^{n-2} e_i + e_n + (I - \tilde{S}_n)\Phi(u_o)$$

Comme $\tilde{S}_n$ converge vers l'identité, on déduit que si u_n est une suite convergente, sa limite u vérifie la relation $\Phi(u) = 0$.

Il faut maintenant prouver la convergence de la suite u_n . Cette convergence est assurée si la suite v_n décroit, pour des normes convenables, comme $2^{-\alpha n}$.

On introduit donc les normes :

(44) $$\|w\|_{k,L} = \sup_{t,|\alpha|\leq L} (1+t)^k \int |D^\alpha w(x,t)|^2 dx$$

et

(45) $$|w|_{k,L} = \sup_{t,|\alpha|\leq L} (1+t)^k \int |D^\alpha w(x,t)| dx \ .$$

On notera $\|w\|_L$ et $|w|_L$ les normes $\|w\|_{0,L}$ et $|w|_{0,L}$.

On choisit ε et $\bar\varepsilon$ petits, β supérieur à 1 et vérifiant la relation :

(46) $$\frac{d-1}{2} > 2\beta + \bar\varepsilon \ .$$

Par récurrence, on va montrer que l'on a les inégalités

$(47)_j$ $$\|\Lambda v_j\|_L \leq \delta 2^{n(-\beta+\bar\varepsilon L)} \ ,$$

$$|\Lambda v_j|_{k,L} \leq \delta 2^{n(k-\beta+\bar\varepsilon L)} \ ,$$

$$|\Lambda u_j|_{1+\varepsilon,0} \leq 1 \ , \ \|\Lambda u_j\|_0 \leq 1 \ ,$$

pour tout k , $0 \leq k \leq k_0 = \frac{n-1}{2}$ et tout L , $0 \leq L \leq \tilde L$ où $\tilde L$ est un entier assez grand. Ceci pourvu que ces inégalités soient vérifiées pour $j = 0,1$ avec δ assez petit.

La démonstration se fait en montrant que si les inégalités $(47)_j$ sont vraies jusqu'à l'ordre $j-1$, elles le sont à l'ordre n . Ceci s'obtient en combinant la décroissance, l'effet régularisant, qui fait apparaître des puissances de 2 et le fait que e_i est "presque" quadratique en $u_{i+1} - u_i$.

Par exemple si on admet les inégalités $(47)_j$ jusqu'à l'ordre $n-1$, on prouve que l'on a :

(48) $$\|\Lambda v_n\|_{\tilde L} \leq C(\|g_n\|_{1+\varepsilon,\tilde L+\gamma} + |S_n \Lambda u_n|_{\frac{1+\varepsilon}{p},\tilde L+\gamma} \cdot \|g_n\|_{1+\varepsilon,0} + |S_n \Lambda u_n|_{\tilde L} \|g_n\|_{1+\varepsilon,\gamma})$$

où γ est un entier convenable assez grand.

En utilisant le fait que g_n est "quadratique", en tenant compte des majorations à l'ordre $n-1$ et du rôle régularisant de S_n on déduit de (48) la relation

(49) $$\|\Lambda v_n\|_{\tilde L} \leq C\delta^2 2^{n((1+\varepsilon)-2\beta+\bar\varepsilon(\tilde L+\gamma))} \ .$$

En choisissant ε et $\bar\varepsilon$ assez petits, on a :

$$1 + \varepsilon - 2\beta + \bar\varepsilon(L+\gamma) < -\beta + \bar\varepsilon \tilde L \ .$$

On choisit ensuite δ de manière à vérifier $C\delta < 1$ (C est une constante type Sobolev indépendante de n), on a ainsi déduit la première relation de (47) pour $L = \tilde L$ et $j = n$, on déduirait de même la seconde pour $k = k_0$ et $L = \tilde L$, à l'ordre n , les autres s'obtiennent par interpolation.

<u>Remarque</u> 3.- La relation (46) doit être vérifiée pour assurer la décroissance des itérés ; c'est cette relation qui impose $d \geq 6$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. BARDOS et U. FRISCH - Finite time regularity for bounded and unbounded ideal incompressible fluid. Turbulence and Navier stokes equation, Springer-Verlag Lecture Notes, n° 565 (ed. R. Temam).

[2] J. CHADAM - Asymptotics for $\Box u = m^2 u + G(x,t,u,u_x,u_t)$ Global existence and Decay, Annali della scuola Norm. Sup. di Pisa, Vol. 26(1972), 31-65.

[3] H. FUJITA - On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + n^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, sect. 1, 13(1966), 109-124.

[4] R. GLASSEY - On the blowing up of solution to the Cauchy problem for the non linear Schrödinger equation, J. Math. Phys., 18(1977), 1794-1799.

[5] J. GINIBRE et G. VELO - On a class of non linear equations, (to appear).

[6] L. HORMANDER - Implicit function theorem, Lectures at Stanford Univ., Eté 1977.

[7] F. JOHN - Blow up of solution of non linear wave equations in three space dimensions, Manuscripta Math., 28(1979), 235-268.

[8] F. JOHN - Formation of singularities in one dimensional non linear wave propagation, Com. Pure Appl. Math., 27(1974), 377-405.

[9] S. KLAINERMAN - Global existence for non linear wave equations, Comm. Pure Appl. Math., 33(1980), 43-101.

[10] S. KLAINERMAN - Long time behaviour of solutions to non linear evolution equations, preprint.

[11] S. KLAINERMAN et A. MAJDA - Formation of singularities for wave equations including the non linear vibrating string, preprint.

[12] P. LAX - Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves, Regional Conference Serie in Applied Math., SIAM, 1973.

[13] R. MORF, S. ORZAG et U. FRISCH - Spontaneous singularity in three dimensional inviscid, incompressible flow, Phys. Review Letters, Vol. 44, n° 9(1980), 572-575.

[14] J. MOSER - A new technique for the construction of solution of non linear differential equations, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 47(1961), 1824-1831.

[15] J. NASH - The embedding problem for Riemannian manifolds, Ann. Math., 63(1956), 20-63.

[16] W. STRAUSS - Non linear scattering theory, Scattering theory in Math. Phys. 53-78, La Vita et Marchand (eds) D. Reidel (1974).

[17] V. E. ZAKHAROV et A. B. SHABAT - Exact theory of two dimensional self focusing and one dimensional self modulation of waves in non linear media, J. Exp. and Th. Phys., 61(1971), 118-134.

[18] R. GLASSEY - Finite-time blow up for solutions of non linear wave equations, preprint.

[19] T.P. LIU - Development of singularities in the non linear waves for quasilinear hyperbolic partial differential equations, J. Diff. Eq., 33(1979), 92-111.

Claude BARDOS

Université de Nice
Département de Mathématiques
Parc Valrose
06034 NICE Cedex