

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PIERRE GABRIEL

## **Algèbres auto-injectives de représentation finie**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1981, exp. n° 545, p. 20-39

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1979-1980\\_\\_22\\_\\_20\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1979-1980__22__20_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Algèbres auto-injectives de représentation finie

(d'après Christine Riedtmann)

par Pierre Gabriel

Dans tout l'exposé qui suit  $k$  désigne un corps algébriquement clos. Sauf mention du contraire, les algèbres considérées sont supposées définies sur  $k$ , associatives, unifères et de  $k$ -dimension finie. Nous désignons par  $\text{mod } A$  la catégorie des modules à droite de  $k$ -dimension finie sur l'algèbre  $A$ . L'algèbre  $A$  est dite sobre si  $A/\text{rad } A$  est un produit d'exemplaires de  $k$ . Elle est connexe si  $0$  et  $1$  sont les seuls idempotents centraux.

Nous remercions Christine Riedtmann de l'aide apportée pendant la préparation de cet exposé. Dans le but d'informer rapidement le lecteur non spécialisé en évitant l'inflation de notions abstraites nous avons dû opter pour une présentation quelque peu "étriquée", limitée aux algèbres de représentation finie.

1. Algèbres de représentation finie

Rappelons qu'un module  $M \in \text{mod } A$  est dit indécomposable si  $M \neq 0$  et si, dans toute décomposition  $M = M_1 \oplus M_2$  on a  $M_1 = 0$  ou  $M_2 = 0$ . D'après Krull-Remak-Schmidt [9] deux décompositions d'un module  $M \in \text{mod } A$  en somme directe d'indécomposables se déduisent l'une de l'autre par un automorphisme de  $M$ . La classification des modules à isomorphisme près se ramène donc à celle des indécomposables.

L'algèbre  $A$  est dite de représentation finie si le nombre de types (=classes d'isomorphisme) d'indécomposables  $M \in \text{mod } A$  est fini. Ainsi, l'algèbre de polynômes tronquée  $k[T]/T^n$  est de représentation finie: tout indécomposable est isomorphe à l'un des modules  $k[T]/T^r$  pour  $r=1,2,\dots,n$ . En fait, toute algèbre commutative de représentation finie est isomorphe à un produit fini d'algèbres de polynômes tronquées. Cela résulte de ce que l'algèbre  $k[X,Y]/(X^2,XY,Y^2)$  est de représentation infinie: on obtient une infinité de types d'indécomposables en faisant opérer  $X$  et  $Y$  sur  $k^{2m}$  au moyen des matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_m \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ J(m,\lambda) & 0 \end{bmatrix}$$

où  $J(m,\lambda)$  désigne la matrice de Jordan de valeur propre  $\lambda$  et de taille  $m \times m$ :

$$J(m, \lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \vdots \\ 1 & \lambda & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \in k^{m \times m}$$

On connaît de nombreuses algèbres de représentation finie (non commutatives!): voir par exemple [13],[7],[11],[24] ou [33]. Mais les ingrédients intervenant dans ces algèbres sont tous de nature combinatoire. On conjecture donc que, pour une dimension donnée  $d$ , il n'y a qu'un nombre fini de types d'algèbres de représentation finie. Pour certaines classes particulières d'algèbres la conjecture a été prouvée par Bongartz [8], Kupisch [22,23] et Riedtmann [27].

Soit  $G$  un groupe fini. On sait depuis longtemps que, si la caractéristique  $p$  de  $k$  est positive, l'algèbre  $k[G]$  du groupe  $G$  est de représentation finie ssi les  $p$ -sous-groupes de Sylow de  $G$  sont cycliques ([17], [19]). Mais on ne connaît pas exactement la structure de ces algèbres de groupes; on sait seulement depuis une dizaine d'années qu'elles sont associées à des arbres planaires ([10],[18],[20,21],[16],[26],[25],[14]). Les démonstrations utilisent en particulier le fait que la représentation régulière de  $G$  est injective: en effet, pour tout  $M \in \text{mod } k[G]$ , l'application  $\text{Hom}_k(M, k) \rightarrow \text{Hom}_{k[G]}(M, k[G])$ ,  $\phi \mapsto \sum_{g \in G} \phi(?g^{-1})g$  est bijective.

On dit que l'algèbre  $A$  est auto-injective (ou quasi-frobeniusienne) lorsque la représentation régulière  $A_A \in \text{mod } A$  est injective. L'introduction de cette notion est justifiée un peu par l'exemple des algèbres de groupes. Il y a aussi des raisons théoriques que nous découvrirons plus tard. Mais, pour nous dans cet exposé, la notion est justifiée avant tout par les résultats de Riedtmann qui obtient la classification que nous allons exhiber des algèbres auto-injectives de représentation finie.

## 2. L'algèbre d'Auslander d'une algèbre de représentation finie

2.1 Soit  $E = \text{End } M_A$  l'algèbre des endomorphismes d'un module  $M \in \text{mod } A$ . On sait bien que le foncteur  $X \mapsto \text{Hom}_A(M, X)$  induit une équivalence entre la sous-catégorie pleine  $\text{add } M$  de  $\text{mod } A$  formée des facteurs directs de  $M^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , et la sous-catégorie pleine  $\text{proj } E$  de  $\text{mod } E$  formée des modules projectifs. Lorsque  $A$  est de représentation finie et que tout indécomposable de  $\text{mod } A$  est isomorphe à un facteur direct de  $M$ , on obtient donc une équivalence entre  $\text{mod } A$  et  $\text{proj } E$ , de sorte que la connaissance de  $E$  permet de récupérer  $\text{mod } A$  à équivalence près et l'algèbre  $A$  à équivalence près au sens de Morita.

Supposons  $A$  de représentation finie, choisissons une suite  $M_1, \dots, M_r$  de représentants des indécomposables de  $\text{mod } A$  et posons  $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_r$ . On appelle algèbre d'Auslander de  $A$  toute algèbre isomorphe à  $E = \text{End } M_A$ . Comme nous supposons  $M_i \not\cong M_j$  pour  $i \neq j$ , l'algèbre  $E$  est sobre.

Proposition [1]: Soit  $E$  une algèbre sobre. Les assertions suivantes sont équivalentes:

- (i)  $E$  est l'algèbre d'Auslander d'une algèbre de représentation finie.
- (ii) Un module  $P \in \text{mod } E$  est projectif ssi  $\text{Hom}_E(S, P) = \text{Ext}_E^1(S, P) = 0$  pour tout  $E$ -module simple de torsion  $S$ .
- (iii) La dimension homologique globale de  $E$  est  $\leq 2$  et, dans la résolution injective minimale  $0 \rightarrow E_E \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \dots$  de  $E_E$ ,  $I_0$  et  $I_1$  sont projectifs.
- (iv) La catégorie  $\text{proj } E$  est abélienne.
- (v)  $E^{\text{op}}$  est l'algèbre d'Auslander d'une algèbre de représentation finie.

Rappelons qu'un  $E$ -module  $Y$  est dit de torsion si  $\text{Hom}_E(S, Y) = 0$  pour tout facteur de Jordan-Hölder  $S$  de  $Y$ . Il est dit sans torsion si  $\text{Hom}_E(T, Y) = 0$  pour tout module de torsion  $T$ .

2.2 Avant de démontrer brièvement la proposition précédente, nous rappelons quelques éléments de localisation dans le cadre des algèbres de dimension finie ([12], [31]). Soient  $E$  une algèbre et  $S$  un ensemble de types de modules simples  $S \in \text{mod } E$ . Un module  $N \in \text{mod } E$  est dit de  $S$ -torsion si le type de tout facteur de Jordan-Hölder de  $N$  appartient à  $S$ . Il est dit sans  $S$ -torsion si  $\text{Hom}_E(S, N) = 0$  pour tout module simple de  $S$ -torsion  $S$ . Enfin on dit que  $N$  est  $S$ -fermé si  $\text{Hom}_E(S, N) = \text{Ext}_E^1(S, N) = 0$  pour tout module simple de  $S$ -torsion  $S$ ; il revient au même de dire que tout morphisme  $u: U \rightarrow V$ , tel que  $\text{Ker } u$  et  $\text{Coker } u$  soient de  $S$ -torsion, induit une bijection  $\text{Hom}_E(u, N): \text{Hom}_E(V, N) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_E(U, N)$ . La sous-catégorie pleine de  $\text{mod } E$  formée des modules  $S$ -fermés est abélienne; on l'appelle catégorie-quotient de  $\text{mod } E$  par  $S$  et on la note  $\text{mod } E/S$ . Le foncteur-inclusion  $\text{mod } E/S \rightarrow \text{mod } E$  est exact à gauche et possède un adjoint à gauche exact  $L$ . Enfin, si  $Y \in \text{mod } E$ , on a  $LY = 0$  ssi  $Y$  est de  $S$ -torsion.

Dans le cadre auquel nous nous restreignons ici, la catégorie-quotient est équivalente à une catégorie de modules et l'adjoint à gauche  $L$  peut être construit comme suit: Soit  $P \in \text{mod } E$  un projectif tel que  $P/\text{rad } P$  soit sans  $S$ -torsion et contienne une copie de chaque module simple sans  $S$ -torsion. Pour construire  $P$  on peut par exemple choisir un idempotent convenable  $e \in E$  et poser  $P = eE$ . Soit  $P^* = \text{Hom}_E(P, E) (\xrightarrow{\sim} eE)$  et  $A = \text{End } P \xrightarrow{\sim} P \otimes_E P^* (\xrightarrow{\sim} eEe)$ . Les

catégories  $\text{mod } A$  et  $\text{mod } E$  sont reliées par un couple de foncteurs adjoints  $D: \text{mod } A \rightarrow \text{mod } E$ ,  $X \mapsto \text{Hom}_A(P^*, X)$  et  $G: \text{mod } E \rightarrow \text{mod } A$ ,  $Y \mapsto Y \otimes_E P^* \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_E(P, Y) (\xrightarrow{\sim} Ye)$ . On a  $GY=0$  ssi  $Y$  est de  $S$ -torsion, les applications canoniques  $GDX \rightarrow X$  sont bijectives,  $D$  est pleinement fidèle,  $DX$  est  $S$ -fermé pour tout  $X \in \text{mod } A$  et  $D$  induit une équivalence  $\text{mod } A \xrightarrow{\sim} \text{mod } E/S$ . L'adjoint à gauche cherché  $L: \text{mod } E \rightarrow \text{mod } E/S$  est le composé de cette équivalence avec  $G$ .

2.3 On rencontre la situation décrite en 2.2 en procédant comme suit: Partons d'une algèbre  $A$  et d'un générateur de  $\text{mod } A$ , c'est-à-dire d'un module  $M \in \text{mod } A$  tel que  $A_A$  soit facteur direct de  $M^n$  pour un  $n \in \mathbb{N}$  convenable. Posons  $E = \text{End } M_A$ . Le foncteur  $X \mapsto \text{Hom}_A(X, M)$  induit une anti-équivalence de  $\text{add } M$  sur  $\text{proj}(E^{\text{op}})$ . Puisque  $A_A \in \text{add } M$ , il s'ensuit que  ${}_E M = \text{Hom}_A(A_A, M)$  est un  $E$ -module à gauche projectif et que  $\text{End}_E M \xrightarrow{\sim} (\text{End } A_A)^{\text{op}} \xrightarrow{\sim} A^{\text{op}}$  s'identifie à l'anneau des homothéties de  $M_A$ .

Comme  $M_A$  est un générateur de  $\text{mod } A$ , le foncteur  $D: \text{mod } A \rightarrow \text{mod } E$ ,  $X \mapsto \text{Hom}_A(M, X)$  est pleinement fidèle. Comme  ${}_E M$  est projectif, l'adjoint à gauche  $G: \text{mod } E \rightarrow \text{mod } A$ ,  $Y \mapsto Y \otimes_E M$  est exact. Il s'ensuit que  $D$  induit une équivalence de  $\text{mod } A$  sur  $\text{mod } E/S$ , où  $S$  est l'ensemble des types de modules simples  $S \in \text{mod } E$  tels que  $GS=0$ . On peut décrire  $S$  explicitement: Si  $L \in \text{add } M$  est indécomposable,  $DL$  est un  $E$ -module projectif indécomposable, et  $DL/\text{rad } DL$  est un  $E$ -module simple. L'application  $L \mapsto DL/\text{rad } DL$  ainsi définie induit une bijection entre les types d'indécomposables de  $\text{add } M$  et les types de  $E$ -modules simples. On voit facilement que  $DL/\text{rad } DL$  est de  $S$ -torsion ssi le  $A$ -module indécomposable  $L$  est non projectif.

Dans le cas particulier considéré en 2.1, où  $A$  est supposée de représentation finie, on a  $\text{add } M = \text{mod } A$ , et les  $E$ -modules projectifs coïncident avec les modules de la forme  $DX$ , c'est-à-dire avec les  $E$ -modules  $S$ -fermés. Il s'ensuit que les  $E$ -modules de  $S$ -torsion coïncident alors avec les modules de torsion au sens de 2.1.

2.4 Démonstration de la proposition 2.1: L'équivalence (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) résulte directement de 2.2 et 2.3.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Soit  $S$  l'ensemble des types de  $E$ -modules simples de torsion. L'assertion (ii) signifie que les  $E$ -modules projectifs coïncident avec les modules  $S$ -fermés. Le noyau d'un morphisme entre modules projectifs est donc  $S$ -fermé, donc projectif. Ceci montre que la dimension globale est  $\leq 2$ . De même, comme  ${}_E E$  est sans torsion,  $I_0$  l'est aussi; donc  $I_0$  est  $S$ -fermé et projectif.

Comme  $\text{Hom}_E(S, I_1) = \text{Ext}_E^1(S, E) = 0$  pour tout module simple de torsion  $S$ ,  $I_1$  est sans torsion, donc  $S$ -fermé, donc projectif.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii): Comme  $I_0$  et  $I_1$  sont projectifs, ils sont sans torsion, et l'on a  $\text{Hom}_E(S, E) = \text{Hom}_E(S, I_0) = 0$  et  $\text{Ext}_S^1(S, E) = \text{Hom}_E(S, I_1) = 0$  pour tout module simple de torsion  $S$ . Il s'ensuit que tout module projectif est  $S$ -fermé. Réciproquement, si  $P$  est  $S$ -fermé, soit  $0 \rightarrow P \rightarrow J_0 \rightarrow J_1 \dots$  sa résolution injective minimale. Comme  $J_0$  et  $J_1$  sont sans torsion, leurs facteurs directs indécomposables sont des enveloppes injectives de modules simples sans torsion. Ils sont donc isomorphes à des facteurs directs de  $I_0$  et sont projectifs. Comme  $J_0$  et  $J_1$  sont projectifs et que la dimension globale de  $E$  est  $\leq 2$ , il s'ensuit que  $P$  est projectif.

(i)  $\Rightarrow$  (iv) : clair.

(iv)  $\Rightarrow$  (iii) : Le foncteur-inclusion  $\text{proj } E \rightarrow \text{mod } E$  s'identifie au foncteur  $P \mapsto \text{Hom}(E, P)$ . Il commute donc avec la construction des noyaux, ce qui prouve la première partie de (iii). D'autre part, dans la catégorie  $\text{Mod } E$  de tous les  $E$ -modules à droite, les limites inductives filtrantes de modules projectifs sont plates, donc projectives. Il s'ensuit facilement que la catégorie  $\text{Proj } E$  de tous les  $E$ -modules à droite projectifs est abélienne, que les limites inductives filtrantes y sont exactes (elles commutent avec le foncteur-inclusion  $\text{Proj } E \rightarrow \text{Mod } E$ ) et que  $E_E$  est un générateur de  $\text{Proj } E$ . Le foncteur-inclusion  $\text{Hom}(E, ?) : \text{Proj } E \rightarrow \text{Mod } E$  possède donc un adjoint à gauche exact ([32]), de sorte qu'il transforme injectifs en injectifs. Si  $0 \rightarrow E \rightarrow J_0 \rightarrow J_1 \dots$  est une résolution injective de  $E$  dans  $\text{Proj } E$ ,  $J_0$  et  $J_1$  sont à la fois projectifs et injectifs dans  $\text{Mod } E$ , et la suite  $0 \rightarrow E \rightarrow J_0 \rightarrow J_1$  est exacte dans  $\text{Mod } E$ , ce qui entraîne la deuxième partie de (iii).

(i)  $\Leftrightarrow$  (v) : résulte de (i)  $\Leftrightarrow$  (iv) si l'on tient compte de l'antiéquivalence  $\text{proj } E \xrightarrow{\sim} \text{proj } E^{\text{op}}$ ,  $P \mapsto \text{Hom}_E(P, E)$ .

2.5 L'intérêt de la proposition d'Auslander réside dans le fait qu'on sait comment vérifier si une algèbre donnée  $E$  satisfait à la condition (iii), alors qu'il est difficile de vérifier si une algèbre  $A$  est de représentation finie ou non. L'inconvénient est que les algèbres d'Auslander se prêtent moins à "l'expérimentation" que les algèbres de représentation finie, dont on connaît beaucoup d'exemples de petite dimension, alors que par leur définition même les algèbres d'Auslander sont beaucoup plus grosses.

Un des résultats de Riedtmann est que les avantages des algèbres d'Auslander prévalent sur leurs inconvénients. En fait, sa classification fournit à la

fois les algèbres auto-injectives de représentation finie et leurs algèbres d'Auslander. Mais la description des algèbres d'Auslander est à la fois plus simple et plus frappante, et notre chemin passe par elles. Qu'on nous pardonne donc d'avoir insisté sur les sorites précédents, plus ou moins triviaux.

Résumons le problème posé: Soit  $A$  une algèbre de représentation finie, et désignons par  $D: \text{mod } A \rightarrow \text{mod } E$  le foncteur  $X \mapsto \text{Hom}_A(M, X)$ , les notations étant celles de 2.1. Si  $P \in \text{mod } A$  est projectif,  $DP \in \text{mod } E$  est projectif et sa "coiffe"  $DP/\text{rad } DP$  est sans torsion. De même, si  $I \in \text{mod } A$  est injectif,  $DI \in \text{mod } E$  est injectif et son socle est sans torsion. La classification des algèbres auto-injectives de représentation finie se ramène donc à celle des algèbres d'Auslander pour lesquelles les modules projectifs de coiffe sans torsion coïncident avec les modules injectifs de socle sans torsion.

### 3. Détermination d'une algèbre par carquois et relations

3.1 Un carquois est formé de points et de flèches. Le carquois  $K_E$  d'une algèbre  $E$  a pour points les types de modules simples. Si  $S, T \in \text{mod } E$  sont deux modules simples de types  $i$  et  $j$ , le nombre de flèches de  $K_E$  allant de  $j$  vers  $i$  est égal à  $[\text{Ext}_E^1(S, T): k]$ . Ainsi  $k[T]/T^n$  a pour carquois  $\circlearrowleft^T$ ,  $k[X, Y]/(X^2, XY, Y^2)$  a pour carquois  $\begin{smallmatrix} X & & Y \\ \curvearrowright & & \curvearrowleft \end{smallmatrix}$ . L'algèbre des matrices triangulaires  $T_4 = \{(a_{ij}) \in k^{4 \times 4} : a_{ij} = 0 \text{ pour } i > j\}$  a pour carquois  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ .

Si  $K$  est un carquois, une flèche composée de  $K$  allant de  $i$  vers  $j$  est une suite de points et de flèches  $(j|\alpha_n, \dots, \alpha_1|i)$  telle que  $n \geq 0$ ,  $i = \text{source}(\alpha_1)$ ,  $\text{but}(\alpha_m) = \text{source}(\alpha_{m+1})$  pour  $1 \leq m < n$  et  $\text{but}(\alpha_n) = j$ ; lorsque  $n = 0$ , nous supposons  $i = j$ . L'algèbre  $k[K]$  du carquois  $K$  a pour  $k$ -base les flèches composées, la multiplication étant définie par la formule

$$(m|\beta_p, \dots, \beta_1|\ell)(j|\alpha_n, \dots, \alpha_1|i) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq \ell \\ (m|\beta_p, \dots, \beta_1, \alpha_n, \dots, \alpha_1|i) & \text{si } j = \ell. \end{cases}$$

### 3.2 Toute algèbre sobre $E$ est un quotient de l'algèbre de son carquois:

En effet, soit  $1_E = e_1 + \dots + e_r$  une partition de l'unité en idempotents primitifs orthogonaux deux à deux. A une telle partition est associée la décomposition  $E = e_1 E \oplus \dots \oplus e_r E$  de  $E$  en somme directe de projectifs indécomposables, dont les "coiffes"  $e_i E / e_i \text{rad } E$  représentent les différents types de modules simples. Nous pouvons donc identifier ces types aux nombres naturels  $1, 2, \dots, r$ . Posant  $R = \text{rad } E$ , on voit facilement que

$$[e_i R e_j : e_i R^2 e_j] = [\text{Ext}_E^1(e_i E / e_i R, e_j E / e_j R) : k]$$

$$= [\text{Ext}_E^1(E e_j / R e_j, E e_i / R e_i) : k] = \text{nombre } n_{ij} \text{ de flèches de } j \text{ vers } i,$$

et l'on peut choisir, pour tout couple  $(i, j)$ , des éléments  $f_{ij}^1, \dots, f_{ij}^{n_{ij}} \in e_i R e_j$  dont les classes modulo  $e_i R^2 e_j$  forment une base de  $e_i R e_j / e_i R^2 e_j$ . Ceci nous fournit un homomorphisme surjectif d'algèbres

$$\phi : k[K_E] \rightarrow E$$

qui envoie  $(i || i)$  sur  $e_i$  et les  $n_{ij}$  flèches de  $j$  vers  $i$  sur  $f_{ij}^1, \dots, f_{ij}^{n_{ij}}$ . On peut donc décrire  $E$  au moyen de  $K_E$  et d'un système de générateurs  $r_\alpha$  de l'idéal bilatère  $\text{Ker } \phi$  (les "relations  $r_\alpha = 0$ "). Dans le cas de  $k[T]/T^n$ ,  $k[K_E]$  s'identifie à l'algèbre de polynômes  $k[T]$  et  $\text{Ker } \phi$  est déterminé par la seule relation  $T^n = 0$ . Dans le cas de  $k[X, Y]/(X^2, XY, Y^2)$ ,  $k[K_E]$  est l'algèbre associative libre engendrée par  $X$  et  $Y$ , et  $\text{Ker } \phi$  est déterminé par les relations  $X^2 = XY = YX = Y^2 = 0$ . Dans le cas de  $T_4$  enfin, on a  $\text{Ker } \phi = 0$  et  $k[K_{T_4}] \cong T_4$ .

3.3 Notre propos est de décrire par carquois et relations les algèbres d'Auslander des algèbres auto-injectives de représentation finie. Reprenons donc les notations de 2.1: Soient  $A$  une algèbre de représentation finie,  $M_1, \dots, M_r$  une suite de représentants des indécomposables de  $\text{mod } A$ ,  $M$  leur somme directe et  $E = \text{End}_A M$ . A la décomposition donnée de  $M$  est associée la partition de l'unité  $1_E = e_1 + \dots + e_r$ , où  $e_i \in E$  désigne la projection de  $M$  sur  $M_i$  qui annule les autres facteurs. Dans notre numérotation des indécomposables de  $A$  nous plaçons en queue de liste les projectifs (et injectifs) indécomposables, soit  $M_{s+1}, \dots, M_r$  ( $n = r - s$  est le nombre de modules simples). Nous appelons algèbre stable associée à  $A$  le quotient  $\bar{E} = E / \bigcap_{i > s} E e_i E$ . La notion d'algèbre stable remonte à [5], [34]: si l'on appelle homotopes deux morphismes  $f, g \in \text{Hom}_A(X, Y)$  dont la différence  $g - f$  se factorise par un projectif,  $\bar{E}$  est l'algèbre des classes d'homotopie des endomorphismes de  $M$ . Le carquois de  $\bar{E}$  s'obtient à partir de celui de  $E$  en biffant les  $n$  derniers points et les flèches attenantes. D'après 2.5 les points biffés sont les types de  $E$ -modules simples sans torsion.

Théorème (Riedtmann [27], [28], [29]): L'algèbre stable  $\bar{E}$  associée à une algèbre auto-injective de représentation finie connexe a pour carquois le quotient de  $\mathbb{Z}A_n$ ,  $\mathbb{Z}D_n$ ,  $\mathbb{Z}E_6$ ,  $\mathbb{Z}E_7$  ou  $\mathbb{Z}E_8$  par un groupe d'automorphismes

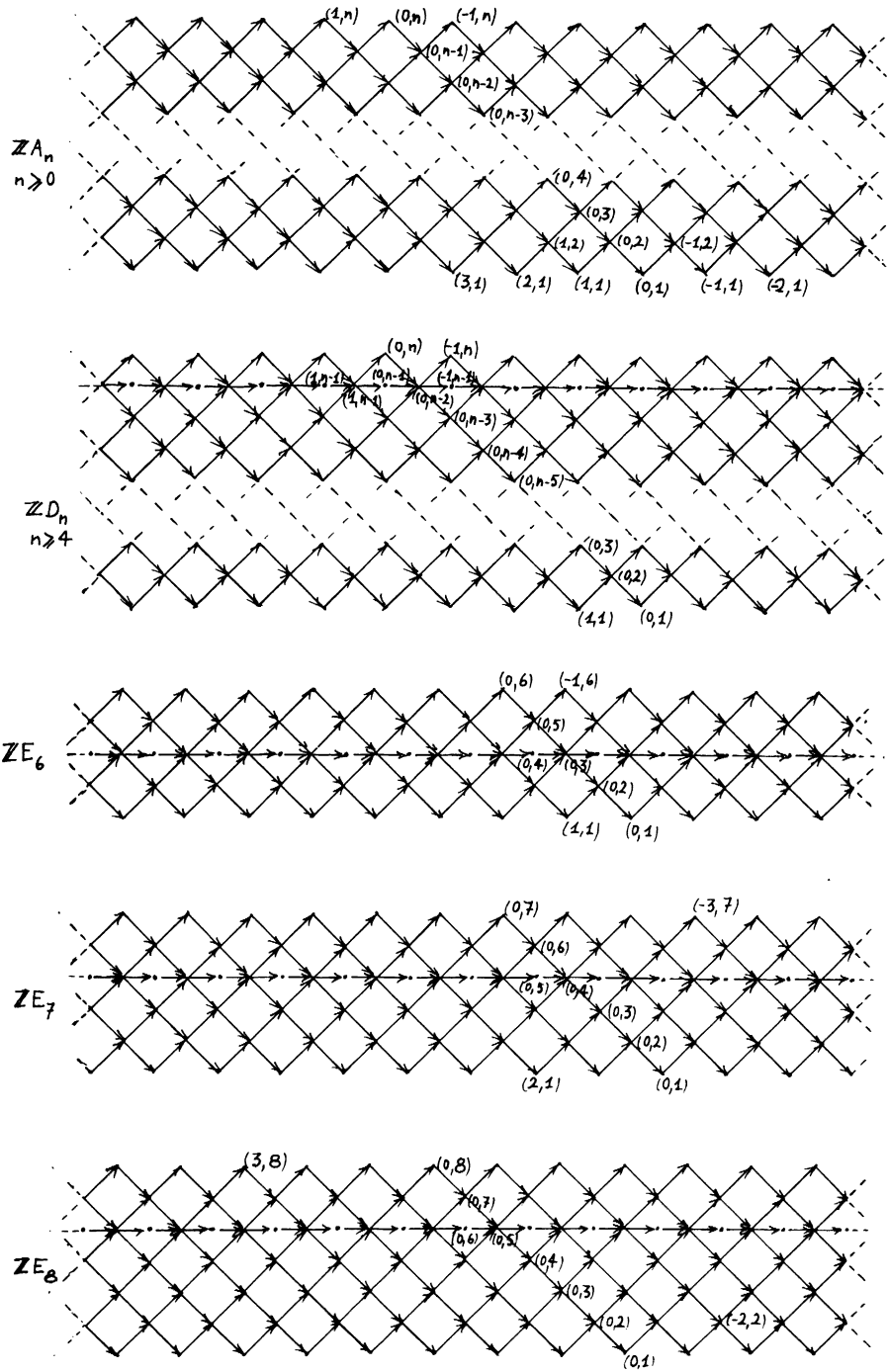
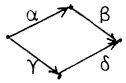
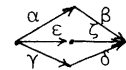
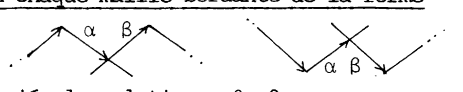


fig. 1

admissible. Les relations peuvent être choisies de la manière suivante:

A chaque maille simple  est associée la relation  $\beta\alpha + \delta\gamma = 0$ .

A chaque maille double  est associée la relation  $\beta\alpha + \delta\gamma + \zeta\epsilon = 0$

A chaque maille bordante de la forme  est associée la relation  $\beta\alpha = 0$ .

Un groupe d'automorphismes est dit admissible si le carquois-quotient (qui a pour points les classes de points, pour flèches les classes de flèches) n'a ni lacet  $\curvearrowright$  ni double-flèche  $\rightrightarrows$ . En fait, lorsque  $G$  parcourt les groupes admissibles, les quotients  $\mathbb{Z}A_n/G$ ,  $\mathbb{Z}D_n/G$  ... ne sont pas tous des carquois d'algèbres stables. Il y a d'autres restrictions que nous découvrirons plus loin.

3.4 Nous nous contentons de quelques indications sur la démonstration du théorème 3.3. Avec les notations de 3.2 il est clair que les applications  $f_{ij}^\ell : e_j E \rightarrow e_i E$  fournissent une présentation projective minimale

$$\bigoplus_j (e_j E)^{n_{ij}} \xrightarrow{(f_{ij}^\ell)} e_i E \rightarrow e_i E / e_i R \rightarrow 0$$

du module simple  $e_i E / e_i R$  de type  $i$ . Deux cas sont possibles:

a)  $i > s$ , i.e.  $e_i E / e_i R$  est sans torsion. Dans ce cas,  $e_i E / e_i R$  est contenu dans un module projectif, donc est de dimension projective  $\leq 1$ , et  $(f_{ij}^\ell)$  est injectif.

Réciproquement, supposons  $e_i E / e_i R$  de dimension projective  $\leq 1$ : si  $e_i E / e_i R$  est projectif, il est sans torsion. Si la dimension projective est 1,  $(f_{ij}^\ell)$  est injectif et non nul. Comme on a  $\text{Hom}_E(e_i E, E) \cong E e_i$ , on voit que  $\text{Ext}_E^1(e_i E / e_i R, E)$  s'identifie au conoyau de l'application  $E e_i \rightarrow \bigoplus_j (E e_j)^{n_{ij}}$ ,  $x \mapsto (x f_{ij}^\ell)$ . Comme  $f_{ij}^\ell \in R = \text{rad } E$ , ce conoyau n'est pas nul. Il s'ensuit que  $e_i E / e_i R$  est de dimension projective  $\leq 1$  ssi  $e_i E / e_i R$  est sans torsion.

b)  $i \leq s$ , i.e.  $e_i E / e_i R$  est de torsion. Dans ce cas nous affirmons que la résolution projective minimale de  $e_i E / e_i R$  est de la forme

$$0 \rightarrow e_h E \xrightarrow{(g_{jh}^m)} \bigoplus_j (e_j E)^{n_{ij}} \xrightarrow{(f_{ij}^\ell)} e_i E \rightarrow e_i E / e_i R \rightarrow 0,$$

où  $g_{jh}^m \in e_j R e_h$ , où les classes  $g_{jh}^m$  des  $g_{jh}^m$  modulo  $e_j R^2 e_h$  forment une base de  $e_j R e_h / e_j R^2 e_h$ , et où  $h \leq s$ .

En effet, partons plus généralement d'un module de torsion  $T \in \text{mod } E$  et de sa résolution projective minimale

$$(1) \quad 0 \rightarrow P_2 \xrightarrow{g} P_1 \xrightarrow{f} P_0 \rightarrow T \rightarrow 0$$

Pour tout  $N \in \text{mod } E$  posons  $E^* = \text{Hom}_E(N, E) \in \text{mod } E^{\text{op}}$ . Comme on a  $\text{Hom}_E(T, E) = \text{Ext}_E^1(T, E) = 0$ , la suite précédente donne par transposition une suite exacte

$$(2) \quad 0 \rightarrow P_0^* \xrightarrow{f^*} P_1^* \xrightarrow{g^*} P_2^* \rightarrow T' \rightarrow 0$$

avec  $T' = \text{Ext}_E^2(T, E) \in \text{mod } E^{\text{op}}$ . Nous affirmons que  $T'$  est de torsion: sinon on aurait un morphisme non nul  $h: P_2^* \rightarrow E$  tel que  $hg^* = 0$ , et par conséquent  $gh^* = 0$ ; ceci contredirait l'injectivité de  $g$ .

Comme la construction  $T \mapsto T'$  est réversible, il s'ensuit que (2) est une résolution projective minimale de  $T' \in \text{mod } E^{\text{op}}$ , et que le foncteur  $T \mapsto T' = \text{Ext}_E^2(T, E)$  est une antiéquivalence de la catégorie des  $E$ -modules à droite de torsion sur celle des  $E$ -modules à gauche de torsion. En particulier, si  $T$  est simple,  $T'$  l'est et  $g^*$  s'identifie à la présentation projective minimale

$$\bigoplus_j (E e_j)^{n_{ij}} \xrightarrow{(g_{jh}^m)} E e_h \rightarrow T' \rightarrow 0$$

d'un  $E$ -module à gauche simple de torsion. Comme  $T'$  est de torsion,  $h$  parcourt les nombres de 1 à  $r$  à l'exception de  $n=r-s$  d'entre eux. Comme d'autre part  $e_h E$  ne peut être injectif, les valeurs  $s+1, \dots, r$  sont exclues. Il s'ensuit que l'application  $i \mapsto h$  est une permutation de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, s\}$ : c'est la permutation d'Auslander-Reiten.

3.5 Dans ce qui précède les réminiscences d'algèbre commutative sont évidentes. En fait, on a une interprétation plus directe des phénomènes de dualité observés en interprétant les résolutions projectives précédentes au niveau des  $A$ -modules. Soit  $D: \text{mod } A \rightarrow \text{mod } E$  le foncteur tel que  $DX = \text{Hom}_A(M, X)$ . On a alors  $e_i E \xrightarrow{\sim} D M_i$  et les suites exactes

$$0 \rightarrow e_h E \xrightarrow{(g_{jh}^m)} \bigoplus_j (e_j E)^{n_{ij}} \xrightarrow{(f_{ij}^\ell)} e_i E$$

s'obtiennent au moyen de  $D$  à partir de suites exactes

$$0 \rightarrow M_h \xrightarrow{\gamma} \bigoplus_j M_j^{n_{ij}} \xrightarrow{\phi} M_i \rightarrow 0$$

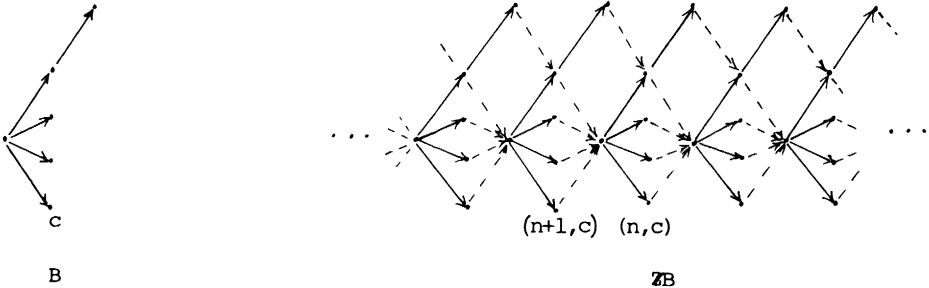
de  $\text{mod } A$ , les suites "presque scindées" d'Auslander-Reiten [4].

Le fait que  $\oplus(e_j E)^{n_{ij}} \rightarrow e_i E \rightarrow e_i E / e_i R \rightarrow 0$  soit une présentation projective implique au niveau de la suite d'Auslander-Reiten que tout morphisme non bijectif  $M_t \rightarrow M_i$  se factorise à travers  $\phi$ . Tenant compte de ce que  $\text{Hom}_E(M_h, M) \xrightarrow{\sim} Ee_h$  on voit de même que la présentation projective  $\oplus(Ee_j)^{n_{ij}} \rightarrow Ee_h \rightarrow Ee_h / Re_h \rightarrow 0$  assure à la suite d'Auslander-Reiten une propriété duale: tout morphisme non bijectif  $M_h \rightarrow M_t$  se factorise à travers  $\gamma$ .

Nous n'en dirons pas beaucoup plus, devant nous contenter ici de lancer quelques slogans et de renvoyer les lecteurs intéressés aux études détaillées. Ajoutons simplement qu'on déduit des relations entre  $E$  et suites d'Auslander-Reiten que le carquois de  $E$  n'a ni lacet ni double-flèche ([6],[2,3],[27]). La même propriété vaut pour le carquois de  $\bar{E}$ . De plus, d'après les observations faites, les points de  $\bar{E}$  sont soumis à la permutation d'Auslander-Reiten  $\pi$ , qui a la propriété suivante: pour tout sommet  $x$  de  $K_E$ , les sources des flèches de but  $x$  coïncident avec les buts des flèches de source  $\pi x$ . Riedtmann exprime les propriétés ainsi décrites de  $K_E$  en disant que  $K_E$  est un carquois de représentation stable.

Théorème (Riedtmann) [27]: Tout carquois de représentation stable est de la forme  $\mathbb{Z}B/G$ , où  $B$  est un arbre orienté et  $G$  un groupe d'automorphismes admissible du carquois de représentation stable  $\mathbb{Z}B$  décrit ci-dessous.

Si  $B$  est un arbre orienté,  $\mathbb{Z}B$  a pour points les couples  $(n, b) \in \mathbb{Z} \times B$ . La permutation d'Auslander-Reiten de  $\mathbb{Z} \times B$  applique  $(n, b)$  sur  $(n+1, b)$ . Enfin, à toute flèche  $\phi: b \rightarrow c$  de  $B$  sont associées deux suites de flèches  $(n, \phi): (n, b) \rightarrow (n, c)$  et  $(n, \bar{\phi}): (n+1, c) \rightarrow (n, b)$  de  $\mathbb{Z}B$ .



Lorsque  $B$  est obtenu à partir des diagrammes de Dynkin  $A_n, D_n, E_6, E_7, E_8$  par orientation des arêtes,  $\mathcal{Z}B$  est l'un des carquois décrits en 3.3. Pour terminer la démonstration du théorème 3.3 il reste d'une part à exclure les arbres qui ne sont pas de Dynkin. Cette partie de la démonstration est analogue à celle d'un théorème similaire obtenu indépendamment par Gel'fand et Ponomarjow ([15], [27]). Il reste d'autre part à trouver un système adéquat de relations. Pour cela Riedtmann allie des arguments combinatoires à l'interprétation donnée du carquois de  $\bar{E}$  au moyen des suites d'Auslander-Reiten.

#### 4. Description des algèbres d'Auslander des algèbres auto-injectives de représentation finie

4.1 Soit  $E$  l'algèbre d'Auslander d'une algèbre auto-injective de représentation finie  $A$ . S'appuyant sur le théorème 3.3 on peut supposer connue l'algèbre stable  $\bar{E} = E / \bigcup_{i>s} E e_i E$  et essayer de reconstruire  $E$  à partir de  $\bar{E}$ . Avec les identifications de 3.2 et 3.3, le carquois  $K_{\bar{E}}$  de  $\bar{E}$  a pour points les nombres naturels  $1, \dots, s$  (les points "de torsion"), auxquels nous devons ajouter les nombres  $s+1, \dots, r$  (les points "sans torsion") pour obtenir les points de  $K_E$ . Quelles sont les flèches à rajouter à  $K_{\bar{E}}$ ?

Soient  $P$  un  $A$ -module projectif indécomposable et  $J$  son radical. Le radical du  $E$ -module  $DP = \text{Hom}_A(M, P)$  est formé des applications  $A$ -linéaires  $f: M \rightarrow P$  dont aucune composante  $f_i = f|_{M_i}$  n'est inversible. Comme  $P$  est projectif et  $M_i$  indécomposable, une telle composante  $f_i$  ne peut être surjective; elle se factorise donc par  $J$ , et le radical de  $DP$  s'identifie à  $DJ = \text{Hom}_A(M, J)$ . En d'autres termes, si  $P \tilde{\rightarrow} M_j$ ,  $j > s$ , et si  $J \tilde{\rightarrow} M_i$ ,  $i \leq s$ , le carquois  $K_E$  de  $E$  contient une seule flèche aboutissant à  $j$ , et cette flèche part de  $i$ . De façon duale, si  $S$  désigne le socle de  $P$  et si  $P/S \tilde{\rightarrow} M_\ell$ ,  $\ell \leq s$ ,  $K_E$  contient une seule flèche partant de  $j$ , et cette flèche aboutit à  $\ell$ . Il s'ensuit que la suite d'Auslander-Reiten d'extrémité  $M_\ell$  est de la forme

$$0 \rightarrow M_i \rightarrow Q \rightarrow M_\ell \rightarrow 0,$$

$P$  étant un facteur de  $Q$ . En particulier, on a  $\pi\ell = i$ , si  $\pi: \{1, \dots, s\} \rightarrow \{1, \dots, s\}$  est la permutation d'Auslander-Reiten. En résumé, si l'on connaît la position des points  $i \in K_{\bar{E}}$  associés aux radicaux des  $A$ -modules projectifs indécomposables, on obtient  $K_E$  à partir de  $K_{\bar{E}}$  en adjoignant à  $K_{\bar{E}}$  un point  $p_i$  pour tout  $i$ , ainsi que des flèches  $i \rightarrow p_i \rightarrow \pi^{-1}(i)$ .

Il reste donc à savoir, où peuvent se trouver les points  $i$  associés aux radicaux des projectifs indécomposables. L'ensemble  $R$  de ces points  $i$  est soumis aux contraintes suivantes: a) pour tout point  $q$  de  $K_E$ , il existe un  $i \in R$  et un  $\ell \in R$  tels que  $\bar{e}_i \bar{E}_q \neq 0 \neq \bar{e}_q \bar{E}_\ell$ . b) Si  $i, \ell \in R$ , on a  $[\bar{e}_i \bar{E}_\ell : k] = \delta_{i\ell}$  ( $\bar{e}_i$  désigne la classe de  $e_i$  modulo  $\sum_{j \neq i} E_j E$ ). Ces contraintes s'introduisent de la manière suivante: la catégorie stable  $\text{mod } A$ , qui a les mêmes objets que  $\text{mod } A$ , mais dont les morphismes sont les classes d'homotopie d'applications  $A$ -linéaires, est munie d'une auto-équivalence naturelle, le foncteur-lacet  $\Omega$  de Heller, qui associe à tout  $M \in \text{mod } A$  le noyau de sa couverture projective. Dans cette équivalence, les radicaux des projectifs indécomposables correspondent aux  $A$ -modules simples. La condition a) provient de ce que tout module non nul contient un simple et se projette sur un simple. Quant à la condition b), c'est le lemme de Schur!

4.2 Il s'avère que les conditions a) et b) sont les seules contraintes imposées à  $R$ . Ceci nous amène à la description suivante des algèbres  $E$ , due à Riedtmann: Soit  $K$  l'un des carquois  $\mathbb{Z}A_n$ ,  $\mathbb{Z}D_n$ ,  $\mathbb{Z}E_6$ ,  $\mathbb{Z}E_7$  ou  $\mathbb{Z}E_8$  de 3.3. Si  $x, y$  sont deux points de  $K$ , soit  $k(x, y)$  l'espace vectoriel libre engendré par les flèches composées allant de  $x$  à  $y$ . Les espaces  $k(x, y)$  fournissent une catégorie  $kK$ , qui a pour objets les points de  $K$ , pour espaces de morphismes les espaces  $k(x, y)$ . Nous désignons par  $k[K]$  la catégorie résiduelle obtenue à partir de  $kK$  en imposant aux flèches composées les relations associées aux "mailles" de  $K$  et décrites dans le théorème 3.3.

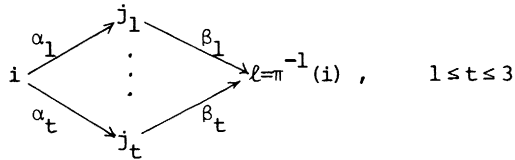
Ceci fait, nous appelons configuration de  $K$  tout ensemble  $C$  de points de  $K$  tel que: a) pour tout point  $q$  de  $K$ , il existe des points  $i \in C$  et  $\ell \in C$  tels que  $\text{Hom}_{k[K]}(q, i) \neq 0 \neq \text{Hom}_{k[K]}(\ell, q)$ . b) si  $i, \ell \in C$ , on a  $[\text{Hom}_{k[K]}(\ell, i) : k] = \delta_{i\ell}$ . Par exemple, les carquois  $\mathbb{Z}E_6$ ,  $\mathbb{Z}E_7$  et  $\mathbb{Z}E_8$  donnent naissance respectivement à 22, 143 et 598 configurations non congrues deux à deux. Nous décrirons plus loin les configurations des carquois  $\mathbb{Z}A_n$ . Pour  $\mathbb{Z}D_n$  nous renvoyons à [28].

A toute configuration  $C$  de  $K$  nous pouvons associer un carquois  $K_C$  en ajoutant à  $K$  des points  $p_i$  et des flèches  $i \xrightarrow{\eta_i} p_i \xrightarrow{\theta_i} \pi^{-1}(i)$  pour tout  $i = (n, x) \in C$  ( $\pi^{-1}(i) = (n-1, x)$ ).

Théorème (Riedtmann): Soit  $K = \mathbb{Z}A_n$ ,  $\mathbb{Z}D_n$ ,  $\mathbb{Z}E_6$ ,  $\mathbb{Z}E_7$  ou  $\mathbb{Z}E_8$ . Soient  $C$  une configuration de  $K$  et  $G \neq \{1\}$  un groupe d'automorphismes admissible de  $K$  tel que  $GC = C$ . Munissons le carquois-quotient  $K_C/G$  des relations suivantes:

A toute maille de  $K_C/G$  de source  $i \notin C/G$ , nous associons la relation décrite dans le théorème 3.3.

A toute maille de  $K$  de source  $i \in C$  et de la forme



nous associons la relation  $\bar{\beta}_1 \bar{\alpha}_1 + \dots + \bar{\beta}_t \bar{\alpha}_t + \bar{\theta}_1 \bar{\eta}_1 = 0$  de  $K_C/G$ , où  $\bar{\phi}$  désigne la classe modulo  $G$  d'une flèche  $\phi$  de  $K_C$ .

Alors l'algèbre définie par le carquois  $K_C/G$  et les relations précédentes est l'algèbre d'Auslander d'une algèbre auto-injective et de représentation finie. Réciproquement, toute algèbre d'Auslander d'une algèbre auto-injective de représentation finie est de cette forme si  $k$  est de caractéristique  $\neq 2$ .

Pour la démonstration nous renvoyons à [28],[29].

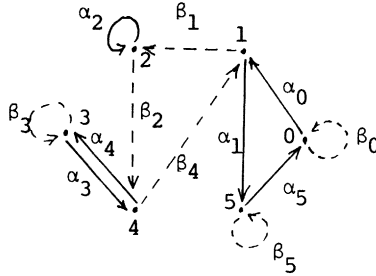
4.3 Configurations de  $\mathbb{Z}_n$ . Posons  $e_n(x) = \exp(2i\pi \frac{x}{n})$ . Avec cette notation,  $e_n(\mathbb{Z})$  n'est autre que le polygone régulier des racines  $n$ -ièmes de l'unité. Une relation de Brauer  $B$  dans  $e_n(\mathbb{Z})$  est par définition une relation d'équivalence telle que les enveloppes convexes des classes d'équivalence soient disjointes. Si une telle relation  $B$  est donnée, nous désignons par  $\alpha_B$  la permutation de  $e_n(\mathbb{Z})$  associant à un point  $s \in e_n(\mathbb{Z})$  le premier point de la classe d'équivalence de  $s$  qui vient après  $s$  dans l'orientation trigonométrique du cercle unité.

Proposition [14]: Soient  $B$  une relation de Brauer dans  $e_n(\mathbb{Z})$  et  $C_B$  l'ensemble des points  $(i,j)$  de  $\mathbb{Z}_n$  tels que  $e_n(i+j) = \alpha_B e_n(i)$ . Alors  $C_B$  est une configuration de  $\mathbb{Z}_n$ , et l'application  $B \mapsto C_B$  est une bijection entre les relations de Brauer dans  $e_n(\mathbb{Z})$  et les configurations de  $\mathbb{Z}_n$ .

Voir figure 2.

Il résulte en particulier de la proposition précédente que toute configuration de  $\mathbb{Z}_n$  est stable sous la translation  $\pi^n: (i,j) \mapsto (i+n,j)$ . En règle générale, le groupe des automorphismes de  $\mathbb{Z}_n$  laissant stable  $C_B$  est engendré par  $\pi^n$ . Dans le cas particulier où  $G = \pi^n \mathbb{Z}$ , nous allons décrire ici l'algèbre  $A$ , auto-injective et de représentation finie, dont l'algèbre d'Auslander est définie par le carquois  $(\mathbb{Z}_n)_{C_B}/G$  et les relations du théorème 4.2. Pour cela nous adjoignons à  $\alpha_B$  la permutation  $\beta_B$  de  $e_n(\mathbb{Z})$  telle que

$\beta_B e_n(x) = \alpha_B^{-1} e_n(x+1)$ ,  $x \in \mathbb{Z}$ . Ceci dit, nous associons à tout point  $s \in e_n(\mathbb{Z})$  deux flèches de source  $s$  : une " $\alpha$ -flèche"  $\alpha_s : s \rightarrow \alpha_B(s)$  et une " $\beta$ -flèche"  $\beta_s : s \rightarrow \beta_B(s)$ . Ceci nous fournit un carquois  $Q_B$  :

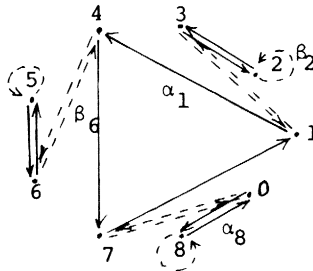


Pour tout  $s$  nous désignons par  $a_s$  et  $b_s$  les cardinaux des orbites  $\alpha_B^{\mathbb{Z}} s$  et  $\beta_B^{\mathbb{Z}} s$ , par  $\alpha^{as}$  le composé des  $\alpha$ -flèches de sources  $s, \alpha_B s, \dots, \alpha_B^{as-1} s$ , par  $\beta^{bs}$  le composé des  $\beta$ -flèches de sources  $s, \beta_B s, \dots, \beta_B^{bs-1} s$ . L'algèbre  $A^{op}$  est alors définie par le carquois  $Q_B$  et les relations suivantes:

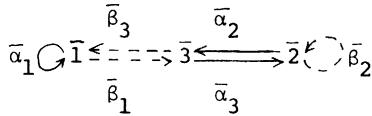
- a)  $\alpha_s \beta_{\beta_B^{-1} s} = 0 = \beta_s \alpha_{\alpha_B^{-1} s}$ ,  $\forall s \in e_n(\mathbb{Z})$ .
- b)  $\alpha^{as} + \beta^{bs} = 0$ ,  $\forall s \in e_n(\mathbb{Z})$ .

4.4 Dans les deux cas suivants le groupe des automorphismes de  $(\mathbb{Z}A_n, C_B)$  est plus grand que  $\pi n\mathbb{Z}$ .

a) Il existe un nombre  $e|n$  tel que  $B$  soit stable sous la permutation  $\gamma^e : e_n(x) \mapsto e_n(x+e)$ .



On peut alors choisir  $G = \pi^{e\mathbb{Z}}$  (si  $e=1$  on retrouve la situation décrite en 4.3: si  $e$  est minimal,  $G$  est le groupe de tous les automorphismes de  $\mathbb{Z}A_n$  laissant stable  $C_B$ ). Dans ce cas, l'algèbre  $A^{\text{op}}$  est définie par le carquois  $Q^B/\gamma^{e\mathbb{Z}}$



et par les relations

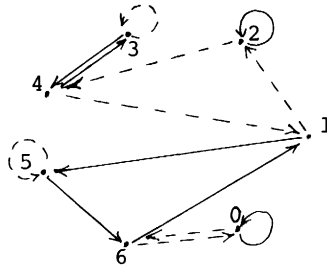
$$0 = \overline{\alpha_s} \overline{\beta_{\beta^{-1}s}} = \overline{\beta_s} \overline{\alpha_{\alpha^{-1}s}} = \overline{\alpha}^{as} + \overline{\beta}^{bs}$$

associées aux points  $s \in e_n(\mathbb{Z})$  ( $\bar{\phi}$  désigne la classe modulo  $\gamma^{e\mathbb{Z}}$  d'une flèche composée  $\phi$  de  $Q_B$ ). Ainsi, dans le cas de l'exemple donné, les relations sont:

$$0 = \overline{\alpha_1} \overline{\beta_3} = \overline{\beta_1} \overline{\alpha_1} = \overline{\alpha_3} \overline{\beta_1} = \overline{\beta_3} \overline{\alpha_2} = \overline{\alpha_2} \overline{\beta_2} = \overline{\beta_2} \overline{\alpha_3} = \overline{\alpha_1}^3 + \overline{\beta_3} \overline{\beta_1} = \overline{\alpha_2} \overline{\alpha_3} + \overline{\beta_1} \overline{\beta_3} = \overline{\alpha_3} \overline{\alpha_2} + \overline{\beta_2}.$$

Le cas traité ici est celui des algèbres de groupes (voir [14]).

b) Il existe un automorphisme  $\tau$  du carquois  $Q_B$  qui échange les  $\alpha$ -flèches et les  $\beta$ -flèches (dans ce cas  $n$  est nécessairement impair et  $\tau$  est une involution):



Dans ce cas, la configuration  $C_B$  est stable sous l'automorphisme  $\sigma : (i, j) \mapsto (i+j-\frac{n+1}{2}, n+1-j)$  (symétrie par rapport à la "médiane" de  $\mathbb{Z}A_n$ ; voir figure 3). Le groupe des automorphismes de  $\mathbb{Z}A_n$  laissant stable  $C_B$  est alors  $\pi^{n\mathbb{Z}} \times \sigma^{\mathbb{Z}}$ . Un sous-groupe admissible est de la forme  $\pi^{nq\mathbb{Z}}$  ou  $(\pi^{nq\sigma})^{\mathbb{Z}}$ ,  $q \geq 1$ . Dans le cas où  $G = (\pi^{nq\sigma})^{\mathbb{Z}}$ , le carquois  $(\mathbb{Z}A_n)_B/G$  est un "ruban de Möbius".

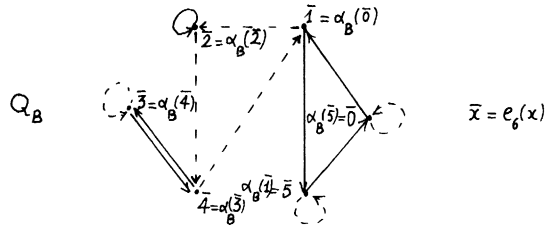
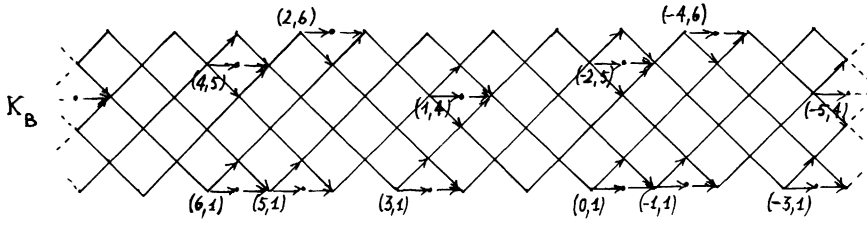


fig. 2

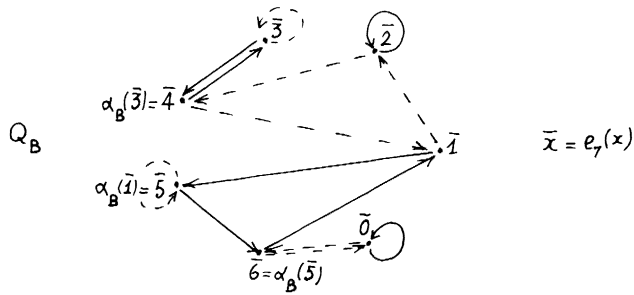
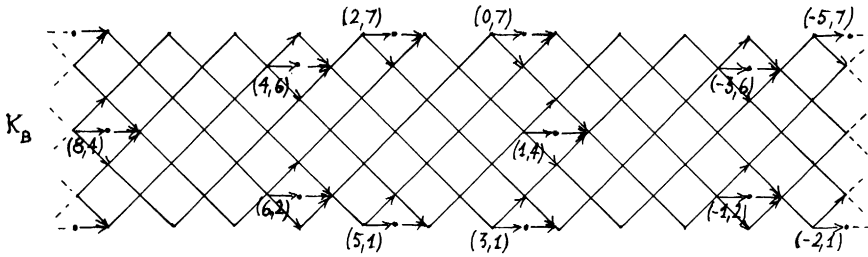


fig. 3

Bibliographie

- [1] AUSLANDER M. : Representation theory of Artin algebras II, *Comm. Algebra* (1974), 269-310
- [2] AUSLANDER M. and REITEN I. : Representation theory of algebras III, *Comm. Algebra* (1975), 239-294.
- [3] AUSLANDER M. and REITEN I. : Representation theory of algebras IV, *Comm. Algebra* (1977), 443-518.
- [4] AUSLANDER M. and REITEN I. : Representation theory of algebras VI, *Comm. Algebra* (1978)
- [5] AUSLANDER M. and REITEN I. : Stable equivalence of Artin algebras, *Proc. Conf. on Orders, group rings and related topics*, Springer Lecture Notes No 353, 8-71.
- [6] BAUTISTA R. : Irreducible maps and the radical of a category, preprint
- [7] BERNSTEIN I.N., GEL'FAND I.M. and PONOMARJOV V.A.: Coxeter functors and Gabriel's theorem, translated in *Russian Math. Surveys* 28 (1973), 17-32.
- [8] BONGARTZ K. : Zykellose Algebren sind nicht zügellos, *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> Int. Conf. on Rep. of Alg.*, Ottawa 1979, to appear in Springer Lecture Notes.
- [9] CURTIS C.W. and REINER I. : *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Wiley, New York 1962.
- [10] DADE E.C. : Blocks with cyclic defect groups, *Ann. of Math.* 84 (1966), 20-48
- [11] DLAB V. and RINGEL C.M. : Indecomposable representations of graphs and algebras, *Memoirs Amer. Math. Soc.* No 173, Providence (1976).
- [12] GABRIEL P. : Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. Math. Fr.* (1962), 323-448
- [13] GABRIEL P. : Indecomposable representations II, *Symp. Math. Ist. Naz. Alta Mat.* (1973), 81-104
- [14] GABRIEL P. and RIEDTMANN Chr. : Group representations without groups, *Comm. Math. Helv.* (1979), 240-287.
- [15] GEL'FAND I.M. and PONOMARJOV V.A. : Model algebras and representations of graphs (russian), *Funct. Anal.* 13 (1979), 1-12.

- [16] GREEN J.A. : Walking around the Brauer tree, J. Austral. Math. Soc. 17 (1974), 197-213.
- [17] HIGMAN D.G. : Indecomposable representations at characteristic  $p$ , Duke Math. J. 21 (1954), 377-381.
- [18] JANUSZ G.J. : Indecomposable Modules for finite groups, Ann. of Math. 89 (1969), 209-241.
- [19] KASCH F., KNESER M. und KUPISCH H. : Unzerlegbare modulare Darstellungen endlicher Gruppen mit zyklischer  $p$ -Sylow-Gruppe, Arch. Math. 8(1957), 320-321.
- [20] KUPISCH H. : Projektive Moduln endlicher Gruppen mit zyklischer  $p$ -Sylow-Gruppe, J. of Alg. 10 (1968), 1-7.
- [21] KUPISCH H. : Unzerlegbare Moduln endlicher Gruppen mit zyklischer  $p$ -Sylow-Gruppe, Math. Z. 108 (1969) 77-104.
- [22] KUPISCH H. : Basisalgebren symmetrischer Algebren und eine Vermutung von Gabriel, Math. Z. (to appear)
- [23] KUPISCH H. : Quasi-Frobenius algebras of finite representation type, Proceedings of the 2<sup>nd</sup> Int. Conf. on Rep. of Alg., Ottawa 1979, to appear in Springer Lecture Notes.
- [24] LOUPIAS M. : Représentations indécomposables des ensembles ordonnés finis, Thèse 1975 (Tours).
- [25] MICHLER G. : Green correspondence between blocks with cyclic defect groups I, J. of Alg. 39 (1976), 26-51.
- [26] PEACOCK R.M. : Blocks with a cyclic defect group, J. of Alg. 34 (1975), 232-259.
- [27] RIEDTMANN Chr. : Algebren, Darstellungsköcher, Ueberlagerungen und zurück, to appear in Comm. Math. Helv. (1979).
- [28] RIEDTMANN Chr. : Representation-finite self-injective algebras of class  $A_n$  and  $D_n$ , Proceedings of the 2<sup>nd</sup> Int. Conf. on Rep. of Alg., Ottawa 1979, to appear in Springer Lecture Notes.
- [29] RIEDTMANN Chr. : Representation-finite self-injective algebras of class  $E_6$ ,  $E_7$  and  $E_8$ , to appear.

- [30] SCHERZLER E. and WASCHBUESCH J. : A class of self-injective algebras of finite representation type, Proc. of the 2<sup>nd</sup> Int. Conf. on Rep. of Alg., Ottawa 1979, to appear in Springer Lecture Notes.
- [31] STORRER H.H. : Rings of quotients of perfect rings, Math. Z. 122 (1971), 151-165.
- [32] ULMER F. : A flatness criterion in Grothendieck Categories, Inventiones 19 (1973), 331-336
- [33] ZAVADSKIJ A.G. and NAZAROVA L.A. : Partially ordered sets of tame type, in Matrix problems (russian), Kiev 1978.
- [34] ECKMANN B. : Homotopie et dualité, Col. de Top. Alg., Louvain 1956, 41-53.

Pierre GABRIEL,  
 Mathematisches Institut  
 Universität Zürich  
 Freiestrasse 36  
 8032 Zürich