

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

DENNIS SULLIVAN

Travaux de Thurston sur les groupes quasi-fuchsien et les variétés hyperboliques de dimension 3 fibrées sur S^1

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. n° 554, p. 196-214

http://www.numdam.org/item?id=SB_1979-1980__22__196_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TRAVAUX DE THURSTON SUR LES GROUPES QUASI-FUCHSIENS
ET LES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES DE DIMENSION 3 FIBRÉES SUR S^1 .

par Dennis SULLIVAN

Soit Γ le groupe fondamental d'une surface compacte sans bord S de genre $g > 1$.

Un automorphisme extérieur $[\sigma]$ de Γ est irréductible si pour chaque classe de conjugaison α dans Γ qui représente une courbe simple dans S , l'orbite $\{[\sigma]^j \alpha\}$ est infinie. Cette propriété pour la classe d'isotopie est équivalente à "pseudo-Anosov" ou "hyperbolique" (Séminaire Bourbaki n° 529, Poenaru), et (T_1) .

THÉOREME.- Soit V^3 une variété de dimension 3, fibrée sur S^1 avec fibre S et monodromie $[\sigma]$. La variété topologique V^3 admet une structure hyperbolique si et seulement si $[\sigma]$ est irréductible.

Remarque.- L'existence d'une telle variété hyperbolique fibrée sur S^1 est déjà assez remarquable. Le premier exemple a été construit par Jorgensen (J). La condition du théorème est équivalente au fait que $\pi_1 V^3$ ne contient pas $Z + Z$. La structure hyperbolique donnée par le théorème est unique par le théorème de Mostow (M). Le théorème est une partie du plus grand théorème de Thurston qui donne une structure hyperbolique (unique) sur une variété compacte de dimension trois qui est "sufficently large" et telle que $Z + Z$ n'est pas contenu dans π_1 . (à paraître).

Exemple.- Nous donnons maintenant une construction géométrique de Thurston d'un exemple très proche de ceux de Jorgensen.

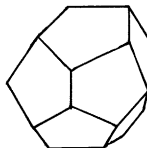
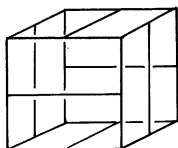
Premièrement, nous construisons dans le plan hyperbolique un pentagone régulier à angles droits. Ce pentagone existe grâce au principe de continuité. Un petit pentagone régulier a des angles presque égaux à ceux du pentagone régulier euclidien (108°). Un pentagone régulier dont les sommets sont proches de l'infini a des angles très petits. Donc, en vertu de la continuité, lorsque les sommets bougent symétriquement vers l'infini, nous obtenons un pentagone régulier à angles droits.

Deuxièmement, nous construisons avec douze de ces pentagones un dodécaèdre

dans l'espace hyperbolique. Deux faces adjacentes se rencontrent à angles droits.

Nous pouvons paver l'espace hyperbolique avec ce dodécaèdre-ci. Il y a quatre chambres autour de chaque arête, et huit autour de chaque sommet dans une configuration octaédrique. Le schéma local est comme le pavage cubique de l'espace euclidien.

Considérez un cube topologique et ajoutez des arêtes comme ceci :



Combinatoirement, nous avons un dodécaèdre. Alors nous pouvons identifier les faces d'un dodécaèdre pour obtenir un tore T^3 de dimension trois. Les arêtes ajoutées deviennent les trois axes du tore.

Observez que nous pouvons faire ces identifications de notre dodécaèdre géométrique au moyen des isométries hyperboliques $a_1, a_2, \dots, a_6$. Le groupe Γ^* discret engendré par $a_1, \dots, a_6$ préserve le pavage, et le domaine fondamental est un dodécaèdre. (*)

Maintenant, T^3 est fibré topologiquement sur un cercle, avec chaque fibre T^2 transversale aux axes. (Imaginez des plans transversaux aux trois axes dans R^3).

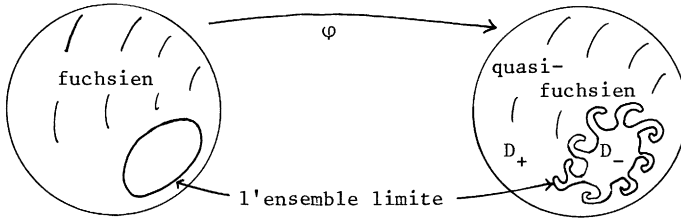
Un sous-groupe de Γ^* d'indice k , fini, et sans torsion, définit une variété hyperbolique compacte V^3 qui est un revêtement de T^3 avec ramification seulement au-dessous des axes. Donc V^3 est fibrée sur le cercle et V^3 est l'union exacte de k dodécaèdres réguliers à angles droits.

La démonstration du théorème de Thurston.— Pour l'explication et la vérification de beaucoup de points, nous nous référons si possible à (T). La démonstration est longue et difficile. Ceci est la première rédaction.

DEFINITION.— Un groupe quasi-fuchsien de genre g est une représentation (fidèle et discrète)

$\Gamma = \{\text{groupe fondamental de } S\} \xrightarrow{r} \{\text{isométries de l'espace hyperbolique}\} = G$ qui est conjuguée par un homéomorphisme quasi-conforme $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ à une représentation r' de Γ , fuchsienne ; cela veut dire une représentation qui préserve un plan $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$. Donc si $x \in \Gamma$ et $\gamma = r(x)$, $\gamma' = r'(x)$, alors $\gamma \circ \varphi = \varphi \circ \gamma'$.

(*) Donc si nous considérons $\mathbb{H}^3/\Gamma^*$, nous obtenons une structure hyperbolique sur le tore T^3 avec ramifications d'ordre deux le long des axes. (cela veut dire que l'angle autour de chaque axe est π au lieu de 2π).

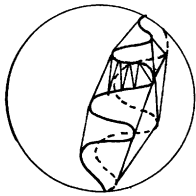


Donc l'ensemble limite de Γ (l'ensemble des points limites dans S^2 d'une orbite de x dans $\mathbb{H}^3$) est un cercle topologique et le domaine de discontinuité consiste en deux ouverts D_+ et D_- simplement connexes (T,8.1). Les quotients D_+/Γ et D_-/Γ donnent deux structures conformes sur notre surface topologique S .

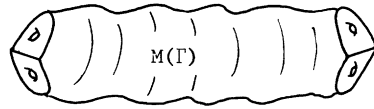
Nous pouvons définir $|\Gamma|$ comme étant la distance conforme entre ces deux structures, cela veut dire la distorsion conforme pour le meilleur homéomorphisme dans la classe d'homotopie donnée par les identifications.

$$\pi_1(D_+/\Gamma) \sim \Gamma \sim \pi_1(D_-/\Gamma).$$

DÉFINITION.- La variété hyperbolique convexe $M(\Gamma)$ associée au groupe quasi-fuchsien Γ est le quotient par Γ de l'enveloppe convexe dans $\mathbb{H}^3$ de l'ensemble limite de Γ .



l'enveloppe convexe



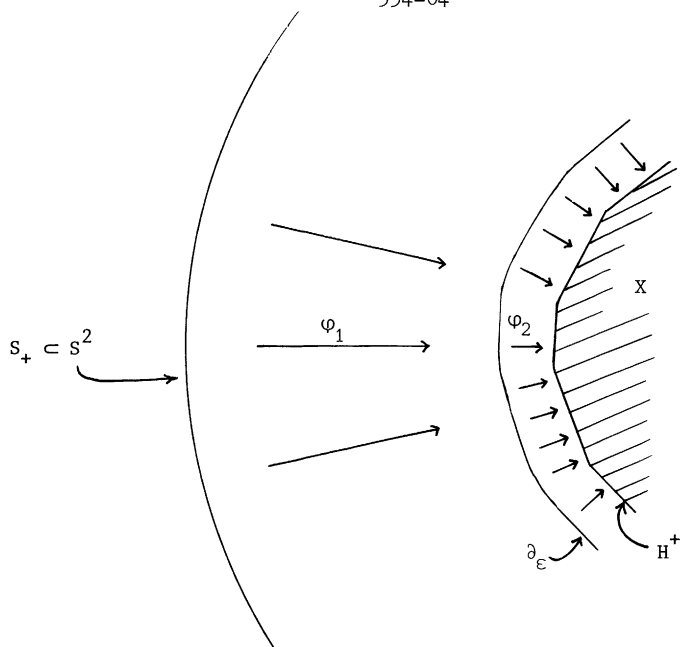
la variété convexe

Pour le cas fuchsien $M(\Gamma)$ est une surface hyperbolique S de genre g . Dans le cas général $M(\Gamma)$ est homéomorphe à $S \times [0, 1]$ (T,8.33). Les deux composantes du bord de $M(\Gamma)$, S_+ et S_- sont des surfaces hyperboliques qui sont plissées le long d'un système de géodésique (T,8.22).

La distorsion métrique pour la meilleure quasi-isométrie entre S_+ et S_- dans la classe d'homotopie donnée est une deuxième mesure $\|\Gamma\|$ du groupe quasi-fuchsien. (Une quasi-isométrie de distorsion $k \geq 1$ est un homéomorphisme qui satisfait à

$$1/k < \frac{\text{distance}(\phi x, \phi y)}{\text{distance}(x, y)} \leq k.$$

PROPOSITION 1.- Les deux mesures du groupe quasi-fuchsien $|\Gamma|$ et $\|\Gamma\|$ sont commensurables (le rapport est borné indépendamment de Γ).



Démonstration.— Soit H^+ une composante connexe de la surface d'un ensemble convexe X dans $\mathbb{H}^3$ dont les sommets sont à l'infini, et soit ∂_ϵ la surface d'un ϵ -voisinage de X près de H^+ . Si S_+ est la partie de S^2 (la sphère à l'infini) correspondant à H^+ , il y a une application $\varphi_1 : S_+ \rightarrow \partial_\epsilon$ dont la distorsion conforme ne dépend que de la courbure extrinsèque de ∂_ϵ . Alors l'ensemble $\varphi_1^{-1}(y)$ est le bout d'une géodésique normale de $y \in \partial_\epsilon$. Il y a une deuxième application $\varphi_2 : \partial_\epsilon \rightarrow H^+$ qui est presque isométrique (mais pas forcément injective), pour ϵ petit. $\varphi_2(y)$ est le point de H^+ le plus proche de $y \in \partial_\epsilon$.

La courbure intrinsèque de ∂_ϵ est bornée quand $\epsilon \rightarrow 0$. Donc pour ϵ assez petit on peut régulariser φ_2 pour obtenir un difféomorphisme presque isométrique. Alors $\varphi_2 \circ \varphi_1$ est un homéomorphisme quasi-conforme naturel dont la distorsion est bornée universellement, indépendamment de X .

Donc, il y a un homéomorphisme k -quasi-conforme entre D_+/Γ et S_+ et entre D_-/Γ et S_- où k est universel.

Utilisant la proposition 2 ci-dessous, nous savons que la distorsion isométrique entre deux surfaces hyperboliques (comme S_+ et S_-) est commensurable à la distorsion conforme entre elles. C.Q.F.D.

PROPOSITION 2.— (Riemann mapping theorem mesurable amélioré) Pour chaque métrique ρ mesurable de S^2 ayant la distorsion conforme bornée ($\leq k$) presque partout, il y a une k -quasi-isométrie $\mathbb{H}^3 \xrightarrow{\phi} \mathbb{H}^3$ dont l'extension au bord $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ est quasi-conforme (dans la métrique standard v) et

presque partout conforme entre ρ et la métrique standard ν de S^2 . De plus ϕ préserve le volume hyperbolique et est naturel pour le groupe d'isométries hyperboliques ($\phi_{\gamma\rho} = \gamma \cdot \phi_\rho$).

Démonstration.— (voir (T,11)) L'existence de $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ est le Riemann mapping theorem mesurable développé par Ahlfors et Bers vers 1960. Ce théorème donne aussi une isotopie φ_t qui est l'intégrale d'une famille de champs tangents X_t sur S^2 . Pour chaque X_t il y a l'extension harmonique $\text{ex}(X_t)$, un champ tangent dans $\mathbb{H}^3$ (T,11.1). Si $p \in \mathbb{H}^3$, une petite sphère autour de p est identifiée à la sphère S^2 à l'infini et chaque espace tangent de cette petite sphère est identifié à un sous-espace de l'espace tangent à p .

Donc, on peut définir $\text{ex}(X_t)(p)$ comme la moyenne sphérique de X_t sur cette petite sphère. Cet $\text{ex}(X_t)$ satisfait (T,II.I.3)

$$\text{curl curl}(\text{ex } X_t) = -4 \text{ ex}(X_t).$$

En particulier, $\text{div}(\text{ex}(X_t)) = \text{div curl}(\text{quelque chose}) = 0$.

L'intégrale de $\text{ex}(X_t)$ donne une isotopie ϕ_t et $\phi_1 = \phi$ est la k -quasi-isométrie promise (voir (T,II.8) et Ahlfors "Quasi conformal deformations and mappings in $\mathbb{R}^n$ ", Journal d'analyse mathématique, vol. 30 (1976), p. 74-97). C.Q.F.D.

COROLLAIRE 3.— Si $(\sigma) \in \text{Aut extérieur}(\pi_1 S)$, d'ordre infini, il y a une suite Γ_n de groupes quasi fuchsien de genre g tels que

$$\text{i) } |\Gamma_n| \rightarrow \infty$$

et ii) pour chaque n , (σ) est représenté par une k -quasi-isométrie σ_n de $\mathbb{H}^3/\Gamma_n$ qui préserve le volume hyperbolique, (k -indépendant de n).

Remarque.— Cette idée de construire Γ_n en utilisant le Riemann mapping theorem mesurable est une partie d'un théorème de Bers (B) donnant une bijection entre les groupes quasi-fuchsien de genre g et les paires de structures conformes sur S .

Démonstration du corollaire 3.— Représentez S par un groupe Kleinien $\Gamma_1 \subset G$ préservant un plan $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$, avec les domaines de discontinuité D_+ et D_- . Changez la métrique standard (ν, ν) sur $S^2 = (D_+, D_-)$ en $(\nu, \sigma^n \nu) = \rho_n$ où σ est un difféomorphisme de D_-/Γ_1 qui représente l'automorphisme extérieur (σ) .

Par rapport à la métrique ρ_n un relèvement de σ , $\tilde{\sigma} : S^2 \rightarrow S^2$ (voir (T, p. 5.39)) a une distorsion conforme plus petite que k indépendamment de n . De plus $\tilde{\sigma}$ satisfait $\gamma \cdot \tilde{\sigma} = \gamma \cdot |\sigma| \cdot \tilde{\sigma}$ où $\gamma \in \Gamma_1$ et $|\sigma|$ est un automorphisme qui représente l'automorphisme extérieur (σ) .

Soit $\phi_n : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ la quasi-isométrie donnée par la proposition 2, en utilisant la métrique ρ_n .

Soit $\Gamma_n = \phi_n \cdot \Gamma_1 \cdot \phi_n^{-1}$, $\tilde{\sigma}_n = \phi_n \cdot \tilde{\sigma} \cdot \phi_n^{-1}$. Alors Γ_n est un groupe quasi-fuchsien et $|\Gamma_n|$ est la distance entre les structures $\mathcal{S} = \mathbb{D}_+/\Gamma_1$ et $\sigma^n \mathcal{S}$. Ceci tend vers ∞ parce que $\text{Aut extérieur}(\pi_1 S)$ agit "proprement discontinuement" sur l'espace de Teichmüller.

Aussi, $\tilde{\sigma}_n$ satisfait $\gamma \tilde{\sigma}_n = \gamma |\sigma| \tilde{\sigma}_n$ et la distorsion conforme de $\tilde{\sigma}_n$ est plus petite que k parce que ϕ_n est conforme presque partout. Considérez maintenant la métrique $\rho = \tilde{\sigma}_n$ (métrique standard) dans la proposition 2 pour obtenir $\bar{\sigma}_n : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$, k -quasi-isométrique, préservant le volume, et satisfaisant $\gamma \cdot \bar{\sigma}_n = \gamma |\sigma| \cdot \bar{\sigma}_n$. Alors le σ_n promis est $\bar{\sigma}_n / \Gamma_n$. C.Q.F.D.

Remarque.— Soit M_n la partie convexe de $\mathbb{H}^3/\Gamma_n$. Soit $x_n \in M_n$ un certain point loin des deux composantes du bord de M_n . Soit (M_∞, x_∞) n'importe quelle limite géométrique d'une sous-suite n_1 de (M_n, x_n) (T, 9.1). (Cela veut dire que pour chaque compact K dans M_∞ autour de x_∞ et chaque $\epsilon > 0$ il y a N tel que pour $n_1 > N$ il existe une partie compacte K_1 autour de x_{n_1} de M_{n_1} et une ϵ -presque isométrie $\varphi_1 : K_1 \rightarrow K$ telle que $\varphi_1(x_{n_1}) = x_\infty$.) Nous démontrerons, quand (σ) est irréductible, que M_∞ est le revêtement cyclique de la variété hyperbolique unique qui est fibrée sur le cercle avec monodromie (σ) . Pour ceci, il faut étudier la géométrie de M_n .

DÉFINITION.— Une surface plissée dans une variété hyperbolique V est une application isométrique $S \xrightarrow{\phi} V$ (dans le sens de la longueur des courbes tracées sur S), où S est muni d'une métrique de courbure -1 (sauf peut-être pour un nombre fini de points où l'angle est dans l'intervalle $2\pi - \epsilon$, $2\pi + \epsilon$ pour $\epsilon > 0$ très petit) (voir (T, 8.38)).

PROPOSITION 4.— Il y a une surface plissée connexe $\mathcal{S}$ de genre g près de chaque point p de la partie convexe M d'un groupe quasi-fuchsien Γ . De plus, chaque $\mathcal{S}$ est homotopiquement équivalent à M .

Démonstration.— (T, chapitre 8) Les deux composantes du bord de M sont déjà des surfaces plissées pour $\epsilon = 0$. L'idée de la proposition est d'interpoler entre ces deux composantes.

Supposez que nous ayons une triangulation J de S avec un seul sommet v dans une courbe fermée c de la triangulation J .



Déformez l'équivalence d'homotopie canonique $S \xrightarrow{f} M$ de sorte que c soit une géodésique fermée. Tirez les autres arêtes de J en des géodésiques gardant v fixe. Déformez les triangles vers des triangles géodésiques.

On obtient une surface avec courbure -1 sauf au point v où l'angle est $\geq 2\pi$ parce que c passe par v . Si on laisse courir v beaucoup de fois autour de c , tout en déformant la triangulation, l'angle au point v devient de plus en plus proche de 2π .

Si on modifie c et J on obtient assez de surfaces plissées pour démontrer la proposition.

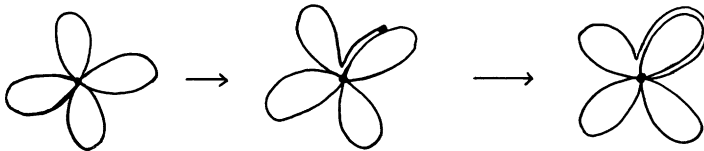
Premièrement, on peut trouver (utilisant la mesure de pliage (T, p. 8.22) et la récurrence de Poincaré) une courbe fermée simple aussi proche que l'on veut (les bouts dans l'ensemble limite sont proches) d'une trajectoire du lieu de pliage du bord S_+ de M .

Si on complète c en une triangulation avec un sommet unique, la surface plissée correspondante V_+ est proche de S_+ parce qu'elle contient la géodésique fermée représentant c . Le même argument donne un V_- proche de S_- .



Maintenant, la triangulation J qui contient c est déterminée jusqu'à un nombre borné de choix si la base de π_1 est fixe. Les différentes surfaces plissées correspondantes diffèrent par un nombre borné des tétraèdres géodésiques. Mais chaque point dans un tétraèdre géodésique est à distance bornée (indépendamment du tétraèdre) des arêtes.

Donc la différence entre les positions de V_+ proche de S_+ et V_- proche de S_- est essentiellement la différence entre les deux bases de π_1 contenues dans les triangulations J_+ et J_- . Mais chaque paire de bases est connectée par un chemin de mouvements basiques (voir figure et (AT, p. 90-92)).



Mouvement basique

Pour un mouvement basique, la surface plissée correspondante change par une distance bornée (utilisant la remarque ci-dessus sur la géométrie d'un tétraèdre géodésique).

Toutes les surfaces décrites sont homotopes, utilisant les tétraèdres géodésiques. Donc, ces surfaces passent à distance bornée de chaque point de la partie convexe M . C.Q.F.D.

DÉFINITION.— Le flux d'un difféomorphisme préservant le volume $\sigma_n : H/\Gamma_n \rightarrow$ est le volume de n importe quelle homologie entre les deux cycles $\mathcal{S}$ et $\sigma_n \mathcal{S}$ où $\mathcal{S}$ engendre l'homologie de dimension deux.

PROPOSITION 5.— Quand (σ) est irréductible, le flux de σ_n (donné par le corollaire 3) est borné indépendamment de n .

Démonstration.— Il y a deux types de démonstration, l'une qui utilise une partie de la structure de σ comme difféomorphisme pseudo Anosov (voir (P)) et l'autre qui utilise le bord de l'enveloppe convexe.

Première démonstration.— i) Thurston a attaché, voir (T, chapitre 8) et (AT), l'espace des laminations mesurées (projectives) S^{6g-7} comme étant le bord de l'espace de Teichmüller, R^{6g-6} .

Nous obtenons une boule B^{6g-6} où (σ) agit continuellement. Donc il y a un point fixe ℓ . Ce point ℓ est contenu dans le bord et représente une lamination géodésique puisque (σ) est d'ordre infini.

ii) Regardez une surface plissée $\mathcal{S}_\ell$ dans M_n dont le lieu de pliage contient une lamination géodésique qui représente le support de ℓ (T, 8.10). Par la remarque ci-dessus, il y a une homotopie bornée entre $\mathcal{S}_{\sigma\ell}$ et $\sigma_n \mathcal{S}_\ell$. Maintenant, puisque (σ) est irréductible, le complément de ℓ dans $\mathcal{S}$ consiste en des régions planes. Donc, il y a une homotopie bornée entre $\mathcal{S}_\ell$ et $\mathcal{S}_{\sigma\ell}$ utilisant un nombre fini des tétraèdres, et le flux de σ_n est borné. C.Q.F.D.

Remarque.— Il y a une homotopie bornée entre une surface plissée $\mathcal{S}_{\sigma\ell}$ et $\sigma_n \mathcal{S}_\ell$. Il y a une distance bornée dans l'espace de Teichmüller entre $[(\sigma)\mathcal{S}_\ell]$ et $[\mathcal{S}_{\sigma\ell}]$. Ceci découle des définitions et du fait qu'il y a une homotopie bornée entre une k -quasi-géodésique et une géodésique (voir (T, 5.9.2))

Deuxième démonstration (esquisse).— On peut calculer le flux de σ_n en utilisant la composante $S_+(n)$ du bord de la partie convexe M_n de H/Γ_n . On peut former une limite algébrique Γ_∞ (T, 9.1) qui contient $\lim_n S_+(n)$ comme bord de la partie convexe.

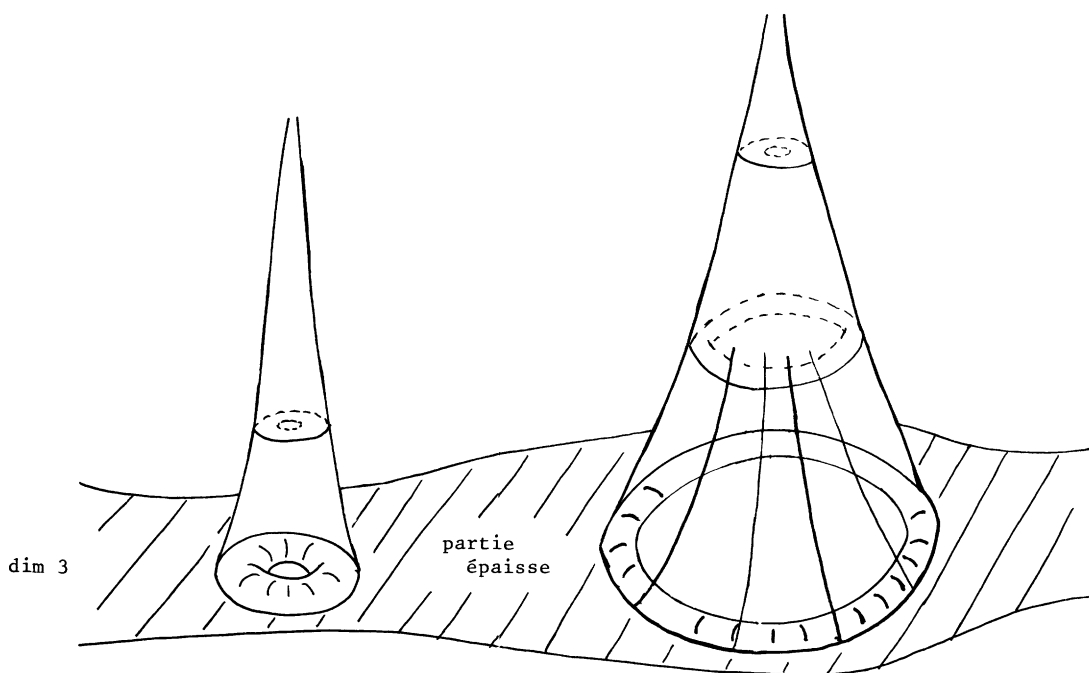
Dans la limite algébrique, il n'y a pas d'éléments paraboliques (en utilisant σ_n) si il y a une classe de conjugaison α , fixe dans le groupe abstrait Γ ,

qui devient de plus en plus court quand $n \rightarrow \infty$, alors il y en a beaucoup, $\sigma^j \alpha$, $j = 1, 2, \dots$. Mais cela contredit (T, 8.69) qui dit qu'il n'y a pas plus de $3g - 3$ cusps dans une limite algébrique. Donc la limite algébrique est aussi la limite géométrique (Théoreme 9.2., T, p. 9.15).

Maintenant le déplacement $(x, \sigma_n x)$ pour $x \in S_+(n)$ est borné (voir (T), p. 9.15 et 9.16) parce que la distance conforme entre $S_+(n)$ et $(\sigma)S_+(n)$ est bornée (comme points dans l'espace de Teichmüller) en utilisant la construction et la proposition 1. Donc σ_n détermine une quasi-isométrie σ_∞ dans la limite géométrique et le flux de σ_n converge vers le flux de σ_∞ . C.Q.F.D.

DÉFINITION.— La partie épaisse d'une variété hyperbolique V de dimension n est l'ensemble des points p où la boule de rayon ϵ_n (convenable) autour de p est plongée. La partie mince est le complément.

Remarque.— Pour les groupes quasi-fuchsien étudiés ici, il n'y a pas d'éléments paraboliques. Donc par le lemme de Margulis (T, 5.10) la partie mince consiste en des tores solides disjoints autour de géodésiques fermées de longueur inférieure à une constante universelle ϵ_3 . Le bord d'un tel voisinage de Margulis est un tore de courbure intrinsèque zéro et de courbure extrinsèque fixe. Il y a un seul paramètre non-compact dans la géométrie de ce tore qui est la longueur de la deuxième courbe, ou l'aire du tore, ou le volume du voisinage de Margulis.



On appelle ces voisinages de géodésiques fermées courtes des "presque cusps".

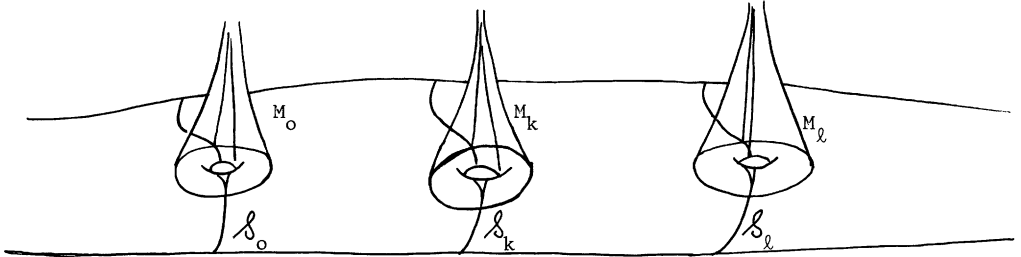
PROPOSITION 6.- Le volume de chaque "presque cusp" dans $\mathbb{H}^3/\Gamma_n$ est borné indépendamment de n ((σ) irréductible).

Démonstration.- i) Si α est une géodésique très courte, on a beaucoup de géodésiques courtes qui représentent $\sigma^j \alpha$, $j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$, puisque (σ) est irréductible et σ_n est quasi-isoéométrique. Pour celles-ci, les voisinages de Margulis correspondants, T_j , sont disjoints.

ii) Soient $\mathcal{S}_j$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$ des surfaces plissées qui contiennent les géodésiques courtes représentant $\sigma^j \alpha$, et qui sont liées par (σ) . Le diamètre de chaque composante connexe de la partie épaisse de $\mathcal{S}_j \leq c$. Le volume du $2c$ -voisinage $\leq C$. (T, 8.12.1).

Donc, pour $j = 0$, et k, ℓ convenables, nous pouvons voir que $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_k$ et $\mathcal{S}_\ell$ sont disjoints (parce que la partie mince des surfaces plissées est contenue dans les voisinages de Margulis qui sont disjoints). Nous pouvons supposer aussi que chaque voisinage de Margulis n'intersecte pas plus d'un des $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_k, \mathcal{S}_\ell$.

iii) Pour chaque $j \leq N$ il y a une homotopie bornée entre $\sigma_n^j \mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_j$. (La remarque dans la démonstration de la proposition 5).



Supposons que $\mathcal{S}_k$ sépare $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_\ell$. Le volume entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_\ell$ est plus petit que $\{\text{le flux de } \sigma^\ell\} + \{\text{le volume de l'homotopie}\}$.

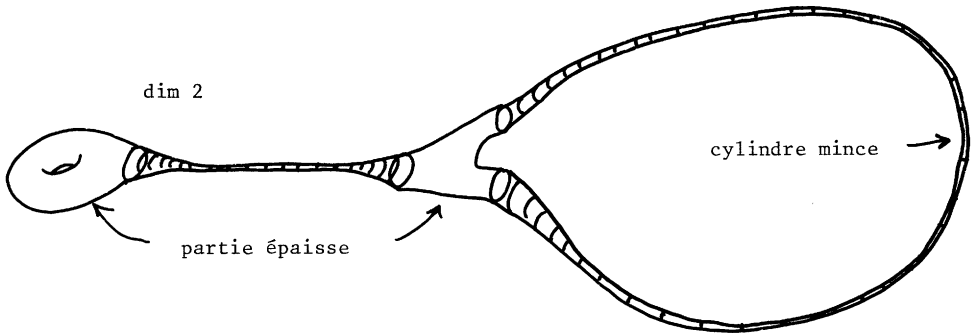
Donc le volume du voisinage de Margulis de la géodésique courte dans $\mathcal{S}_k$ est plus petit que ce volume.

Puisque σ_n est quasi-isométrique, le volume de T_0 est aussi borné.
C.Q.F.D.

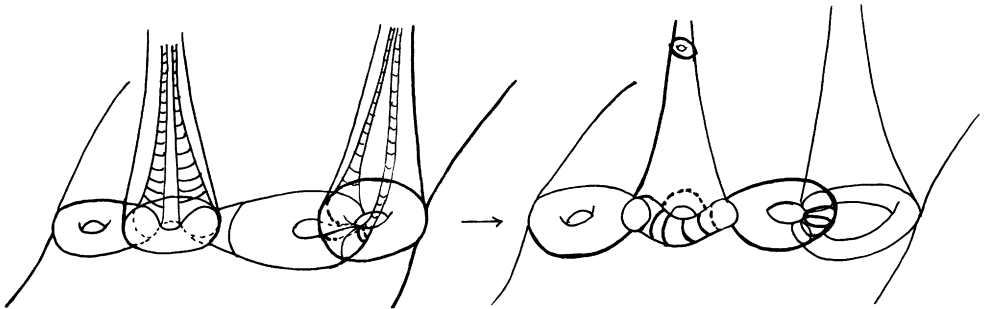
Remarque.- Nous avons utilisé le fait que chaque géodésique très courte est une courbe simple sur S . (Pour une surface plissée $\mathcal{S}$ proche de α , la partie mince de S détermine une courbe simple β sur S dans le voisinage de Margulis de α . Il faut que β soit non nul et que β soit un multiple de α . Donc $\alpha = \beta$).

PROPOSITION 7.- Il y a une surface $\mathcal{S}$ avec $\pi_1 \mathcal{S} = \Gamma_n$ de géométrie bornée, à distance bornée de chaque point x de la partie épaisse de M_n . (Cela veut dire qu'il y a une métrique fixée sur S et une équivalence d'homotopie $S \xrightarrow{\rho_n} \mathbb{H}^3/\Gamma_n$ dont la distorsion est bornée indépendamment de n).

Démonstration.- Il y a une surface plissée (homotopiquement équivalente à M_n) à distance bornée de chaque point de M_n (d'après la proposition 4). La géométrie d'une telle surface n'est pas bornée, sauf quand elle contient une partie mince - des cylindres canoniques (moins que $3g-3$) autour des petites courbes fermées.



Ces cylindres sont contenus dans la partie mince de M_n , par définition. Aussi, le diamètre de chaque composante de la partie épaisse de $\mathcal{S}$ est constante parce que l'aire de $\mathcal{S}$ est $\leq 2\pi(2g-2)$. Un argument topologique montre que chaque composante épaisse intersecte la partie épaisse de M_n .



Donc les bords des cylindres canoniques minces sont près des bords des voisinages de Margulis correspondants dans M_n .

Maintenant, nous savons que chaque tore, bord d'un voisinage de Margulis a une géométrie bornée (d'après la proposition 6). Nous pouvons couper $\mathcal{S}$ le long du bord de chaque cylindre mince et remplacer le cylindre mince respectif par un cylindre de géométrie bornée, défini essentiellement par une homotopie dans le tore de géométrie bornée. Ceci donne une application de distorsion bornée

$S \rightarrow \mathbb{H}^3/\Gamma_n$, par rapport à une métrique fixée sur S . C.Q.F.D.

COROLLAIRE 8.- La proposition 7 est vraie pour une limite géométrique M_∞ de M_n . De plus, on peut supposer que les surfaces obtenues sont incompressibles et chacune sépare M_∞ .

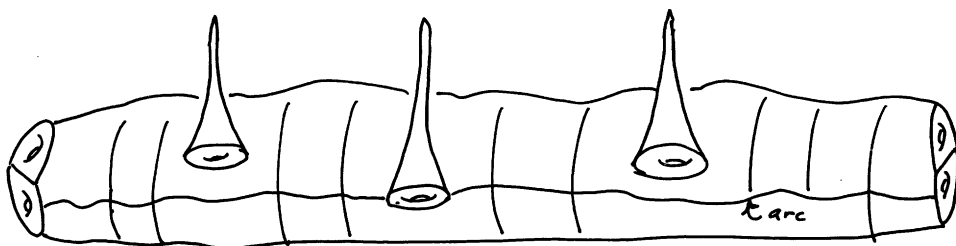
Démonstration.- Par définition, chaque compact de M_∞ est presque isométrique à une partie de M_n pour n assez grand. Donc, il y a beaucoup de surfaces dans M_∞ d'après la proposition 7. La première partie est immédiate.

Pour la deuxième partie, considérez $x \in M_\infty$ et pour chaque n assez grand une surface de géométrie bornée S_n près de x qui vient de M_n . Une sous-suite de S_n converge géométriquement (T, 8.8.5) vers une surface S_∞ de géométrie bornée près de x . Un disque (ou arc) attaché à S est presque attaché à S_n pour n assez grand. Donc $\pi_1 S_\infty \rightarrow \pi_1 M_\infty$ est injective parce que $\pi_1 "S_n" \rightarrow \pi_1 M_n$ est injective et S_∞ sépare M_∞ parce que " S_n " sépare M_n (" S_n " est l'image réciproque de S_n dans M_n). C.Q.F.D.

Soit d_n la distance entre les deux composantes du bord de la partie convexe M_n de $\mathbb{H}^3/\Gamma_n$ pour la suite Γ_n ((σ) est irréductible).

PROPOSITION 9.- Quand n tend vers ∞ , d_n et le volume de M_n tendent vers ∞ .

Démonstration.- La partie épaisse de M_n est contenue dans le voisinage borné d'un arc qui connecte les deux composantes du bord (proposition 7).



(On peut supposer que l'arc le plus court (jusqu'à un facteur multiplicatif) est contenu dans la partie épaisse parce qu'il y a distance définie entre les presque cusps).

Alors le volume M_n - épais $\leq$ constante $\cdot d_n$. Mais s'il y a des presque cusps, il y en a beaucoup utilisant σ_n et le volume de M_n - épais converge vers ∞ . S'il n'y a pas de presque cusps et d_n est borné, M_n est géométriquement borné, et ceci contredit la proposition 1.

Remarque.- Quand $n \rightarrow \infty$ la partie convexe, M_n a la géométrie d'un cylindre

de diamètre borné de plus en plus long avec (peut-être) une suite de presque cusps.

PROPOSITION 10.- La quasi-isométrie σ_n tend vers une quasi-isométrie σ_∞ de la limite géométrique M_∞ .

Démonstration.- Le déplacement distance $(\sigma_n x_n, x_n)$ est borné parce que le flux de σ_n est borné (si S est une surface de géométrie bornée près de x_n , homotopie équivalente de M_n , la distance $(\sigma_n S, S)$ n'est pas trop grande parce que sinon le volume entre eux serait grand et cela impliquerait que le flux soit grand).

Donc, une sous-suite de σ_n converge vers une quasi-isométrie σ_∞ de la limite géométrique M_∞ . C.Q.F.D.

PROPOSITION 11.- Le flot géodésique sur une variété hyperbolique V connexe non compacte est ergodique s'il y a une exhaustion $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V$ par V_i compacte telle que l'aire des ∂V_i est bornée.

Démonstration.- D'après le théorème II (Sa) ou le théorème 32 (Sb), il suffit de démontrer que les séries de Poincaré $\sum_{\gamma \in \Gamma} \exp(-n \text{ distance}(x, \gamma x))$ divergent où $x \in \mathbb{H}^{n+1}$ et $V = \mathbb{H}^{n+1}/\Gamma$.

Si cette série converge, il y a une fonction $\varphi : V \rightarrow (0,1)$ non constante et harmonique en dehors de $\varphi^{-1}\{1\}$. (Un tel φ existe pour $\mathbb{H}^{n+1}$; $\Psi(x) =$ probabilité qu'un chemin aléatoire partant de x arrive dans une boule B fixe. Cette fonction Ψ décroît comme $\exp(-n(\text{distance}))$). A partir de là, $\varphi = \sum \Psi_\gamma$).

Puisque le gradient de φ préserve le volume $\int_{\partial V_i}$, $\text{grad } \varphi$ est constant. Près de ∞ dans V , $\text{grad } \varphi$ est petit parce que φ et φ'' sont bornées puisque φ est harmonique. L'aire ∂V_i bornée implique que $\int_{\partial V_i} \text{grad } \varphi \rightarrow 0$. Mais si V_1 est la boule ci-dessus, $\int_{\partial V_1} \text{grad } \varphi \neq 0$ (voir T , chap. 8).

Donc la série diverge et le flot géodésique est ergodique, C.Q.F.D.

COROLLAIRE 12.- La quasi-isométrie σ_∞ de M_∞ est homotope à une isométrie σ . L'ordre de σ est infini, le groupe $Z = \{\sigma^j\}$ d'isométries agit discontinuellement sur M_∞ et le volume de $E_\infty = M_\infty/Z$ est fini.

Démonstration.- Un relèvement de σ_∞ jusqu'à $\mathbb{H}^3$ détermine un homéomorphisme quasi-conforme η_∞ de S^2 . Par la proposition 11, $\pi_1 M_\infty$ agit ergodiquement sur $S^2 \times S^2$. Donc η_∞ est presque partout conforme (voir corollaire du théorème II (Sa, §2) parce qu'autrement la dérivée de η_∞ donne un champ tangent mesurable sur S^2 invariant par $\pi_1(M_\infty)$).

Si η_∞ est presque partout conforme, il est conforme (voir (B) ou (M)).

L'extension canonique de η_∞ donne l'isométrie homotope à σ_∞ .

Maintenant, chaque σ_∞^j n'est pas homotope à l'identité parce que l'on peut relever une telle homotopie jusqu'à M_n , n assez grand. Donc σ est d'ordre infini.

Le groupe $Z = \{\sigma^j\}$ agit discontinuement sur M_∞ parce que M_∞ n'admet pas des isométries infinitésimales ($\pi_1(M_\infty)$ n'est pas élémentaire).

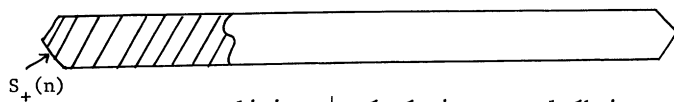
Le volume de M_∞/Z est plus petit que $(\sup \text{flux}(\sigma_n))$ plus (le volume de l'homotopie entre σ_∞ et σ restreinte à une section S), C.Q.F.D.

Pour chaque surface $S \rightarrow \mathcal{S} \subset M_n$ de géométrie bornée dans M_n , il y a une homotopie entre $S \rightarrow \mathcal{S} \subset M_n$ et $S \xrightarrow{\sigma_n^{-1}} S \rightarrow \mathcal{S} \subset M_n \xrightarrow{\sigma_n} M_n$. On appelle cette homotopie l'homotopie entre $\mathcal{S}$ et $\sigma_n \mathcal{S}$.

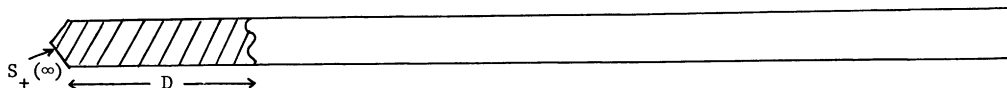
PROPOSITION 13.- Pour chaque $D > 0$, il y a une surface de géométrie bornée $\mathcal{S}_n$ dans M_n (n assez grand) telle que le volume d'une telle homotopie entre $\mathcal{S}$ et $\sigma_n \mathcal{S}$ est borné indépendamment de D et de N , et la distance entre $\mathcal{S}$ et le bord de M_n est plus grande que D .

Démonstration.- Il y a plusieurs pas. Soit $\mathcal{S}_J$ la surface plissée obtenue en tirant une triangulation J sur S (comme dans la démonstration de la proposition 4).

i) Pour chaque D et chaque n il y a une k -quasi-isométrie entre une partie de M_n qui contient le D -voisinage $N_+(D, n)$ de $\mathcal{S}_+$ et $\mathcal{S}_+ \times [0, 1]$, où k dépend de D mais est indépendant de n . (Comme dans la deuxième démonstration de la proposition 5, il y a une limite algébrique et aussi géométrique de Γ_n avec un point de base sur $S_+(n)$. Par (T, théorème 9.2), (T, théorème 9.4.2) peut être appliqué et le D -voisinage du bord de la partie convexe de la limite est difféomorphe à $S_+(\infty) \times I$.



limite $\downarrow$ géométrique et algébrique



En utilisant la presque isométrie pour n assez grand, nous obtenons la géométrie bornée décrite pour le D -voisinage de $S_+(n)$ dans M_n .

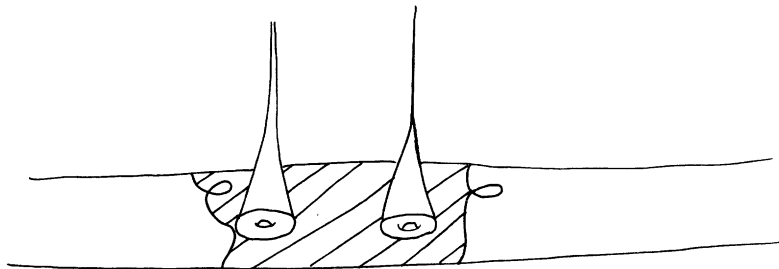
ii) Il y a une k -quasi-isométrie $M_n \supset N_+(D, n) \longleftrightarrow N_-(D, n) \subset M_n$ dans la classe d'homotopie de $(\sigma)^n$. (Par définition et d'après la proposition 1, il y a une telle quasi-isométrie entre $S_+(n)$ et $S_-(n)$. Par i), cette quasi-isométrie peut être étendue jusqu'à l'un d'eux entre $N_+(D, n)$ et $N_-(D, n)$).

iii) Si $\mathcal{S}_J \subset N_+(D, n)$, $\mathcal{S}_{\sigma J}$ est à une distance bornée de $N_-(D, n)$. (Il y a une homotopie bornée entre $\eta(\mathcal{S}_J)$ et $\mathcal{S}_{\sigma J}$ parce que η est une quasi-isométrie).

iv) Si J sur S et D sont donnés, il y a un j tel que $\mathcal{S}_{\sigma j J}$ est plus loin que D du bord de M_n , n étant assez grand. (Il y a un chemin des mouvements élémentaires de longueur $\ell = \ell(J, (\sigma))$ entre $\mathcal{S}_J$ et $\mathcal{S}_{\sigma J}$. Donc il y a un chemin de longueur ℓ entre $\mathcal{S}_{\sigma j J}$ et $\mathcal{S}_{\sigma^{j+1} J}$ pour chaque j . Par conséquent, il y a un chemin "continu" entre $\mathcal{S}_{\sigma^{-N_J} J}$ et $\mathcal{S}_{\sigma^{N_J} J}$, $N \rightarrow \infty$. Mais si l'un des $\mathcal{S}_{\sigma^j J}$ est D -proche de $S_+(n)$, $\mathcal{S}_{\sigma^{j+N_J} J}$ est D' -proche de $S_-(n)$ par iii). Donc, pour chaque J il y a un r tel que $\mathcal{S}_{\sigma^r J}$ est loin du bord de M_n , n étant assez grand).

v) Pour une triangulation J fixe, choisissez pour chaque D $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{r_J} \subset M_n$ avec n, r comme dans iv). Il y a une homotopie bornée entre $\sigma_n \mathcal{S}_{r_J}$ et $\mathcal{S}_{\sigma^{r+1} J}$ parce que σ_n est une quasi-isométrie. Il y a une homotopie bornée entre $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}_{\sigma^r J}$ et $\mathcal{S}_{\sigma^{r+1} J}$ en utilisant le ℓ mouvements basiques. (Il faut remarquer ici que l'opération dans la proposition 4 où le sommet tourne autour de C ne change pas beaucoup la position de $\mathcal{S}_J$). C.Q.F.D.

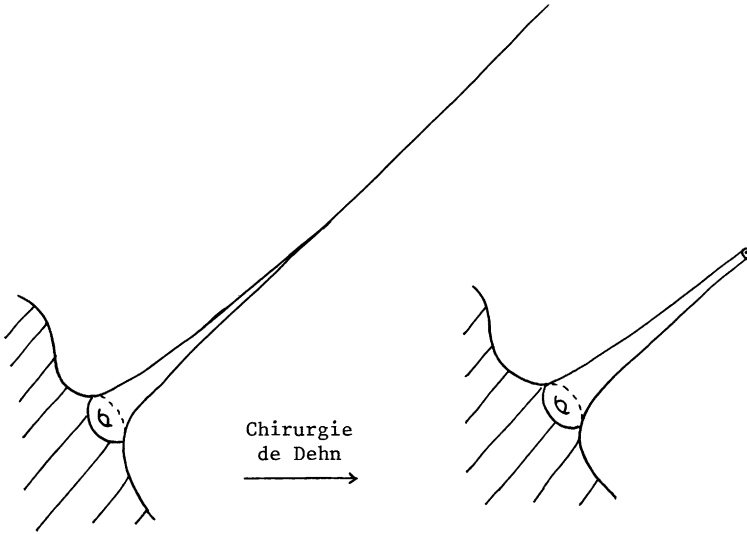
Fin de la démonstration.— Maintenant nous considérons une limite géométrique de M_n où le point de base est près de la surface donnée par la proposition 13, $\mathcal{S}_n \subset M_n$ et distance $(\mathcal{S}_n, \text{bord de } M_n) \rightarrow \infty$. Il y a une homotopie entre $\mathcal{S}_n$ et $\sigma_n \mathcal{S}_n$ dont le support est contenu dans un voisinage borné de $\mathcal{S}_n$ dans la partie épaisse de M_n (plus un nombre borné des presque cusps). Proposition 13.



Support de l'homotopie

Nous avons comme ci-dessus l'isométrie σ et le quotient $M_\infty / \mathbb{Z} = E_\infty$. Puisque E_∞ a un volume fini (proposition 12), il y a des structures hyperboliques sur les variétés compactes obtenues par la chirurgie de Dehn sur les cusps (on enlève le bout d'un cusp et on le remplace par un tore solide qui tue un élément primitif dans $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} = H_1(\text{tore})$) sauf pour un nombre fini d'exceptions

pour chaque cusp (T, 5.8.2).



Donc, on peut "fermer" les cusps de M_∞ d'une façon équivariante par rapport à σ et on peut avoir encore une isométrie $\bar{\sigma}$ de la fermeture $\bar{M}_\infty$.

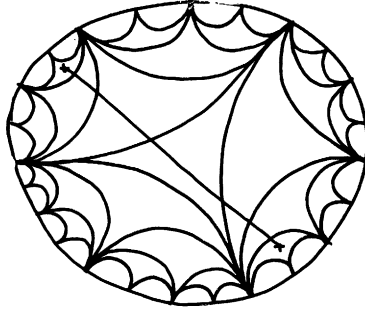
Une partie de M_∞ est presque isométrique à une partie de l'approximation M_n qui contient la partie épaisse du support de l'homotopie entre $\mathcal{J}_n$ et $\sigma_n \mathcal{J}_n$. Les "presque cusps" dans le support sont topologiquement des cusps qui ont été fermés. Les éléments dans $H_1(\text{Tore})$ tués sont liés par (σ) . Pour n grand, les éléments tués sont dans le domaine de $(T, 5.8.2)^*$. Donc pour n assez grand, on peut fermer les cusps de M_∞ pour obtenir $\bar{M}_\infty$ et $\bar{\sigma}$ de sorte qu'il y ait une homotopie entre $\bar{\sigma} \mathcal{J}'_n$ et $\mathcal{J}'_n$, où $\mathcal{J}'_n$ est l'image de $\mathcal{J}_n$ dans $\bar{M}_\infty$.

Alors $\bar{E} = \bar{M}_\infty / (x \sim \bar{\sigma} x)$ est compact et il y a une application continue de $E = S \times [0, 1] / ((x, 0) \sim (\bar{\sigma} x, 1))$, $\bar{E} \rightarrow \bar{E}_\infty$ (en utilisant l'homotopie entre $\bar{\sigma} \mathcal{J}'_n$ et $\mathcal{J}'_n$) qui est injective sur le groupe fondamental. Donc E est homotopie équivalente à un revêtement $\bar{\bar{E}}$ de $\bar{E}$. Ce revêtement est forcément compact et le théorème est démontré.

Les travaux de Jorgensen.— Il y a quelques années, Jorgensen a fait une description remarquable et concrète de l'ensemble des groupes quasi-fuchsien où le modèle fuchsien est un tore avec un cusp (ou un tore avec un point elliptique d'ordre n). Il a décrit le domaine fondamental canonique d'une façon explicite

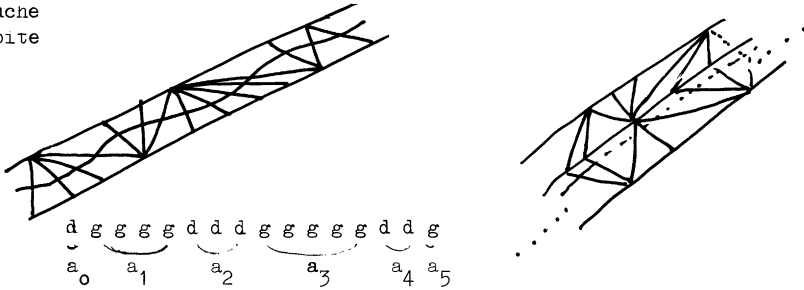
(*) Parce que le domaine de $(T, 5.8.2)$ contient toutes les chirurgies qui sont proches des cusps dans le sens géométrique.

(à paraître (J_1)). Imaginez la décomposition du disque hyperbolique en triangles idéaux.



Pour chaque paire de points dans ce disque, il y a un groupe quasi-fuchsien (de type tore avec un cusp) dont le domaine fondamental dans H^3 a une configuration de facettes, trois autour de chaque sommet, de sorte que la "dual decomposition" est (jusqu'à un morceau borné près des deux bouts) quatre fois la suite de triangles le long de la géodésique entre les deux points,

g = gauche
 d = droite



(placé sur un cylindre topologique).

Si les deux points tendent vers l'infini et la géodésique entre eux détermine un schéma de triangles périodiques,

$$\dots \underbrace{a_0}_{g} \underbrace{a_1}_{g} \underbrace{a_0}_{g} \underbrace{a_1}_{g} \dots$$

il y a aussi un groupe limite (algébrique et géométrique) dont le domaine fondamental est aussi géométriquement périodique. Le groupe étendu par cette symétrie

est le groupe d'un fibré sur le cercle avec mododromie $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ par la suite,

$$\text{monodromie} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette variété est l'union exacte des tétraèdres idéaux (le nombre égal $a_0 + a_1 + \dots + a_n$) et le volume total satisfait $cn \leq V \leq C^n$ pour deux constantes c et C .

(*) Donc le volume n'est pas comparable à l'entropie de la monodromie.
 (l'entropie = $\log \lambda$).

Donc Jorgensen a une démonstration^{**} très jolie et très concrète du théorème de Thurston pour le cas où le fibré est un tore avec un cusp ou pointe elliptique d'ordre $n > 1$.

Tous les phénomènes de la théorie "abstraite" de Thurston sont réalisés d'une façon non triviale parmi les exemples de Jorgensen. En fait, ses exemples ont donné beaucoup de motivations pour les résultats généraux.

(**) Il faut que Jorgensen utilise pour cette démonstration une généralisation du théorème de la rigidité de Mostow contenue dans (Sa) . En fait, une motivation de cette généralisation était cette application. Cette généralisation a été faite un peu après que Thurston ait démontré le théorème ci-dessus.

References :

- (A) Ahlfors, Lars "Quasi conformal deformations and mappings in R^n "
Journal d'Analyse Mathématique, vol. 30 (1976) pp 74-97.
- (B) Bers, Lipman "Uniformization by Beltrami equations"
Comm. Pure Appl. Math 14 (1961).
- (M) Mostow G.D. "Quasi-conformal mappings in n -space and the rigidity of
hyperbolic space forms"
Publications Mathématiques IHES n°34 (1968) pp 53,104.
- (J) Jorgensen, Troels "Compact 3-manifolds of constant negative curvature
fibring over the circle"
Annals of Math. (106) 61-72, (1977).
- (AT) A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poénaru et al "Travaux de Thurston sur
les surfaces"
Astérisque 66-67 (1979).
- (P) Poénaru, Valentin "Travaux de Thurston sur les difféomorphismes
des surfaces et l'espace de Teichmüller"
Bourbaki (529) 1978/79.
- (S) Sullivan, Dennis a) "Ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete
group of hyperbolic motions"
Proceedings of Stony Brook Conference on Kleinian Groups (1978) Princeton
University Press.
b) "The density at infinity of a discrete group of
hyperbolic motions"
Publications Mathématiques IHES n°50 (1979) pp 171, 202.
- (T) Thurston, W. "The geometry and topology of 3-manifolds"
Princeton Notes 1978,1979,... (Bibliothèque de l'IHES, d'Orsay etc..., à
paraître comme livre, Princeton University Press).
- (T₁) Thurston, W. "On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of
surfaces"
Preprint Princeton 1977.
- (J₁) Jorgensen, Troels "On pairs of once punctured tori"
(manuscript).

Dennis SULLIVAN
I.H.E.S.
35 route de Chartres
91440 BURES sur YVETTE