NICOLE DESOLNEUX-MOULIS

Orbites périodiques des systèmes hamiltoniens autonomes

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. nº 552, p. 156-173

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1979-1980__22__156_0>

Séminaire BOURBAKI 552-01
32e année, 1979/80, n° 552 Février 1980

ORBITES PÉRIODIQUES DES SYSTÈMES HAMILTONIENS AUTONOMES

[d'après Clarke, Ekeland-Lasry, Moser, Rabinowitz, Weinstein]

par Nicole DESOLNEUX-MOULIS

I. Introduction

I.1. Position du problème, notations

L'espace $\mathbb{R}^{2n}$ étant muni d'un produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, nous choisissons une base orthonormée. Les coordonnées d'un point z de $\mathbb{R}^{2n}$ sont notées dans cette base $(x_1,\dots,x_n,p_1,\dots,p_n)$. On désignera par x (resp. p) la projection de z sur l'espace engendré par les n premiers vecteurs de base (resp. les n derniers vecteurs de base).

Nous considérons sur $\mathbb{R}^{2n}$ la 2-forme non dégénérée

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dp_i$$

La forme Ω définit sur $\mathbb{R}^{2n}$ une structure symplectique.

Soit H une application de classe C^2 de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}$; nous considérons le système différentiel hamiltonien autonome $(\mathcal{H})$:

$$(\mathcal{H}) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{aligned} \right\} \quad 1 \le i \le n$$

Le système $(\mathcal{H})$ sera parfois noté :

$$\dot{z} = J.\mathrm{grad}\, H(z)$$

où grad H désigne le gradient de H et J la matrice carrée d'ordre $2n$ qui s'écrit en décomposition en blocs :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

I_n est la matrice unité carrée d'ordre n .

Le vecteur $J.\mathrm{grad}\, H(z)$ sera appelé gradient symplectique de H au point z .

Définitions

1) Une solution $z(t)$ du système $(\mathcal{H})$ sera dite périodique s'il existe T non nul tel que $z(t+T) = z(t)$; le nombre T ainsi défini est une période de la solution $z(t)$.

2) Supposons que $z(t)$ soit une solution périodique de $(\mathcal{H})$ non constante et soit T_o le plus petit nombre positif tel que $(z(t+T) = z(t))$, T_o est la <u>période minimale</u> de la solution $z(t)$.

3) Soit $z(t)$ une solution périodique de $(\mathcal{H})$, l'ensemble des points $z(t)$ quand t décrit $\mathbb{R}$ est une <u>orbite périodique</u> de $\mathcal{H}$.

Nous traitons dans cet exposé le problème de l'existence de solutions périodiques du système $(\mathcal{H})$, soit le niveau d'énergie H étant fixé, soit la période T étant fixée.

Il s'agit d'un très vieux problème dont l'étude, au moins à l'origine a été fortement motivée par les calculs des astronomes. (On pourra consulter [16], Vol IV, Part I-II pour les résultats récents obtenus par les astronomes et des calculs numériques montrant la complexité des phénomènes). Après Lagrange [19] c'est à Poincaré [26] que l'on doit les premiers travaux très importants sur le sujet et ses idées inspirent encore nombre de recherches.

Ainsi, en adaptant des arguments de Poincaré, J. Vey [31] a trouvé un critère d'existence d'orbites périodiques qui recouvre partiellement certains résultats du § III.2.

Mais ce n'est pas cet aspect du problème que nous traitons dans cet exposé. Nous nous limiterons aux résultats encore incomplets obtenus par la méthode variationnelle qui s'est montrée si fructueuse dans l'étude des géodésiques périodiques des variétés Riemanniennes [28] et [18].

I.2. <u>Les systèmes linéaires</u>

Les résultats suivants sont classiques et nous renvoyons à [1] (p. 489 et suivantes) ou à [3] pour leur démonstration.

Supposons que le système $(\mathcal{H})$ soit linéaire, c'est-à-dire que le hamiltonien H soit quadratique : $H = \frac{1}{2} \langle Sz,z \rangle$ où S est un opérateur symétrique. Le système $(\mathcal{H})$ s'écrit :

$$\dot{z} = A.z \qquad \text{avec} \qquad A = J.S \tag{1}$$

La matrice A vérifie la relation ${}^{t}AJ + JA = 0$. Nous supposons, en outre, que l'origine est un point d'équilibre stable du système (1) c'est-à-dire que la partie réelle des valeurs propres de A est nulle.

La proposition suivante est démontrée dans [1]

PROPOSITION 1.- <u>Si l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée</u> :

(H_1) <u>les valeurs propres</u> $(\pm i\lambda_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ <u>de la matrice</u> A <u>sont toutes distinctes</u>.

(H_2) <u>La forme quadratique</u> H <u>est définie positive</u>.

<u>Alors il existe un changement symplectique de coordonnées, tel que dans les nouvelles</u>

coordonnées $(X_1,\ldots,X_n,P_1,\ldots,P_n)$ le système (1) s'écrive :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X''_i + \lambda_i^2 X_i = 0 \\ X'_i - P_i = 0 \end{array} \right\} \qquad 1 \leq i \leq n .$$

Les nouvelles coordonnées sont appelées les modes normaux de vibration. Le système (1) est équivalent à un produit de n oscillateurs harmoniques de période $T_1 \ldots T_n$ avec $T_i = \frac{2\pi}{\lambda_i}$ ($\lambda_i > 0$). Dans ces nouvelles coordonnées, le hamiltonien H est de la forme :

$$H(X,P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^2 X_i^2 + P_i^2)$$

ou

$$H(X',P') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (X_i'^2 + P_i'^2)$$

en posant $X'_i = \sqrt{\lambda_i}\, X_i$, $P'_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} P_i$.

Remarques.- Sous les hypothèses de la proposition 1 :

a) La période T_i d'une solution périodique est indépendante du niveau d'énergie sur lequel se trouve cette solution.

b) Le système admet n intégrales premières en involution $I_i = X_i'^2 + P_i'^2$ ($1 \leq i \leq n$).

Réciproquement, d'après le théorème de Liouville ([3] ch. X) si un système $\mathcal{H}$ admet n intégrales premières indépendantes, en involution, son intégration se ramène à des quadratures et les orbites périodiques peuvent se calculer explicitement. On remarque alors que les périodes sur un niveau d'énergie donné dépendent du niveau d'énergie. La présence de petits dénominateurs ([4], [29]) interdit de transformer tout système $(\mathcal{H})$ proche d'un système intégrable, en un système intégrable. D'autres méthodes devront être employées pour montrer l'existence d'orbites périodiques.

II. Les outils fondamentaux

II.1. Le principe de moindre action de Hamilton-Maupertuis

Soit $W^{1,2}(S^1)$ l'espace de Hilbert des fonctions réelles périodiques de période 1 , de carré intégrable ainsi que leur première dérivée.

Posons $E = (W^{1,2}(S^1))^{2n}$.

Un élément de E sera noté z et sa dérivée par rapport à t , $\dot{z}$. La norme dans E est définie par la formule : $\|z\|_E^2 = \int_0^1 (<\dot{z}(t),\dot{z}(t)> + <z(t),z(t)>)dt$.

L'intégrale de l'action définit une application S_0 de classe C^2 de E dans $\mathbb{R}$

$$S_0(z) = \int_0^1 \frac{1}{2} <Jz(t),\dot{z}(t)> dt$$

$$= \int_0^1 <\dot{x}(t),p(t)> dt = - \int_0^1 <x(t),\dot{p}(t)> dt .$$

Un hamiltonien H étant donné comme au § I, pour toute valeur $\lambda > 0$ d'un paramètre, nous définissons l'application S_λ de E dans $\mathbb{R}$ de classe C^2.

$$S_\lambda(z) = \int_0^1 \frac{1}{2} < Jz(t), \dot{z}(t) > dt - \lambda \int_0^1 H(z(t))dt .$$

La proposition suivante est classique en calcul des variations (voir [23], [27] et [35] pour une présentation plus formelle dans le cas où le système hamiltonien est défini sur une variété).

PROPOSITION 2.-

1) Les points critiques de la fonctionnelle S_λ sont les solutions de classe C^2 (périodiques, de période 1) du système hamiltonien $(\mathcal{H}_\lambda)$:

$$(\mathcal{H}_\lambda) \qquad \dot{z} = J\lambda \text{ grad } H(z) .$$

Posons $z_1(t) = z(\frac{t}{\lambda})$; l'application z_1 est solution périodique de période λ du système $(\mathcal{H})$ et il existe une constante c telle que $H(z_1(t)) = c$.

2) Soit c une constante fixée qui ne soit pas une valeur critique de H , et soit z un point critique de la restriction de S_0 à l'ensemble des éléments z de E vérifiant $H(z(t)) = c$ pour tout t ; alors il existe λ multiplicateur de Lagrange tel que z soit solution périodique de période 1 de $(\mathcal{H}_\lambda)$.

La proposition géométrique suivante introduite pour la première fois par Rabinowitz dans [27], mais sans doute bien connue auparavant permettra dans la suite de bien choisir le Hamiltonien H :

PROPOSITION 3.- Soit Σ_c l'ensemble des points z de $\mathbb{R}^{2n}$ vérifiant $H(z) = c$; on suppose que H n'a pas de point critique sur Σ_c ; l'ensemble des orbites du système $(\mathcal{H})$ sur Σ_c ne dépend que de Σ_c et est indépendant de la fonction H de classe C^1 constante sur Σ_c et sans point critique sur Σ_c .

Démonstration.- Soient H et H_1 tels que $H^{-1}(c) = H_1^{-1}(c) = \Sigma_c$. Il existe une application μ de Σ_c dans $\mathbb{R} - \{0\}$ telle que en tout point z de Σ_c :

$$\text{grad } H(z) = \mu(z) \text{ grad } H_1(z)$$
$$J \text{ grad } H(z) = \mu J \text{ grad } H_1(z) .$$

Les deux champs de vecteurs hamiltoniens sont colinéaires et ont donc mêmes orbites (paramétrées différemment).

Comme l'avait déjà remarqué Birkhoff [7] les fonctionnelles S_0 et S_λ sont linéaires en $\dot{z}$ et donc très mauvaises du point de vue du calcul des variations. Pour montrer l'existence de points critiques, il faudra, soit restreindre S à une sous-variété bien choisie de dimension finie (§ III), soit définir une nouvelle fonctionnelle par dualité (§ IV.1), soit approcher l'espace E par une suite de sous-espaces de dimension finie [27].

Nous remarquons que le groupe de Lie compact $G = S^1$ agit par translation sur E et que les fonctionnelles S et S_λ sont équivariantes sous l'action de G . C'est cette remarque qui permettra de conclure à l'existence de points critiques de S_λ ou S_o par un calcul d'indice.

II.2. Indice cohomologique pour l'action de S^1 [13]

Soit X un espace paracompact sur lequel le groupe S^1 agit librement. Soit $\mathcal{P}(X) = (X,p,\overline{X},S^1)$ le fibré principal de fibre S^1 d'espace total X de base $\overline{X} = X/S^1$. L'espace de base du fibré universel classifiant pour les S^1-fibrés principaux est $\mathbb{C}P^\infty$. Soit α la première classe de Chern universelle génératrice de la cohomologie de $\mathbb{C}P^\infty$ ($\alpha \in H^2(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z})$) et soit f l'application classifiante du fibré $\mathcal{P}(X)$.

Définition.- Nous définissons l'indice $I(X)$ de l'espace total X du fibré $\mathcal{P}(X)$ par la formule suivante :

$$I(X) = 1 + \sup\{k \,;\, f^*(\alpha^k) \neq 0\}$$

La proposition suivante est démontrée dans [13].

PROPOSITION 4.- L'indice de X vérifie les propriétés suivantes :

(i) $I(\emptyset) = 1$.

(ii) Soient X et Y deux espaces paracompacts sur lesquels S^1 agit librement, on suppose qu'il existe φ , une application équivariante de X dans Y ; alors $I(X) \leq I(Y)$.

(iii) $I(X_1 \cup X_2) \leq I(X_1) + I(X_2)$.

(iv) Soit K un compact de X invariant par l'action de S^1 , il existe N voisinage de K dans X invariant par l'action de S^1 tel que $I(N) = I(K)$.

Exemple fondamental.- Soit $\mathcal{P} = (S^{2n-1},p,P^{n-1}(\mathbb{C}),S^1)$ la fibration de Hopf ; alors $I(S^{2n-1}) = n$.

La proposition suivante montre comment sera utilisé l'indice $I(X)$ [25] :

PROPOSITION 5.- Supposons que X et $\overline{X}$ soient des variétés hilbertiennes de classe C^2 et soit S une application de X dans $\mathbb{R}$ équivariante telle que l'application $\overline{S}$ de $\overline{X}$ dans $\mathbb{R}$ déduite de S par passage au quotient soit de classe C^1 , bornée inférieurement et vérifie la condition (C) de Palais-Smale ; alors S admet, sur X , $I(X)$ orbites critiques distinctes au moins.

Démonstration.- Notons $\operatorname{cat}(\overline{X})$ la catégorie de Lusternik-Schnirelman de $\overline{X}$ [20] et [28] (chap. V). On sait que $\operatorname{cat}(\overline{X}) \geq \text{cup long}(\overline{X}) + 1$. Par la définition de $I(X)$, $\text{cup long}(\overline{X}) \geq I(X) - 1$. Donc $\operatorname{cat} \overline{X} \geq I(X)$.

La proposition résulte alors du principe du minimax tel qu'il est énoncé par R.S. Palais dans [25].

Remarque.- La théorie de l'indice permet de généraliser la proposition ci-dessus dans des cas particuliers même quand $\overline{X}$ n'est pas une variété différentiable.

III. Les résultats locaux au voisinage d'une position d'équilibre

Nous considérons sur $\mathbb{R}^{2n}$ un hamiltonien H de classe C^2 vérifiant $H(0) = 0$ et $\operatorname{grad} H(0) = 0$, et les systèmes différentiels $(\mathcal{H})$ et $(\mathcal{H}_\ell)$

$$(\mathcal{H}) \qquad \dot{z} = J.\operatorname{grad} H(z)$$

$$(\mathcal{H}_\ell) \qquad \dot{z} = J.H''(0).z$$

où $H''(0)$ est le Hessien de H en 0 .

Le système $(\mathcal{H}_\ell)$ est le système linéarisé du système $(\mathcal{H})$ à l'origine.

Supposons que la matrice $A = J.H''(0)$ admette $2k$ valeurs propres imaginaires pures distinctes $\pm i\lambda_1, \ldots, \pm i\lambda_k$. D'après I.2 sur chaque niveau d'énergie le système $\mathcal{H}_\ell$ admet au moins k orbites périodiques de période $T_i = \frac{2\pi}{\lambda_i}$. On cherche si "en un certain sens" ces solutions persistent pour le système $(\mathcal{H})$ dans un voisinage de l'origine.

Lyapunov [21] et Horn [17] ont les premiers obtenu un résultat dans le cas où toutes les valeurs propres sont simples avec une condition de non résonnance. (Pour une démonstration dans le cas analytique, par des développements en série voir [29], ou [1] pour une démonstration par le théorème des fonctions implicites.)

Weinstein le premier a considérablement amélioré le résultat de Lyapunov en montrant que si la forme quadratique associée à $H''(0)$ est définie positive, alors sur toute hypersurface de niveau de H , proche de 0 , il existe au moins n orbites périodiques distinctes [32] et [33].

Nous résumons dans le théorème 1 dont la première partie est due à Moser et la deuxième à Rabinowitz, l'essentiel des résultats locaux connus à ce jour.

THÉORÈME 1.- <u>Soit</u> H <u>un hamiltonien de classe</u> C^2 <u>tel que</u> $H(0) = 0$, $\operatorname{grad} H(0) = 0$. <u>Soit</u> $(\mathcal{H})$ <u>le système hamiltonien associé à</u> H , $(\mathcal{H}_\ell)$ <u>le système linéarisé en</u> 0 . <u>Supposons que</u> $\mathbb{R}^{2n} = E_1 \oplus E_2$ <u>où</u> E_1 <u>et</u> E_2 <u>sont deux sous-espaces invariants par le flot de</u> $\mathcal{H}_\ell$. <u>On suppose que toutes les solutions de</u> $(\mathcal{H}_\ell)$ <u>situées dans</u> E_1 <u>ont une période</u> T <u>et qu'aucune solution dans</u> $E_2 - \{0\}$ <u>n'a</u> T <u>comme période</u>.

a) (Moser [22] et [23]) <u>Si la restriction à</u> E_1 <u>de la forme quadratique définie par</u> $H''(0)$ <u>est définie positive, alors pour tout</u> $\varepsilon > 0$ <u>assez petit sur chaque hypersurface</u> $H(z) = \varepsilon^2$, <u>le système</u> $\mathcal{H}$ <u>admet au moins</u> ν <u>orbites périodiques</u> ($\nu = \frac{1}{2} \dim E$).

b) (Fadell et Rabinowitz [13]) <u>Soit</u> 2ν <u>la signature de la restriction à</u> E_1 <u>de la forme quadratique définie par</u> $H''(0)$. <u>On suppose</u> $2\nu \neq 0$ <u>et supposons que dans</u> E_1 <u>l'origine est le seul point d'équilibre de</u> $(\mathcal{H}_\ell)$; <u>alors</u>

- <u>ou bien</u> 0 <u>n'est pas une solution périodique isolée de période</u> T <u>de</u> $(\mathcal{H})$,
- <u>ou bien il existe un couple d'entiers</u> (k,m) <u>vérifiant</u> $(k+m) > \nu$ <u>et deux nombres</u> $\alpha, \beta > 0$ <u>tels que pour tout</u> λ <u>appartenant à</u> $]T-\alpha, T[$ (resp. $]T, T+\beta[$) <u>le système</u> $\mathcal{H}$ <u>possède au moins</u> k (resp. m) <u>solutions périodiques de période</u> λ .

L'exemple suivant dû à Siegel ([29] p. 109) montre la nécessité d'une hypothèse sur la signature de la restriction à E_1 de la forme quadratique

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + p_1^2) - (x_2^2 + p_2^2) + x_1 p_1 p_2 + \frac{1}{2}(x_1^2 - p_1^2) p_2 \ .$$

Le système a une seule famille d'orbites périodiques situées dans le plan $x_2 = p_2 = 0$.

Les démonstrations de Moser et Rabinowitz bien qu'assez différentes sont toutes les deux basées sur le même principe : par une méthode de type Lyapunov-Schmidt, on se ramène à trouver des points critiques de la fonctionnelle définie dans II sur une variété de dimension finie à laquelle on pourra appliquer la proposition 5. Une présentation plus conceptuelle de cette méthode est faite dans [35].

<u>Principe de la démonstration de Moser</u> : on se ramène à un problème de bifurcation en posant

$$\overline{H}(z,\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon^{-2} H(\varepsilon z) & \text{si } \varepsilon > 0 \\ \langle H''(0).z, z\rangle & \text{si } \varepsilon = 0 \ . \end{cases}$$

Considérons le système $(\overline{\mathcal{H}})$ $\dot{z} = J.\text{grad}\, \overline{H}$.

Posons $A = J.H''(0)$ et soit A_i la restriction de A à E_i . Après normalisation, on peut supposer que $e^{A_1} = \text{Id}$ et $\det(e^{A_2} - \text{Id}) \neq 0$.

Pour toute application u de classe C^2 de E_1 dans $\mathbb{R}^{2n}$, posons

$$Pu(\xi) = \left\{\frac{d}{ds}\left(u(e^{A_1 s}.\xi)\right)\right\}_{s=0}$$

et soient u_1 et u_2 les composantes de u suivant E_1 et E_2 .

<u>Lemme</u>.- <u>Soit</u> B_1 <u>la boule ouverte de centre</u> 0 <u>et de rayon</u> 2 <u>de</u> E_1 . <u>Sous les hypothèses précédentes pour</u> ε <u>et</u> δ <u>assez petits, il existe des applications</u> $u_\varepsilon(\xi,\lambda)$ <u>et</u> $v_\varepsilon(\xi,\lambda)$ <u>de</u> $B_1 \times]1-\delta, 1+\delta[$ <u>dans</u> $\mathbb{R}^{2n}$ <u>telles que</u> :

$$\begin{cases} Pu_\varepsilon(\xi,\lambda) = \lambda J \text{ grad } \overline{H}(u_\varepsilon(\xi)) + v_\varepsilon(\xi,\lambda) \\ Pv_\varepsilon(\xi,\lambda) = A.v_\varepsilon(\xi,\lambda) \\ \int_0^1 e^{-A_1 s} u_{\varepsilon,1}(e^{A_1 s}.\xi)\,ds = \xi \end{cases}$$

<u>et pour</u> $\varepsilon = 0 \begin{cases} u_{0,1}(\xi,\lambda) = \xi & v_{0,1}(\xi,\lambda) = (1-\lambda)\, A_1.\xi \\ u_{0,2}(\xi,\lambda) = 0 & v_{0,2}(\xi,\lambda) = 0 \end{cases}$.

L'application u est construite par un théorème de point fixe ; elle "quasi-conjugue" les solutions de $\overline{\mathcal{H}}$ et de $\mathcal{H}_\ell$, modulo une application v qui commute avec le flot de $(\mathcal{H}_\ell)$.

On remarque qu'à tout point (ξ,λ) tel que $v_\varepsilon(\xi,\lambda) = 0$ correspond une solution périodique de $(\overline{\mathcal{H}}_\varepsilon)$ de période λ .

<u>Fin de la démonstration de Moser</u>

Considérons le Hamiltonien moyenné sur E_1 $H^*_\varepsilon(\xi) = \int_0^1 \overline{H}_\varepsilon(u_\varepsilon(e^{A_1 s}.\xi))\,ds$.

Les fonctions S et H_ε^* sont invariantes par le flot du système $(\overline{\mathcal{H}}_o)$ restreint à E_1. Soit c une constante proche de 1, l'équation $H_\varepsilon^*(\xi) = c$ définit une hypersurface Σ_c de E_1 proche de la sphère d'équation $< J^{-1}A_1\xi,\xi> = c$.

En appliquant la proposition 5, on en déduit que la restriction de S à Σ_c admet ν orbites critiques. On remarque d'autre part que la gradient symplectique de la restriction de S à Σ_c est le champ v_ε. La restriction de v_ε à Σ_c admet donc ν orbites périodiques distinctes, ce qui démontre le théorème.

Principe de la démonstration du théorème de Fadell-Rabinowitz

Nous supposons que $T = 1$ et soit $Y = (L^2(S^1))^{2n}$ l'espace des applications de carré intégrable de S^1 dans $\mathbb{R}^{2n}$. Nous considérons l'application $\mathcal{F}$ de $E \times \mathbb{R}^+$ dans Y définie par :

$$\mathcal{F}(z,\lambda) = J\dot{z} + \lambda \text{ grad } H(z) .$$

L'application $\mathcal{F}$ est de classe C^1 et sa différentielle en 0 est donnée par la formule

$$D_z\mathcal{F}(0,\lambda).\delta z = I.\dot{\overline{\delta z}} + \lambda H''(0).\delta z .$$

Le noyau $\mathcal{N}$ de $D_z\mathcal{F}(0,1)$ est donc un espace vectoriel de dimension $2k = \dim E$ qui est l'ensemble des solutions périodiques de période 1 du système $(\mathcal{H}_{1,\ell})$

$$(\mathcal{H}_{1,\ell}) \qquad \dot{z} = JH''(0).z .$$

On vérifie que $D_z\mathcal{F}(0,1)$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0.

Soit $\mathcal{N}^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{N}$ dans E, P et $P^\perp$ les projections orthogonales respectivement sur $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}^\perp$. Soient x et y les composantes d'un élément z de E suivant $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}^\perp$. Par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage Ω de $(0,1)$ dans $\mathcal{N} \times \mathbb{R}$ et une application φ de classe C^1 de Ω dans $\mathcal{N}^\perp$ telle que l'équation $P^\perp\mathcal{F}(z,\lambda) = 0$ soit équivalente à l'équation $y = \varphi(x,\lambda)$.

Il suffit donc de résoudre, pour λ proche de 1 l'équation $P\mathcal{F}(x+\varphi(x,\lambda),\lambda) = 0$.

Les solutions de cette équation sont les points critiques de la restriction g_λ de S_λ au graphe de l'application φ. Posons $g_\lambda(x) = S_\lambda(x+\varphi(x,\lambda))$.

Deux cas sont possibles :

- ou bien l'origine n'est pas un point critique isolé de g_1 et on obtient le cas 1 du théorème,
- ou bien l'origine est un point critique isolé de g_1.

Nous nous plaçons désormais dans ce cas et soit $\psi(s,x)$ le flot dans $\mathcal{N}$ associé au champ de vecteurs $-\text{grad } g_1(x)$. On construit alors un voisinage Q de 0 dans $\mathcal{N}$ ne contenant pas de point critique autre que 0, invariant sous l'action de S^1 et dont le bord est formé de lignes de gradient de g_1 et de morceaux d'hypersurfaces d'équation $|g_1(x)| = c$.

Soit $S^+ = \{x \in Q\ ;\ \psi(s,x) \in Q \quad s > 0\}$

$S^- = \{x \in Q\ ;\ \psi(s,x) \in Q \quad s < 0\}$

$T^+ = S^+ \cap \partial Q \qquad T^- = S^- \cap \partial Q$.

Alors $I(T^+) + I(T^-) \geq N$.

Un calcul direct montre que dans un voisinage assez petit de zéro, le signe de $g_\lambda(x)$ est déterminé par celui de la forme quadratique du système linéarisé :

$$g_\lambda(x) = (1-\lambda)\int_0^1 \frac{1}{2} < H''(0).x(t),x(t) > dt + o\|x\|^2_{\mathcal{A}}$$

On en déduit l'existence de points critiques de $g_\lambda(x)$ dans Q en appliquant le principe du minimax à des sous-ensembles convenables de Q invariants par l'action de S^1 .

IV. Les résultats globaux

Considérons la système hamiltonien $(\mathcal{H})$ donné sur l'espace $\mathbb{R}^{2n}$ tout entier, nous cherchons les solutions périodiques de $(\mathcal{H})$ non constantes

- soit sur une hypersurface d'énergie fixée,
- soit de période fixée.

IV.1. Cas où l'hypersurface d'énergie est fixée

Successivement Seifert [30] (pour les Hamiltoniens de la forme $H(x,p) = \frac{1}{2}\Sigma g_{ij}(x)p_i p_j + V(x)$ où $V^{-1}]-\infty,a]$ est difféomorphe à un disque), Berger [6] Gordon [15] dans un cas un peu plus général, puis Weinstein [34], et Clarke [9] dans le cas où H est une fonction convexe, ont montré l'existence d'au moins une orbite périodique du système $(\mathcal{H})$ sur un niveau d'énergie donné.

Pour le moment les deux résultats les plus forts sont les suivants :

THÉORÈME 2 (I. Ekeland - J.M. Lasry [12]).- Soit H un hamiltonien défini sur $\mathbb{R}^{2n}$ et c une constante. On suppose que $\Sigma_c = H^{-1}(c)$ est une hypersurface de classe C^1 qui est le bord d'un compact convexe B_c possédant la propriété (P) suivante :

(P) $\begin{cases} \text{il existe deux boules } B_1 \text{ et } B_2 \text{ de même centre } z_0 \text{ de rayons respectifs} \\ r \text{ et } r\sqrt{2} \text{ telles que} \\ \qquad B_1 \subset \mathring{B}_c \subset B_2 . \end{cases}$

Alors sur Σ_c le système $(\mathcal{H})$ admet au moins n orbites périodiques distinctes.

THÉORÈME 3 (P. Rabinowitz [27]).- Soit H un hamiltonien défini sur $\mathbb{R}^{2n}$ et c une constante. On suppose que $\Sigma_c = H^{-1}(c)$ est une hypersurface de classe C^1 radialement homéomorphe à S^{2n-1} et telle qu'en tout point z de Σ_c : $< z, \text{grad } H(z) > \neq 0$.
Alors le système $(\mathcal{H})$ admet au moins une orbite périodique sur Σ_c .

Commentaires sur ces théorèmes

Le théorème 2 redonne le théorème local de Weinstein avec une hypothèse plus faible (la surface Σ_c est de classe C^1 au lieu d'être de classe C^2) et une autre plus forte traduisant la propriété (P) :

<u>Traduction de la propriété</u> (P) <u>pour les systèmes linéaires</u> dont le hamiltonien est une forme quadratique définie positive :

Soient $\pm i\lambda_1,\dots,\pm i\lambda_k$ les valeurs propres du système $(\mathcal{H}_\ell)$ (avec $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$). Le système $\mathcal{H}_\ell$ vérifie la condition (P) si et seulement si on a la relation : $\lambda_k < 2\lambda_1$. On remarque d'autre part que cette condition n'est pas invariante par transformation canonique alors que la propriété pour un système d'avoir une orbite périodique est invariante par transformation canonique. Le théorème 3 est le seul théorème connu applicable au cas où Σ_c n'est pas convexe. Il semble qu'on puisse espérer prouver qu'en ajoutant aux hypothèses du théorème 3 une hypothèse supplémentaire généralisant la condition (P) on puisse montrer que sur tout niveau d'énergie Σ_c il existe au moins n orbites périodiques distinctes.

Nous ne donnerons pas ici, faute de place, la démonstration du théorème 3 qui est basée sur les principes énoncés au paragraphe II, mais est très technique.

<u>Principes de la démonstration du théorème</u> 2

Nous supposerons, pour clarifier l'exposé l'application H de classe C^2 en dehors de l'origine et H'' définie positive. Le cas général se traite de même en utilisant les notions de sous différentiel.

Nous supposerons désormais $c = 1$, $z_0 = 0$ et H positivement homogène de degré 2 (ce qui est toujours possible d'après la proposition 3).

Sous ces hypothèses, la propriété (P) devient :

$$(P_1) \quad \begin{cases} \text{il existe deux constantes } \beta > 0 \text{ et } \gamma > 0 \text{ telles que} \\ \beta < 2\gamma \quad \text{et} \quad \gamma|z|^2 \leq H(z) \leq \beta|z|^2 \end{cases}$$

a) <u>Transformation de Legendre</u>

L'idée d'utiliser une transformation de Legendre par rapport à la variable $z = (x,p)$ est issue des méthodes de l'analyse convexe et a été utilisée pour la première fois par Clarke dans [9].

<u>Définition</u>.- Soit φ une application uniformément strictement convexe de classe C^2 de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}$. On définit sa transformée de Legendre φ^* par la formule :

$$\varphi^*(w) = \sup_{z\in\mathbb{R}^{2n}} \{ \langle z,w\rangle - \varphi(z) \}$$

On vérifie facilement le lemme suivant :

<u>Lemme</u> 1.- a) <u>L'application</u> φ^* <u>définie ci-dessus est de classe</u> C^2 , <u>convexe</u>. <u>Si</u> φ <u>est une forme quadratique</u> (resp. homogène de degré 2), φ^* <u>est une forme quadratique</u> (resp. homogène de degré 2).

b) <u>La transformation de Legendre est involutive</u>.

c) <u>On a la formule suivante dite de réciprocité de Fenchel</u> :

$$z = \operatorname{grad} \varphi^*(w) \Leftrightarrow w = \operatorname{grad} \varphi(z)$$

<u>et en ce point</u> $\qquad \varphi^*(w) = \langle z,w\rangle - \varphi(z)$

<u>Corollaire</u>.- <u>Soient</u> φ_1 <u>et</u> φ_2 <u>deux applications convexes de classe</u> C^2 <u>de</u> $\mathbb{R}^{2n}$ <u>dans</u> $\mathbb{R}$; <u>posons</u> $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ <u>et</u> $\psi = \varphi_1^* - \varphi_2^*$; <u>les points critiques de</u> φ <u>et</u> ψ <u>se correspondent par la transformation de Legendre.</u>

De façon plus explicite, soit z tel que $\operatorname{grad} \varphi(z) = 0$ et soit $w = \operatorname{grad} \varphi_1(z) = \operatorname{grad} \varphi_2(z)$. Alors $\operatorname{grad} \psi(w) = 0$ et réciproquement.

C'est cette idée que nous utilisons pour introduire une nouvelle fonctionnelle déduite par transformation de Legendre de celle définie dans II.

b) <u>Définition d'une nouvelle fonctionnelle</u>

Nous noterons $w = (y,q)$ un élément du dual de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, identifié à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et soit $G(w)$ la transformée de Legendre de $H(z)$.

Nous considérons le sous-espace E_1 de E défini par :

$$E_1 = \{w(t) = (y(t),q(t)) \;;\; w(t) \in E \text{ et } \int_0^1 w(t)dt = \int_0^1 \dot{w}(t)dt = 0\}$$

Nous munissons E_1 du produit scalaire noté $< , >_{E_1}$ qui induit sur E_1 une norme équivalente à celle définie sur E :

$$< w_1,w_2 >_{E_1} = \int_0^1 < \dot{w}_1(t),\dot{w}_2(t) > dt$$

Nous définissons sur E_1 les deux fonctionnelles J_1 et K :

$$J_1(y,q) = \int_0^1 < y(t),\dot{q}(t) > dt = \int_0^1 <-\dot{y}(t),q(t)> dt = \int_0^1 \frac{1}{2} < w,J\dot{w}> dt$$

$$K(y,q) = \int_0^1 G(-\dot{q}(t),\dot{y}(t))dt = \int_0^1 G(J^{-1}\dot{w}(t))dt$$

On vérifie sans difficulté le lemme suivant :

<u>Lemme</u> 2.- <u>La fonctionnelle</u> J_1 <u>est de classe</u> C^2 <u>sur</u> E_1 <u>et sa différentielle d'ordre</u> 1 <u>est une forme linéaire continue sur</u> E_1 . <u>L'opérateur</u> Φ <u>défini par</u> $\Phi(z) = DJ_1(z)$ <u>est autoadjoint</u>.

La fonctionnelle K est convexe, positivement homogène de degré 2 , de classe C^1 , de dérivée lipschitzienne sur l'ensemble des éléments z de E_1 tels que $z(t) \neq 0$.

<u>Lemme</u> 3.- <u>Soit</u> $w = (y,q)$ <u>un point critique de la fonctionnelle</u> $J_1 + \omega K$ <u>il existe une constante</u> w_0 <u>telle que</u> $w + w_0$ <u>est solution périodique de classe</u> C^2 <u>de période</u> 1 <u>du système</u> $(\mathcal{H}'_\omega)$

$$(\mathcal{H}'_\omega) : \dot{w} = J \operatorname{grad} H(\frac{w + w_0}{\omega})$$

<u>Démonstration</u>

La méthode de démonstration (par intégration par parties) de la proposition 2 montre que si w est un point critique de $J_1 + \omega K$, on a les relations

$$w(t) + w_0 = \omega \operatorname{grad} G(J^{-1}\dot{w}(t))$$

soit
$$\begin{cases} q(t) + q_0 = \omega \partial_2 G(-\dot{q},\dot{y}) \\ y(t) + y_0 = \omega \partial_1 G(-\dot{q},\dot{y}) \end{cases}$$

où $\partial_1 G$ est le gradient de G par rapport aux n premières variables, $\partial_2 G$ le gradient de G par rapport aux n dernières. Le résultat est donné par la formule de réciprocité de Fenchel.

Nous remarquons que le résultat est exprimé en la variable duale w, le passage de la variable z à la variable w se fait par l'opérateur Φ autoadjoint.

Nous modifions un peu la fonctionnelle $J_1 + \omega K$ de manière à la rendre : "plus coërcive à l'infini" sans trop changer l'indice de l'ensemble des points où elle est négative. Posons

$$I(w) = J_1(w) + (a + K(w))K(w)$$

où a est une constante positive qui sera déterminée par la suite.

<u>Lemme</u> 4.- <u>Soit</u> $w(t) = (y(t),q(t))$ <u>un point critique de</u> I . <u>Posons</u> $\omega = (a + 2K(w))$, $\lambda = (K(w))^{-1/2}$. <u>Posons</u> $z(t) = \lambda \text{ grad } G(J^{-1}\dot{w}(\omega t))$. <u>Soit si</u> $z(t) = (x(t),p(t))$

$$\begin{cases} x(t) = \lambda\partial_1 G(-\dot{q}(\omega t),\dot{y}(\omega t)) \\ p(t) = \lambda\partial_2 G(-\dot{q}(\omega t),\dot{y}(\omega t)) \end{cases}$$

<u>Alors la fonction</u> $z(t)$ <u>est solution périodique de période</u> $T = \frac{1}{\omega}$ <u>du système</u> $(\mathcal{H})$ <u>vérifiant la condition</u>

$$H(z(t)) = 1 .$$

<u>Démonstration du lemme</u> 4

$$DI(w) = DJ_1(w) + (a + 2K(w)DK(w) .$$

Donc, si w est un point critique de I , le calcul fait précédemment montre que

$$\dot{w} = J \text{ grad } H(\frac{w + w_o}{\omega}) \quad \text{et} \quad w + w_o = \omega \text{ grad } G(J^{-1}\dot{w}(t)) .$$

Donc, $w(\omega t) + w_o = \omega\lambda^{-1}z(t)$

$\dot{w}(\omega t) = \lambda^{-1}\dot{z}(t)$

$\dot{z}(t) = \lambda J \text{ grad } H(\frac{\omega\lambda^{-1}z(t)}{\omega})$

$\dot{z}(t) = J \text{ grad } H(z(t))$ car grad H est positivement homogène de degré 1 .

Donc z est solution du système $(\mathcal{H})$ et $H(z(t))$ est une constante indépendante de t . Calculons $H(z(t))$; d'après la formule de Fenchel

$$H(z(t)) = \langle \zeta(t),z(t)\rangle - G(\zeta(t))$$

avec $\zeta(t) = \text{grad } H(z(t)) = J^{-1}\dot{z}(t)$

$$H(z(t)) = \lambda^2 \langle J^{-1}\dot{w}(\omega t),\text{grad } G(J^{-1}\dot{w}(\omega t))\rangle - \lambda^2 G(J^{-1}\dot{w}(\omega t))$$

La fonctionnelle G étant positivement homogène de degré 2 d'après l'identité d'Euler : $H(z(t)) = \lambda^2 G(J^{-1}\dot{w}(\omega t))$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T H(z(t))dt = \frac{\lambda^2}{T}\int_0^T G(J^{-1}\dot{w}(\omega t))dt$$

$$= \lambda^2 \int_0^1 G(J^{-1}\dot{w}(s))ds = 1 \quad \text{par définition de } \lambda .$$

<u>Lemme</u> 5.- <u>Soit</u> w <u>un élément de</u> E_1 <u>tel que</u> $I(w) < 0$. <u>Alors si la constante</u> a <u>a été choisie de sorte que</u> $a > \frac{\beta}{2\pi}$, <u>la période minimale de</u> w <u>est</u> 1 .

Démonstration

Raisonnons par l'absurde et supposons que la période minimale de w soit $\frac{1}{m}$ ($m > 1$) ; en considérant le développement en série de Fourier des composantes de w, il vient :

$$4\pi\|y\|_{L^2} \leq \|\dot{y}\|_{L^2} \quad \text{et} \quad 4\pi\|q\|_{L^2} \leq \|\dot{q}\|_{L^2} .$$

Or $I(w) \geq J(w) + aK(w)$

$$J(w) \geq -\|y\|_{L^2}\|\dot{q}\|_{L^2} \geq -\frac{1}{4\pi}\|\dot{y}\|_{L^2}\|\dot{q}\|_{L^2} \geq -\frac{1}{8\pi}(\|\dot{y}\|^2_{L^2} + \|\dot{q}\|^2_{L^2}) .$$

On vérifie facilement que la condition (P_1) implique

$$\beta'|w|^2 \leq G(w) \leq \gamma'|w|^2 \quad \text{avec} \quad \beta' = \frac{1}{4\beta} \quad \text{et} \quad \gamma' = \frac{1}{4\gamma} .$$

Donc $K(w) \geq \beta'\|\dot{w}\|^2_{L^2} \geq \frac{1}{4\beta}(\|\dot{y}\|^2_{L^2} + \|\dot{q}\|^2_{L^2})$

$$I(w) \geq (\frac{a}{4\beta} - \frac{1}{8\pi})(\|\dot{y}\|^2_{L^2} + \|\dot{q}\|^2_{L^2}) \qquad I(w) > 0 \quad \text{si} \quad a > \frac{\beta}{2\pi} .$$

Désormais nous supposerons a choisi tel que $a > \frac{\beta}{2\pi}$. On vérifie directement le lemme suivant :

Lemme 6.- La fonctionnelle I est bornée inférieurement sur E et vérifie la condition (C) de Palais-Smale.

Fin de la démonstration du théorème

Considérons l'ouvert Ω de E_1 défini par $\Omega = \{w \,;\, I(w) < 0\}$. L'ouvert Ω est invariant par l'action de S^1 et la fonctionnelle I définie sur Ω est équivariante.

Supposons la constante a choisie telle que $\beta < 2\pi a < 2\gamma$. Il existe $\rho > 0$ tel que $\rho^2 = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1 - 4\pi a\gamma'}{(4\pi\gamma')^2}$ ($\gamma' = \frac{1}{4\gamma}$) .

Considérons la sphère

$$\Sigma_\rho = \left\{ w = (y,q) \quad \begin{array}{l} y = \xi \cos 2\pi t + \eta \sin 2\pi t \\ q = \eta \cos 2\pi t + \xi \sin 2\pi t \\ \xi^2 + \eta^2 = \rho^2 \end{array} \right\}$$

On vérifie que $\Sigma_\rho \subset \Omega$ et Σ_ρ est invariante sous l'action de S^1 .

Il existe une constante $c < 0$ telle que : $\sup_{w\in\Sigma_\rho} I(w) < c < 0$.

Soit $\Omega_c = \{w \,;\, I(w) < c\}$.

L'ouvert Ω_c contenant la sphère Σ_c , l'indice de Ω_c défini au § II.2 est supérieur ou égal à n . Si l'action de S^1 sur Ω_c était différentiable, il serait possible d'obtenir la conclusion du théorème par application directe de la proposition 5. Malheureusement l'action de S^1 sur Ω_c n'est pas différentiable et il faut montrer directement l'existence des points critiques en refaisant avec des pseudo-gradients au lieu de gradients, la démonstration classique sur l'espace Ω_c .

IV.2. Cas où la période est fixée

Nous résumons ici les principaux résultats obtenus à ce jour en renvoyant aux articles originaux pour les démonstrations qui sont basées sur les principes énoncés au § II. On pourra aussi consulter l'article de D. Clark [8] pour une démonstration beaucoup plus simple dans un cas particulier où le hamiltonien a la forme étudiée par Seifert dans [30].

Tous ces théorèmes sont, en un certain sens, des généralisations très larges du théorème du twist, les hypothèses impliquant que le flot à l'instant T donné a un comportement très différent au voisinage de l'origine et au voisinage de l'infini.

THÉORÈME 4.- (Cas dit superquadratique) D'après Rabinowitz [27], Benci-Rabinowitz [5]. Ekeland [11] a redémontré plus simplement ce résultat dans le cas convexe.

Soit H un hamiltonien de classe C^1 défini sur $\mathbb{R}^{2n}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

(H_1) $H(0) = 0$ et $H(z) = o(|z|^2)$ au voisinage de 0,

(H_2) il existe deux constantes θ ($0 < \theta < \frac{1}{2}$) et $\bar{r}$ telles que : pour tout z vérifiant $|z| > \bar{r}$ on ait

$$0 < H(z) < \theta < z\, ,\ \mathrm{grad}\, H(z) > .$$

Alors pour tout $T > 0$ le système $\mathcal{H}$ admet une solution périodique non constante de période T.

Le cas est dit superquadratique car l'hypothèse (H_2) implique $\frac{dH}{dr} \geq \frac{1}{\theta r} H$, donc $H(z) \geq a_1|z|^{1/\theta} - a_2$.

THÉORÈME 5.- (Cas dit subquadratique) D'après Clarke-Ekeland [10].

Soit H un hamiltonien convexe de classe C^1 vérifiant :

(H_1) $H(0) = 0$ et $H(z) > 0$ si $z \neq 0$.

Il existe des constantes k, K, α, η ($k < K$) telles que :

(H_2) $0 < H(z) \leq k \frac{z^2}{2} + \alpha$ pour tout z, $z \neq 0$ et $H(z) \geq K \frac{z^2}{2}$ si $|z| < \eta$.

Alors pour tout T dans l'intervalle $(\frac{2\pi}{K}, \frac{2\pi}{k})$ il existe une solution périodique de période minimale T du système ($\mathcal{H}$).

La méthode de démonstration est analogue à celle du théorème 2.

THÉORÈME 6 (Amann-Zehnder).- (Cas quadratique à l'infini).

Soit H un hamiltonien de classe C^2 vérifiant :

(H_1) $H(0) = 0$, $\mathrm{grad}\, H(0) = 0$

On suppose que :

(H_2) $\mathrm{grad}\, H(z) = C_0.z + o(|z|)$ au voisinage de 0.

(H_3) $\mathrm{grad}\, H(z) = C_\infty.z + o(|z|)$ au voisinage de l'infini, et C_∞ commute avec J.

(H_4) Il existe deux constantes α et $\beta > 0$ telles que : spectre $C_0 \subset [\alpha, \beta]$.

Alors

a) Si $\beta <$ sup(spectre C_∞) , pour tout τ vérifiant $\beta < \tau <$ sup(spectre C_∞) et $\tau\mathbb{Z} \cap$ (spectre C_∞) $= \emptyset$, il existe une solution périodique de période $T = \frac{2\pi}{\tau}$.

b) Si sup(spectre C_∞) $< \alpha$ pour tout τ vérifiant spectre $C_\infty < \tau < \alpha$, il existe une solution périodique de période $T = \frac{2\pi}{\tau}$.

V. Conclusion

Comme l'avait indiqué Poincaré ([26] tome 1, p. 82) la détermination des orbites périodiques des systèmes hamiltoniens est un premier pas pour l'étude du flot hamiltonien. Il faudrait maintenant déterminer les exposants caractéristiques des orbites périodiques dont nous avons montré l'existence, ce qui permettrait de connaitre le flot dans leur voisinage (en particulier si les orbites sont de type "twist" il existe dans un voisinage de l'orbite étudiée une infinité d'orbites périodiques de "période longue" d'après une généralisation du théorème de Birkhoff [24]).

Pour les systèmes proches des systèmes intégrables, il serait aussi très intéressant de relier ces résultats au théorème des tores invariants de Kolmogoroff, Arnold, Moser [4].

Enfin, la caractérisation géométrique des hypersurfaces Σ_c sur lesquelles un système hamiltonien $(\mathcal{H})$ admet au moins une (resp. n) orbite périodique est un problème largement ouvert. Nous signalons à ce sujet la conjecture de Weinstein [36].

Conjecture.- Soit S une hypersurface de $\mathbb{R}^{2n}$ munie d'une structure de contact et telle que $H^1(S,\mathbb{R}) = 0$; tout champ de contact sur S admet une orbite périodique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. ABRAHAM, J.E. MARSDEN - Foundations of Mechanics, 2nd edition, Benjamin.

[2] H. AMANN, E. ZEHNDER - Non trivial solutions for a class of non resonance problems and applications to non linear differential equations, à paraître.

[3] V.I. ARNOLD - Méthodes mathématiques de la mécanique classique, éditions Mir.

[4] V.I. ARNOLD, A. AVEZ - Problèmes ergodiques de la mécanique classique, éditions Gauthier-Villars.

[5] V. BENCI, P.H. RABINOWITZ - Critical point theorems for indefinite functionals, Inv. Math., Vol 52, fasc. 3(1979), p. 241-274.

[6] M. BERGER - On a family of periodic solutions for Hamiltonian systems, J. Diff. Eq., 10(1971), p. 324-335.

[7] G.D. BIRKHOFF - On the periodic motions of dynamical systems, Acta Math., 50(1927), p. 359-379.

[8] D. CLARK - On periodic solutions of autonomous Hamiltonian systems of ordinary differential equations, Proc. A.M.S., 39(1973), p. 579-584.

[9] F.H. CLARKE - Periodic solutions to Hamiltonian inclusions, à paraître J. Diff. Eq.

[10] F.H. CLARKE, I. EKELAND - Hamiltonian trajectories having prescribed minimal period, Preprint, cahier CEREMADE n° 7822. Note C.R.A.S. t. 287(1978), p. 1013-1015. A paraître Comm. on pure and appl. Math..

[11] I. EKELAND - Periodic solutions of Hamiltonian equations and a theorem of P. Rabinowitz, J. Diff. Eq., Vol. 34, n° 3 déc. 1979, p. 523-534.

[12] I. EKELAND, J.M. LASRY - Nombre de solutions périodiques des équations de Hamilton, Preprint cahier CEREMADE n° 7902, à paraître Annals of Math.

[13] E.R. FADELL, P.H. RABONOWITZ - Generalized cohomological index theories for Lie group actions with an application to bifurcation questions for Hamiltonian systems, Inv. Math., Vol. 45, fasc. 2(1978), p. 139-174.

[14] A.I. FET, L.A. LUSTERNIK - Variational problems on closed manifolds, Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R., 81(1951), p. 17-18.

[15] W.B. GORDON - A theorem on the existence of periodic solutions to Hamiltonian systems with convex potential, J. Diff. Eq., 10(1971), p. 324-335.

[16] Y. HAGIHARA - Celestial Mechanics, Jap. Soc. for promotion of science, Tokyo 1975.

[17] J. HORN - Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen, Z. Math. Phys., 48(1903), p. 400-434.

[18] W. KLINGENBERG - Closed geodesics, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 230, Springer 1978.

[19] J.L. LAGRANGE - Mémoire sur la théorie de la variation des éléments des planètes, Mem. classe Sci. Math. Phys. Inst. France, 1808, Oeuvres complètes, tome VI, p. 713-768.

[20] L. LUSTERNIK, L. SCHNIRELMAN - Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels, Hermann, Paris, 1934.

[21] A. LYAPUNOV - Problème général de la stabilité des mouvements, Ann. Fac. Sci. de Toulouse, 2(1907), p. 203-474.

[22] J. MOSER - A theorem by A. Weinstein and bifurcation theory, Report of the University Louvain la Neuve, Janv. 1976.

[23] J. MOSER - Periodic orbits near an equilibrium and a theorem by Alan Weinstein, Commun. on pure and appl. Math., Vol XXIX, 1976, p. 727-747.

[24] J. MOSER - Proof of a generalized form of a fixed point theorem, Geometry and Topology, Rio de Janeiro, July 1976. Lecture Notes n° 597, Springer, p. 464-494.

[25] R.S. PALAIS - Critical point theory and the minimax principle, Global Analysis, Proc. A.M.S., Vol. XV, p. 185-212.

[26] H. POINCARÉ - Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Gauthier-Villars, 1892.

[27] P.H. RABINOWITZ - Periodic solutions of Hamiltonian systems, Comm. pure and appl. Math., Vol. XXXI, 1978, p. 157-184.

[28] J.T. SCHWARTZ - Non linear functional analysis, Gordon and Breach 1969.

[29] C.L. SIEGEL, J.K. MOSER - Lectures on celestial mechanics, Grundlehren des Math. Wiss., n° 187, Springer 1971.

[30] H. SEIFERT - Periodische Bewegungen mechanischer system, Math. Zeits. 51(1948), p. 197-216.

[31] J. VEY - Orbites périodiques d'un système hamiltonien au voisinage d'un point d'équilibre, Ann. Sci. Nor. Sup., Pisa ser. 4 Vol. 5(1978), p. 757-787.

[32] A. WEINSTEIN - Lagrangian submanifolds and hamiltonian systems, Ann. of Math., 98(1973), p. 377-410.

[33] A. WEINSTEIN - Normal modes for non linear hamiltonian systems, Inv. Math., 20(1973), p. 47-57.

[34] A. WEINSTEIN - Periodic orbits for convex hamiltonian systems, Ann. of Math., 108(1978), p. 507-518.

[35] A. WEINSTEIN - Bifurcations and Hamilton's principle, Math. Zeits., 159(1978), p. 235-248.

[36] A. WEINSTEIN - On the hypotheses of Rabinowitz' periodic orbit theorems, J. Diff. Eq., Vol. 33, n° 3(1979), p. 353-358.

Nicole DESOLNEUX-MOULIS,

I.H.E.S.
35 route de Chartres
91440 BURES sur YVETTE