

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN LANNES

Un faux espace projectif réel de dimension 4

Séminaire N. Bourbaki, 1980, exp. n° 527, p. 36-56

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1978-1979__21__36_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN FAUX ESPACE PROJECTIF RÉEL DE DIMENSION 4

[d'après Sylvain E. CAPPELL et Julius L. SHANESON]

par Jean LANNES

L'objet de cet exposé est de donner une démonstration du théorème suivant dû à S. E. Cappell et J. L. Shaneson [6] :

THÉOREME A.- Il existe une variété différentiable Q de dimension 4, qui a le type d'homotopie de RP^4 et qui n'est pas h-cobordante à RP^4 ; a fortiori Q n'est pas difféomorphe à RP^4 .

La démonstration se veut "élémentaire"; on a donc essayé, dans la mesure du possible, d'être "self-contained".

§ 1. Description du suspect

1.1. Tore d'un homéomorphisme

DÉFINITION.- Soit $\varphi : X \rightarrow X$ un homéomorphisme, on appelle tore de φ et on note $X \times_{\varphi} S^1$ le quotient de $X \times I$ obtenu en identifiant $(x, 0)$ et $(\varphi(x), 1)$; l'espace $X \times_{\varphi} S^1$ est encore le quotient de $X \times \mathbb{R}$ obtenu en identifiant (x, t) et $(\varphi(x), t+1)$. La projection $: X \times I \rightarrow I$ induit une fibration localement triviale $: X \times_{\varphi} S^1 \rightarrow S^1$ de fibre X . Si x_0 est un point fixe de φ , l'application $: I \rightarrow X \times I, t \mapsto (x_0, t)$ induit une section de cette fibration.

Soient X et Y deux espaces, φ un homéomorphisme de X , ψ un homéomorphisme de Y , et f une application de X dans Y telle que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

soit homotopiquement commutatif. Une homotopie $F : X \times I \rightarrow Y$ de f à $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ donne une application que nous noterons encore $F : X \times_{\varphi} S^1 \rightarrow Y \times_{\psi} S^1$. D'autre part puisque le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 H_* X & \xrightarrow{f_*} & H_* Y \\
 \downarrow \varphi_* & & \downarrow \psi_* \\
 H_* X & \xrightarrow{f_*} & H_* Y
 \end{array}$$

est commutatif, f_* induit une application de $\text{Ker}(\varphi_* - \text{id})$ dans $\text{Ker}(\psi_* - \text{id})$ et une application de $\text{Coker}(\varphi_* - \text{id})$ dans $\text{Coker}(\psi_* - \text{id})$.

LEMME.- Si les deux applications induites par f_* :

$$\text{Ker}(\varphi_* - \text{id}) \rightarrow \text{Ker}(\psi_* - \text{id}) \quad , \quad \text{Coker}(\varphi_* - \text{id}) \rightarrow \text{Coker}(\psi_* - \text{id})$$

sont des isomorphismes, il en est de même pour F_* :

$$H_*(X \times_{\varphi} S^1) \rightarrow H_*(Y \times_{\psi} S^1) .$$

En effet $H_*(X \times_{\varphi} S^1)$ se calcule à l'aide de la suite exacte de Wang :

$$\dots \rightarrow H_n X \xrightarrow{\varphi_* - \text{id}} H_n X \rightarrow H_n(X \times_{\varphi} S^1) \rightarrow H_{n-1} X \xrightarrow{\varphi_* - \text{id}} H_{n-1} X \rightarrow \dots$$

1.2. Une équivalence d'homologie

On note α le difféomorphisme du tore $T^3 = \mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3$ induit par une matrice A de $\text{GL}(3, \mathbb{Z})$; l'application linéaire $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (-x, y, z)$, induit un difféomorphisme, noté encore γ , de la sphère S^3 que l'on identifie au compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : T^3 \rightarrow S^3$ une application de degré 1. Puisque le degré de $f \circ \alpha$ est $\det A$ et que celui de $\gamma \circ f$ est -1 , pour que $f \circ \alpha$ et $\gamma \circ f$ soient homotopes il faut et il suffit que $\det A = -1$, il existe dans ce cas une application $F : T^3 \times_{\alpha} S^1 \rightarrow S^3 \times_{\gamma} S^1$ (voir 1.1). D'après le lemme 1.1 cette application est une équivalence d'homologie si $\det(A - I) = \pm 1$ et $\det(A + I) = \pm 1$, autrement dit si $\det(A^2 - I) = \pm 1$. Dans la suite A désigne une matrice qui vérifie les deux conditions $\det A = -1$ et $\det(A^2 - I) = \pm 1$, de telles matrices existent (voir l'appendice 1).

Cependant le groupe fondamental de $T^3 \times_{\alpha} S^1$ est le produit semi-direct $\mathbb{Z}^3 \rtimes_{\mathbb{A}} \mathbb{Z}$ tandis que celui de $S^3 \times_{\gamma} S^1$ est $\mathbb{Z}$.

1.3. Une équivalence d'homotopie

Considérons les plongements suivants de S^1 dans les variétés $\mathbb{R}P^4$, $S^3 \times_{\gamma} S^1$, et $T^3 \times_{\alpha} S^1$:

$$\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^4 \quad , \quad 0 \times S^1 \subset S^3 \times_{\gamma} S^1 \quad , \quad 0 \times S^1 \subset T^3 \times_{\alpha} S^1 .$$

Dans les trois cas le fibré normal du plongement est non orientable et est donc isomorphe à $\mu \oplus \varepsilon^2$, μ désignant le fibré de Möbius sur S^1 . Notons $\mathbb{R}P^4_0$, $(S^3 \times_{\gamma} S^1)_0$, $(T^3 \times_{\alpha} S^1)_0$, les variétés obtenues en supprimant dans $\mathbb{R}P^4$,

$S^3 \times_Y S^1$, $T^3 \times_\alpha S^1$, l'intérieur d'un voisinage tubulaire de S^1 .

La réunion sur le bord de $\mathbb{R}P^4_0$ et de $(S^3 \times_Y S^1)_0$ est encore $\mathbb{R}P^4$, en effet $S^3 \times_Y S^1$ est le double du fibré en disque $D(\mu \oplus \varepsilon^2)$ et $(S^3 \times_Y S^1)_0$ est difféomorphe à $D(\mu \oplus \varepsilon^2)$.

De la même façon soit Q la réunion sur le bord de $\mathbb{R}P^4_0$ et de $(T^3 \times_\alpha S^1)_0$. En utilisant les théorèmes de Mayer-Vietoris et Van Kampen on montre que Q a le type d'homotopie de $\mathbb{R}P^4$. Ce point sera repris et généralisé en 3.4, notons simplement que le fait que $\det(A^2 - I) = \pm 1$ intervient là encore de façon essentielle pour montrer que $\pi_1 Q = \mathbb{Z}/2$. On peut aussi éviter les arguments de 3.4 en remarquant qu'une variété Q connexe compacte sans bord de dim 4 telle que $\pi_1 Q = \mathbb{Z}/2$ et $\chi(Q) = 1$ a le type d'homotopie de $\mathbb{R}P^4$.

Remarque. - Les deux constructions par recollement ci-dessus dépendent a priori du choix d'un isomorphisme du fibré normal de chaque plongement de S^1 avec $\mu \oplus \varepsilon^2$ (ici intervient l'unicité des voisinages tubulaires). Le groupe C des automorphismes à homotopie près de $\mu \oplus \varepsilon^2$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^2$. La situation n'est pas la même pour les deux recollements. Le premier cas est trivial, en effet tous les éléments φ de C se prolongent en des difféomorphismes de $S^3 \times_Y S^1$ et $\mathbb{R}P^4_0 \bigcup_{\varphi} (S^3 \times_Y S^1)_0$ est toujours $\mathbb{R}P^4$. Dans le second cas :

- Les éléments de C qui se prolongent en des difféomorphismes de $\mathbb{R}P^4_0$ forment un sous-groupe C_0 à deux éléments.

- Si $\det(A - I) = +1$ tous les éléments de C se prolongent en des difféomorphismes de $(T^3 \times_\alpha S^1)_0$; si $\det(A - I) = -1$ seuls les éléments de C_0 se prolongent en des difféomorphismes de $(T^3 \times_\alpha S^1)_0$.

§ 2. Moyens d'investigations

Dans ce paragraphe variété signifie variété différentiable compacte avec ou sans bord.

2.1. Structures

Soit X une variété sans bord de dimension n , on appelle structure sur X la donnée d'une variété sans bord M de dimension n et d'une équivalence d'homotopie $f : M \rightarrow X$.

On dit que deux structures sur X , (M_0, f_0) et (M_1, f_1) sont équivalentes s'il existe, un cobordisme N entre M_0 et M_1 , et une équivalence d'homotopie $F : N \rightarrow X \times I$ qui prolonge $f_0 : M_0 \rightarrow X \times 0$ et $f_1 : M_1 \rightarrow X \times 1$; N est donc un h -cobordisme entre M_0 et M_1 . On note $\mathcal{Y}(X)$ l'ensemble des classes

d'équivalence des structures sur X ; cet ensemble possède un point distingué : la classe de la structure (X, id) que nous appellerons la structure triviale sur X .

Remarque.— On peut remplacer dans les définitions ci-dessus équivalence d'homotopie par équivalence d'homotopie simple et h -cobordisme par s -cobordisme. La distinction n'existe plus quand le groupe $Wh(\pi_1 X)$ est nul, c'est le cas pour $X = \mathbb{R}P^4$.

Le groupe $\mathcal{U}(X)$ des classes d'homotopie des auto-équivalences d'homotopie de X opère à gauche sur l'ensemble $\mathcal{Y}(X)$ et le quotient $\mathcal{U}(X) \backslash \mathcal{Y}(X)$ s'identifie à l'ensemble $\mathcal{C}(X)$ des classes de h -cobordisme des variétés ayant le type d'homotopie de X (si $n \neq 3, 4$ et $Wh(\pi_1 X) = 0$, $\mathcal{C}(X)$ est, d'après le théorème du h -cobordisme, l'ensemble des classes de difféomorphisme des variétés ayant le type d'homotopie de X). Comme le groupe $\mathcal{U}(\mathbb{R}P^4)$ est trivial, les deux ensembles $\mathcal{A}(\mathbb{R}P^4)$ et $\mathcal{C}(\mathbb{R}P^4)$ coïncident.

2.2. Données de chirurgie

2.2.1. On considère un diagramme du type suivant :

$$\begin{array}{ccc} \nu_M & \xrightarrow{b} & \xi \\ | & & | \\ M & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

dans lequel :

- X et M sont deux variétés à bord de même dimension n .
- ξ un fibré vectoriel stable sur X .
- ν_M le fibré normal de M .
- f une application continue de la paire $(M, \partial M)$ dans la paire $(X, \partial X)$.
- b un morphisme de fibrés vectoriels stables.

Nous supposons par la suite que ξ , ν_M et b sont représentés respectivement par deux fibrés vectoriels de même dimension p et un morphisme de fibrés vectoriels que nous notons encore ξ , ν_M et b .

Soit enfin :

- $\mathcal{I}_X$ (resp. $\mathcal{I}_M$) le système local d'orientation de X (resp. M).
- $\tilde{X}$ (resp. $\tilde{M}$) le revêtement d'orientation de X (resp. M).
- $F : (D(\nu_M), \partial D(\nu_M)) \longrightarrow (D(\xi), \partial D(\xi))$ l'application induite par b entre les fibrés en disques de ν_M et ξ .

Notons que chacun des groupes, $H_n(X, \partial X; \mathcal{I}_X)$, $H_n(\tilde{X}, \partial \tilde{X}; \mathbb{Z})$, $H_{n+p}(D(\nu_M), \partial D(\nu_M); \mathbb{Z})$ possède une "classe d'orientation" canonique.

PROPOSITION.- Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un isomorphisme $\varphi : \mathcal{L}_M \simeq f^* \mathcal{L}_X$ tel que la composée :

$$H_n(M, \partial M; \mathcal{L}_M) \xrightarrow{\varphi} H_n(M, \partial M; f^* \mathcal{L}_X) \longrightarrow H_n(X, \partial X; \mathcal{L}_X)$$

envoie la classe d'orientation de M sur celle de X .

(ii) Il existe un relèvement $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{X}$ de f qui envoie la classe d'orientation de $\tilde{M}$ sur celle de $\tilde{X}$.

(iii) L'image par $F_* : H_{n+p}(D(\nu_M), \partial D(\nu_M); \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n+p}(D(\xi), \partial D(\xi); \mathbb{Z})$ de la classe d'orientation de $D(\nu_M)$ est une classe d'orientation de $D(\xi)$.

La démonstration de cette proposition est laissée au lecteur.

DÉFINITION.- Si l'une des trois conditions ci-dessus est réalisée le quadruple (M, f, ξ, b) s'appelle une donnée de chirurgie sur X .

2.2.2. DÉFINITION.- Soit X une variété sans bord, on dit que deux données de chirurgie Γ_0 et Γ_1 sont cobordantes s'il existe une donnée de chirurgie sur $X \times I$ qui induit Γ_0 sur $X \times 0$ et Γ_1 sur $X \times 1$. On note $\mathcal{A}(X)$ l'ensemble des classes de cobordisme des données de chirurgie sur X ; cet ensemble possède un point distingué : la classe du quadruple (X, id, ν_X, id) que nous appelons la donnée de chirurgie triviale sur X .

Remarque.- Soient (M, f, ξ, b) une donnée de chirurgie sur X , η un fibré stable sur X et $a : \xi \rightarrow \eta$ un isomorphisme, alors les deux données (M, f, ξ, b) et $(M, f, \eta, a \circ b)$ sont cobordantes.

2.2.3. Supposons à nouveau que X est une variété à bord, nous dirons qu'une donnée de chirurgie (M, f, ξ, b) sur X est une donnée sur $(X, \partial X)$ si la donnée induite sur ∂X est la donnée triviale (on a donc en particulier $\partial M = \partial X$ et $\xi|_{\partial X} = \nu_{\partial X}$). On note $\mathcal{A}(X, \partial X)$ l'ensemble des classes de cobordisme de données de chirurgies sur $(X, \partial X)$ (nous laissons au lecteur le soin d'étendre la définition de cobordisme de données au cas relatif [3], [12], [18]).

2.2.4. Données de chirurgies spéciales. On dira qu'une donnée (M, f, ξ, b) est spéciale si $\xi = \nu_X$; on note $\mathcal{B}(X)$ l'ensemble des classes de cobordisme spécial de données spéciales sur X (X sans bord). On définit de même $\mathcal{B}(X, \partial X)$ dans le cas à bord. Nous insistons sur le fait que les applications naturelles :

$\mathcal{B}(X) \rightarrow \mathcal{A}(X)$ et $\mathcal{B}(X, \partial X) \rightarrow \mathcal{A}(X, \partial X)$ ne sont pas en général injectives.

2.3. L'application des structures dans les données de chirurgie

Soient $f : M \rightarrow X$ une équivalence d'homotopie et $g : X \rightarrow M$ une inverse de f à homotopie près ; il existe une application $b : \mathcal{V}_M \rightarrow g^* \mathcal{V}_M$ au-dessus de f . En associant à la classe de (M, f) dans $\mathcal{J}(X)$ la classe de $(M, f, g^* \mathcal{V}_M, b)$ dans $\mathcal{A}(X)$ on définit une application pointée $\chi : \mathcal{J}(X) \rightarrow \mathcal{A}(X)$.

Remarque. - Soit (M, f) une structure sur X , alors $\chi(M, f)$ est la classe dans $\mathcal{A}(X)$ de toute donnée du type (M, f, ξ, b) (voir la remarque du 2.2.2).

2.4. G/O-fibrés

2.4.1. On appelle G/O-fibré sur un espace X la donnée d'un fibré stable η sur X et d'une trivialisatation homotopique c de ce fibré ; deux G/O-fibrés, (η_0, c_0) et (η_1, c_1) , sont équivalents s'il existe un G/O-fibré sur $X \times I$ qui induit respectivement (η_0, c_0) et (η_1, c_1) sur $X \times 0$ et $X \times 1$.

Désignons par G_q l'espace des auto-équivalences d'homotopie de S^{q-1} , par BG_q son classifiant [16], par G et BG les limites ("mapping telescopes") $\lim_{q \rightarrow \infty} G_q$ et $\lim_{q \rightarrow \infty} BG_q$; l'espace G/O est la fibre homotopique de l'application naturelle : $BO \rightarrow BG$ et si X est un CW-complexe fini l'ensemble des classes d'équivalence de G/O-fibrés est en bijection avec l'ensemble $[X, G/O]$ des classes d'homotopie d'applications de X dans G/O (il s'agit d'applications non pointées, G/O est naturellement pointé mais pas X). La classe de l'application constante de X dans G/O correspond au G/O-fibré trivial sur X , c'est-à-dire à la donnée du fibré trivial sur X et de la trivialisatation homotopique canonique de ce fibré.

2.4.2. G/O-fibrés relatifs. On appelle G/O-fibré sur une paire (X, Y) un G/O-fibré sur X dont la restriction à Y est triviale ; si (X, Y) est une paire de CW-complexes finis l'ensemble des classes d'équivalences de G/O-fibrés sur (X, Y) est en bijection avec l'ensemble $[X/Y, G/O]$ des classes d'applications pointées de X/Y dans G/O.

2.4.3. G/O-fibrés spéciaux. On dira qu'un G/O-fibré est spécial si η est le fibré trivial, un G/O-fibré spécial sur X n'est donc pas autre chose qu'une trivialisatation homotopique du fibré trivial sur X ; si X est un CW-complexe fini, l'ensemble des classes d'équivalence "spéciale" de G/O-fibrés spéciaux est en bijection avec $[X, G]$ de même si (X, Y) est une paire de CW finis l'ensemble des classes d'équivalence "spéciale" de G/O-fibrés spéciaux sur (X, Y) est en bijection avec $[X/Y, G]$.

2.5. Correspondance entre G/O -fibrés et données de chirurgie

Soit (η, c) un G/O -fibré sur une variété X^n ; supposons que η est représenté par un fibré vectoriel de dimension q , que nous notons encore η et que c est représenté par un morphisme de fibrations sphériques que nous notons encore $c : \eta \rightarrow \varepsilon^q$, ε^q désignant le fibré trivial de dimension q sur le point. Soit $Tc : T\eta \rightarrow S^q$ l'application induite par c entre les espaces de Thom de η et ε^q . Ici S^q apparaît comme le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}^q$, le point base étant le point à l'infini, en transversalisant Tc sur 0 on obtient une sous-variété (compacte) M^n de l'espace total $E(\eta)$ du fibré η dont le fibré normal dans $E(\eta)$ est trivialisé. Soit $f : M \rightarrow X$ la restriction à M de la projection de $E(\eta)$ vers X . La trivialisisation du fibré normal de M dans $E(\eta)$ fournit une application b de ν_M dans $\nu_X - \eta$ au-dessus de f . Comme la condition (iii) de la proposition 2.2.1. est réalisée, le quadruple $(M, f, \nu_X - \eta, b)$ est une donnée de chirurgie sur X .

En associant à la classe du G/O -fibré (η, c) la classe de la donnée de chirurgie $(M, f, \nu_X - \eta, b)$ on définit une application $\theta : [X, G/O] \rightarrow \mathcal{A}(X)$, on montre [3] [17] [18] que θ est une bijection. De la même façon on obtient trois autres bijections notées encore $\theta : [X/\partial X, G/O] \rightarrow \mathcal{A}(X, \partial X)$, $[X, G] \rightarrow \mathcal{B}(X)$, $[X/\partial X, G] \rightarrow \mathcal{B}(X, \partial X)$. Les deux diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} [X, G] & \longrightarrow & [X, G/O] \\ \downarrow \theta & & \downarrow \theta \\ \mathcal{B}(X) & \longrightarrow & \mathcal{A}(X) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} [X/\partial X, G] & \longrightarrow & [X/\partial X, G/O] \\ \downarrow \theta & & \downarrow \theta \\ \mathcal{B}(X, \partial X) & \longrightarrow & \mathcal{A}(X, \partial X) . \end{array}$$

2.6. Restriction d'une donnée de chirurgie à une sous-variété

Soient (M, f, ξ, b) une donnée de chirurgie sur une variété sans bord X , X' une sous-variété (sans bord) de X , et $i : X' \rightarrow X$ l'inclusion de X' dans X . On suppose en outre que f est transverse à X' , soit alors $M' = f^{-1}(X')$, $j : M' \rightarrow M$ l'inclusion de M' dans M , $f' : M' \rightarrow X'$ l'application induite par f . Comme l'on a des isomorphismes $\nu_{M'} \simeq \nu_j \oplus \nu_{M|M'}$ et $\nu_j \simeq f'^* \nu_i$, l'application b induit une application $b' : \nu_{M'} \rightarrow \nu_i \oplus \xi|_{X'}$. Le quadruple $(M', f', \nu_i \oplus \xi|_{X'}, b')$ est une donnée de chirurgie sur X' .

On vérifie que le théorème de transversalité de Thom et le procédé décrit ci-dessus permettent de définir une application $\mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}(X')$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} [X, G/O] & \xrightarrow{i^*} & [X', G/O] \\ \downarrow \theta & & \downarrow \theta \\ \mathcal{A}(X) & \longrightarrow & \mathcal{A}(X') . \end{array}$$

Ce qui précède s'étend, mutatis mutandis, aux données de chirurgies, relatives, spéciales, spéciales relatives.

§ 3. Les preuves

Puisque toute équivalence d'homotopie de $\mathbb{R}P^4$ est homotope à l'identité le théorème A est un cas particulier du théorème suivant :

THÉOREME B.— Soit X une variété différentiable compacte sans bord. On suppose que le groupe $\pi_1 X$ possède un élément d'ordre 2 qui renverse l'orientation. Alors il existe une variété Q , différentiable compacte sans bord, et une équivalence d'homotopie $f : Q \rightarrow X$ telle que l'image dans $\mathcal{A}(X)$ de la structure (Q, f) est non triviale.

Représentons un élément d'ordre 2 du $\pi_1 X$ renversant l'orientation par un plongement $\sigma : S^1 \rightarrow X$. Le fibré normal de σ est non orientable. Posons $\Delta = D^3 \times_{\gamma} S^1$ (γ désigne l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$: $(x, y, z) \mapsto (-x, y, z)$). Choisissons un plongement $\varphi : \Delta \rightarrow X$ tel que $\varphi(\Delta)$ soit un voisinage tubulaire de $\sigma(S^1)$, nous identifions par la suite l'image de φ avec Δ .

Posons $X_0 = X - \Delta$, le bord de X_0 est celui de Δ c'est-à-dire $\Sigma = S^2 \times_{\gamma} S^1$. Une donnée de chirurgie sur (Δ, Σ) et la donnée de chirurgie triviale $(X_0, \text{id}, \nu_{X_0}, \text{id})$ sur (X_0, Σ) se recollent en une donnée de chirurgie sur X . Ce procédé fournit une application : $\mathcal{A}(\Delta, \Sigma) \rightarrow \mathcal{A}(X)$.

Nous sommes maintenant en mesure de décrire la méthode de démonstration du théorème B. On considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \mathcal{S}(X) \\
 & & & & \downarrow X \\
 \mathcal{B}(\Delta, \Sigma) & \longrightarrow & \mathcal{A}(\Delta, \Sigma) & \longrightarrow & \mathcal{A}(X) \\
 \downarrow \text{restriction} & & & \nearrow & \\
 \mathcal{B}(D^3, S^2) & \longleftarrow & & &
 \end{array}$$

On montre tout d'abord qu'il existe une application pointée : $\mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{B}(D^3, S^2)$ qui complète le diagramme ci-dessus en un diagramme commutatif. On exhibe ensuite une donnée de chirurgie spéciale sur (Δ, Σ) dont l'image dans $\mathcal{B}(D^3, S^2)$ est non triviale et dont l'image dans $\mathcal{A}(X)$ provient d'une structure sur X .

3.1. Interprétation homotopique de $\mathcal{B}(\Delta, \Sigma)$ et $\mathcal{A}(\Delta, \Sigma)$

Le quotient Δ/Σ est l'espace de Thom $T(\mu \oplus \epsilon^2)$ du fibré vectoriel $\mu \oplus \epsilon^2$ de base S^1 ; on a donc $\Delta/\Sigma = T\mu \wedge S^2 = \mathbb{R}P^2 \wedge S^2$. Le diagramme :

$$S^1 \xrightarrow{q} S^1 \xrightarrow{i} \mathbb{R}P^2,$$

où q est une application pointée de degré 2 et où i est l'inclusion dans $T\mu$ de l'espace de Thom de la restriction de μ au point base, est une cofibration.

Soit K un espace pointé, pour $n \geq 4$ l'ensemble $[\mathbb{R}P^2 \wedge S^{n-2}, K]$ est un groupe abélien et la suite de Puppe de la cofibration ci-dessus donne une suite exacte de groupes abéliens :

$$\pi_n K \xrightarrow{\times 2} \pi_n K \longrightarrow [\mathbb{R}P^2 \wedge S^{n-2}, K] \longrightarrow \pi_{n-1} K \xrightarrow{\times 2} \pi_{n-1} K.$$

Il est donc naturel de poser $\pi_n(K; \mathbb{Z}/2) = [\mathbb{R}P^2 \wedge S^{n-2}, K]$. Comme

$H_n(\mathbb{R}P^2 \wedge S^{n-2}; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$, on définit un homomorphisme d'Hurewicz :

$\pi_n(K; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_n(K; \mathbb{Z}/2)$ qui est compatible en un sens évident avec l'homomorphisme d'Hurewicz ordinaire.

Le diagramme considéré en 2.5 :

$$\begin{array}{ccc} [\Delta/\Sigma, G] & \longrightarrow & [\Delta/\Sigma, G/O] \\ \downarrow \wr \theta & & \downarrow \wr \theta \\ \mathcal{B}(\Delta, \Sigma) & \longrightarrow & \mathcal{A}(\Delta, \Sigma) \end{array}$$

où les flèches notées θ sont des bijections peut s'écrire :

$$\begin{array}{ccc} \pi_4(G; \mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & \pi_4(G/O; \mathbb{Z}/2) \\ \downarrow \wr \theta & & \downarrow \wr \theta \\ \mathcal{B}(\Delta, \Sigma) & \longrightarrow & \mathcal{A}(\Delta, \Sigma) \end{array}.$$

La restriction : $\mathcal{B}(\Delta, \Sigma) \rightarrow \mathcal{B}(D^3, S^2)$ s'interprète alors comme le "bockstein"

$\beta : \pi_4(G; \mathbb{Z}/2) \rightarrow \pi_3 G$. L'image de β est le sous-groupe ${}_2(\pi_3 G)$ formé des éléments de $\pi_3 G$ annulés par 2.

3.2. Une classe caractéristique de G/O -fibré

LEMME.- Il existe un homomorphisme $\lambda : \pi_4(G/O; \mathbb{Z}/2) \rightarrow {}_2(\pi_3 G)$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_4(G; \mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & \pi_4(G/O; \mathbb{Z}/2) \\ \downarrow \beta & \swarrow \lambda & \\ {}_2(\pi_3 G) & & \end{array}.$$

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi_4(O; \mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & \pi_4(G; \mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & \pi_4(G/O; \mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & \pi_4(BO; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \pi_4(BG; \mathbb{Z}/2) \\
 \downarrow \beta & & \downarrow \beta & & & & \downarrow w_4 \qquad \qquad \downarrow w_4 \\
 {}_2(\pi_3 O) & \longrightarrow & {}_2(\pi_3 G) & & & & \mathbb{Z}/2 \quad \quad \quad \mathbb{Z}/2
 \end{array}$$

où la première ligne est exacte. Le lemme est une conséquence des deux faits suivants :

- $\pi_3 O \simeq \mathbb{Z}$
- l'homomorphisme défini par $w_4 : \pi_4(BO; \mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}/2$ est un isomorphisme ou, ce qui revient au même, l'homomorphisme défini par $w_4 : \pi_4 BO \rightarrow \mathbb{Z}/2$ est non trivial.

[Mentionnons entre crochets certains points d'érudition qui sont inutiles pour démontrer le résultat de Cappell et Shaneson mais qui éclairent la situation. En fait les trois flèches du lemme sont des isomorphismes, ceci utilise $\pi_4 O = 0$ et $\pi_4 G = 0$; le groupe ${}_2(\pi_3 G) = \mathbb{Z}/2$, l'argument essentiel est $\pi_3 G/O = 0$ (voir l'appendice 3).]

PROPOSITION.- Il existe une classe w dans $H^4(G/O; {}_2(\pi_3 G))$ qui induit l'homomorphisme $\lambda : \pi_4(G/O; \mathbb{Z}/2) \rightarrow {}_2(\pi_3 G)$.

La démonstration de cette proposition est donnée dans l'appendice 2.

Soit $P : X \rightarrow \Delta/\Sigma$ la construction de Thom-Pontryagin, l'application : $\mathcal{A}_6(\Delta, \Sigma) \rightarrow \mathcal{A}_6(X)$ s'identifie à $P^* : [\Delta/\Sigma, G/O] \rightarrow [X, G/O]$. En associant à une application $a : X \rightarrow G/O$ l'élément $\langle a^* w, [X] \rangle$ de ${}_2(\pi_3 G)$ on obtient une application pointée : $[X, G/O] \rightarrow {}_2(\pi_3 G)$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 [\Delta/\Sigma, G/O] & \longrightarrow & [X, G/O] \\
 \downarrow \lambda & \swarrow & \\
 {}_2(\pi_3 G) & &
 \end{array}$$

Cette application peut être considérée comme une application pointée :

$\mathcal{A}_6(X) \rightarrow \mathcal{B}_3(D^3, S^2)$. La première partie de notre programme de démonstration du théorème B est achevée.

3.3. Une donnée de chirurgie sur (Δ, Σ)

L'objet de 3.3 est de décrire une donnée de chirurgie spéciale sur (Δ, Σ) dont la classe de la restriction à (D^3, S^2) correspond par la bijection naturelle

$\mathcal{B}_3(D^3, S^2) \simeq \Omega_3^{fr}$ à la classe du tore T^3 muni de sa parallélisation de groupe de Lie (Ω_3^{fr} désigne le groupe de cobordisme des variétés différentiables compactes sans bord de dimension 3 stablement parallélisées). Il est capital dans notre démon-

tration du théorème B de savoir que cette classe de Ω_3^{fr} est non triviale, ce résultat est intimement relié au fameux théorème de Rohlin [15] (voir l'appendice 3).

3.3.1. Soient $2D^3 \subset \mathbb{R}^3$ la boule de rayon 2 centrée en 0 et $\psi : 2D^3 \rightarrow T^3$ un plongement tel que $\psi(0) = 0$; nous identifions par la suite l'image de ψ avec $2D^3$.

Le difféomorphisme α de T^3 introduit au § 1 est isotope, par une isotopie fixant 0 à un difféomorphisme α' dont la restriction à $2D^3$ coïncide avec celle de γ .

Posons $T_O^3 = T^3 - D^3$, le bord de T_O^3 est S^2 et $2D^3 - D^3$ est un voisinage collier de ce bord. En écrasant en un point dans T_O^3 le complémentaire de $2D^3 - D^3$ nous obtenons une application de T_O^3 dans le cône de S^2 . Ce cône s'identifie à D^3 , nous avons donc construit une application

$g : (T_O^3, S^2) \rightarrow (D^3, S^2)$ qui prolonge l'identité de S^2 et qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} (T_O^3, S^2) & \xrightarrow{g} & (D^3, S^2) \\ \downarrow \alpha' & & \downarrow \gamma \\ (T_O^3, S^2) & \xrightarrow{g} & (D^3, S^2) \end{array}$$

Posons $M = T_O^3 \times_{\alpha'} S^1$, M est une variété dont le bord est Σ et l'application $g \times \text{id} : T_O^3 \times I \rightarrow D^3 \times I$ induit une application $h : (M, \Sigma) \rightarrow (\Delta, \Sigma)$ qui prolonge l'identité de Σ . D'après le lemme 1.1 h est une équivalence d'homologie.

3.3.2. Nous nous proposons maintenant de construire un morphisme de fibrés $e : \nu_M \rightarrow \nu_\Delta$ au-dessus de h qui prolonge l'identité de ν_Σ .

Précisons tout d'abord un point de terminologie. Soient X, Y deux espaces, ξ (resp. η) un fibré sur X (resp. Y), f une application de X dans Y , et b_0, b_1 deux morphismes de ξ dans η au-dessus de f , nous dirons que b_0 et b_1 sont homotopes s'il existe un morphisme B du fibré $\xi \times I$ dans le fibré η , au-dessus de la composition : $X \times I \rightarrow X \xrightarrow{f} Y$, qui induit b_0 et b_1 sur $X \times 0$ et $X \times 1$.

Soit $\mathfrak{F} : \tau_{T^3} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parallélisation de groupe de Lie de T^3 . Comme le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \tau_{T^3} & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \mathbb{R}^3 \\ \downarrow d\alpha & & \downarrow A \\ \tau_{T^3} & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

est commutatif, alors le diagramme :

$$(D) \quad \begin{array}{ccc} \tau_{T^3} & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \mathbb{R}^3 \\ \downarrow d\alpha & & \downarrow \gamma \\ \tau_{T^3} & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

est homotopiquement commutatif.

D'autre part, la parallélisation $\mathfrak{F}$ est homotope à une parallélisation $\mathfrak{F}_0$ qui est standard sur $D^3 \subset T^3$, soit $c : \tau_{T^3} \rightarrow \tau_{D^3}$ l'unique morphisme de fibrés au-dessus de g qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tau_{T^3} & \xrightarrow{c} & \tau_{D^3} \\ \downarrow & \mathfrak{F}_0 & \downarrow \\ \tau_{T^3} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

où la flèche de droite désigne la parallélisation standard de D^3 . Considérons enfin le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \tau_{T^3} & \xrightarrow{c} & \tau_{D^3} \\ \downarrow d\alpha' & & \downarrow d\gamma \\ \tau_{T^3} & \xrightarrow{c} & \tau_{D^3} \end{array} .$$

La commutativité du diagramme (D) montre que les morphismes $d\gamma \circ c$ et $c \circ d\alpha'$, qui prolongent tous les deux l'identité de $\tau_{S^2} \oplus \varepsilon$, sont homotopes relativement à $\tau_{S^2} \oplus \varepsilon$; ceci fournit un morphisme $e : \nu_M \rightarrow \nu_\Delta$ ayant les propriétés demandées.

Le quadruple $\Gamma = (M, h, \nu_\Delta, e)$ est une donnée de chirurgie spéciale sur (Δ, Σ) ; la restriction de Γ à (D^3, S^2) est par construction la donnée

$\Gamma' = (T^3, g, \nu_{T^3}, -c)$. La classe de Γ' dans $\mathcal{B}(D^3, S^2)$ correspond par la bijection naturelle $\mathcal{B}(D^3, S^2) \simeq \Omega_3^{\text{fr}}$ (dont le lecteur retrouvera aisément la définition) à la classe de $(T^3, \mathfrak{F}_0)$ et donc à celle de $(T^3, \mathfrak{F})$.

3.4. Une équivalence d'homotopie (bis)

Notons $\mathcal{Q}$ la variété $M \bigcup_{\Sigma} X_0$ et $f : \mathcal{Q} \rightarrow X$ l'application obtenue en recol-

lant h et l'identité de X_0 . D'après le théorème de Mayer-Vietoris f est une équivalence d'homologie, il nous reste à montrer que f est une équivalence d'homotopie.

Montrons tout d'abord, en utilisant le théorème de Van Kampen, que $f_* : \pi_1 Q \rightarrow \pi_1 X$ est un isomorphisme. L'homomorphisme $\pi_1 X_0 \rightarrow \pi_1 X$ est un isomorphisme (position générale) ; il en est de même pour l'homomorphisme $\pi_1 M \rightarrow \pi_1 (T^3 \times_{\alpha} S^1)$, on a donc $\pi_1 M = \mathbb{Z} \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$. D'autre part, puisque $\det(A^2 - I) = \pm 1$, le noyau de la composition : $\mathbb{Z}^3 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2$ est engendré comme sous-groupe distingué par t^2 , t désignant l'image de 1 par l'homomorphisme canonique : $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^3 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$. Ces faits permettent de conclure.

Soient ensuite, $\tilde{X}$ le revêtement d'orientation de X , $\tilde{Q}$ (resp. $\tilde{X}_0, \tilde{\Delta}, \tilde{\Sigma}, \tilde{M}$) le revêtement induit de Q (resp. X_0, Δ, Σ, M), et $\tilde{h}$ le relèvement de h qui prolonge l'identité de $\tilde{\Sigma}$; $\tilde{\Delta} = D^3 \times S^1$, $\tilde{\Sigma} = S^2 \times S^1$, $\tilde{Q} = \tilde{X}_0 \bigcup_{\tilde{\Sigma}} \tilde{M}$, $\tilde{M} = T^3_{\alpha, 2} \times S^1$; d'après le lemme 1.1 $\tilde{h}$ est une équivalence d'homologie. De plus les homomorphismes $\pi_1 \tilde{\Delta} \rightarrow \pi_1 \tilde{X}$ et $\pi_1 \tilde{M} \rightarrow \pi_1 \tilde{Q}$ sont triviaux.

Soient enfin $\hat{X}$ le revêtement universel de X et $\hat{Q}$ (resp. $\hat{X}_0, \hat{\Delta}, \hat{\Sigma}, \hat{M}$) le revêtement induit de Q (resp. X_0, Δ, Σ, M) ; $\hat{Q}$ est universel, $\hat{\Delta} = (D^3 \times S^1) \times \pi_1 \tilde{X}$, $\hat{\Sigma} = (S^2 \times S^1) \times \pi_1 \tilde{X}$, $\hat{M} = \tilde{M} \times \pi_1 \tilde{X}$, $\hat{X} = \hat{\Delta} \bigcup_{\hat{\Sigma}} \hat{X}_0$, $\hat{Q} = \hat{M} \bigcup_{\hat{\Sigma}} \hat{X}_0$. On obtient un relèvement $\hat{f}$ de f en recollant

$\tilde{h} \times \text{id} : \tilde{M} \times \pi_1 \tilde{X} \rightarrow \tilde{\Delta} \times \pi_1 \tilde{X}$, et l'identité de $\hat{X}_0$. D'après Mayer-Vietoris, $\hat{f}$ est une équivalence d'homologie. Il en résulte que f est une équivalence d'homotopie.

La remarque de 2.3 termine la démonstration du théorème B.

§ 4. Complément d'enquête

Puisque G/O et G/PL ont même 6-squelette [7] [11], on peut remplacer dans le théorème A "différentiable" par "pseudo-linéaire". Par contre comme l'homomorphisme $\pi_4(G/O; \mathbb{Z}/2) \rightarrow \pi_4(G/TOP; \mathbb{Z}/2)$ est nul [10] on peut montrer en utilisant la chirurgie topologique que les variétés Q sont topologiquement h -cobordantes à $\mathbb{R}P^4$ [5]. On ignore cependant si ces variétés sont homéomorphes à $\mathbb{R}P^4$.

La nullité de $L_5(\mathbb{Z}/2, -)$ et le théorème A impliquent qu'il existe exactement deux classes de h -cobordisme de variétés différentiables ayant le type d'homotopie de $\mathbb{R}P^4$. Il n'est pas évident a priori que les différents exemples de Cappell et Shaneson (voir l'appendice 1), qui sont deux à deux h -cobordants, sont deux à deux difféomorphes.

Il résulte de travaux antérieurs de Cappell et Shaneson [5] que la somme connexe de Q et de r exemplaires de $S^2 \times S^2$ n'est pas différentiablement h -cobordante à la somme connexe de $\mathbb{R}P^4$ et de r exemplaires de $S^2 \times S^2$.

S. Akbulut et R. Kirby [2] ont montré que, dans le cas où $\det(A - I) = -1$, le revêtement universel de Q est difféomorphe à S^4 (comme me l'a fait remarquer A. Marin l'ambiguïté évoquée à la fin du § 1 disparaît en passant au revêtement). Leur démonstration utilise une description très précise des anses de dimension 1 et 2 du revêtement de Q , un résultat de F. Laudenbach et V. Poénaru [13], un grand tableau noir et pas mal de craies de couleur. Autant que je sache, le problème analogue avec $\det(A - I) = 1$ est encore ouvert. Le résultat d'Akbulut et Kirby et le théorème A entraînent :

THÉORÈME C. - Il existe une involution différentiable sans point fixe de la sphère S^4 qui n'est pas différentiablement conjuguée à l'involution antipodale.

APPENDICE 1

On détermine dans cet appendice toutes les matrices A de $GL(3, \mathbb{Z})$ telles que $\det A = -1$ et $\det(A^2 - I) = \pm 1$.

Quitte à changer A en A^{-1} on peut supposer $\det(A + I) = -1$; on pose $\det(A - I) = \varepsilon$ ($\varepsilon = \pm 1$), on a alors $\det(XI - A) = P_\varepsilon(X)$ avec :

$P_{-1}(X) = X^3 - X + 1$, $P_1(X) = X^3 - X^2 - 2X + 1$. Soit M_ε la matrice, dans la base $\{1, X, X^2\}$, de la multiplication par X dans l'anneau $\mathbb{Z}[X]/P_\varepsilon(X)$:

$$M_{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

PROPOSITION. - Soit A une matrice de $GL(3, \mathbb{Z})$ telle que $\det A = -1$, $\det(A - I) = \varepsilon$ ($\varepsilon = \pm 1$) et $\det(A + I) = \pm 1$, alors il existe une matrice P de $SL(3, \mathbb{Z})$ telle que :

$$A = PM_\varepsilon P^{-1} \text{ si } \det(A + I) = -1 \text{ et } A = PM_\varepsilon^{-1} P^{-1} \text{ si } \det(A + I) = 1.$$

Démonstration. L'anneau $\mathbb{Z}[X]/P_\varepsilon(X)$ est l'anneau des entiers du corps cubique $\mathbb{Q}[X]/P_\varepsilon(X)$ de discriminant -23 si $\varepsilon = -1$ et 49 si $\varepsilon = 1$ (il s'agit alors de l'intersection du corps des racines 7-ième de l'unité avec $\mathbb{R}$). Il suffit des majorations de Minkowski pour montrer que ces deux anneaux sont principaux ; ceci démontre la proposition (le raffinement $\det P = +1$ est trivial).

Conclusion. Comme on vérifie facilement que les faux $\mathbb{R}P^4$ construits à l'aide de α' (notation de 3.3.1) et de α'^{-1} sont difféomorphes, la proposition ci-dessus et la remarque finale du § 1 montre qu'il existe au plus, à difféomorphisme près, trois faux $\mathbb{R}P^4$ à la Cappell-Shaneson.

APPENDICE 2

On démontre dans cet appendice la proposition 3.2.

On vérifie en utilisant la suite exacte d'homotopie de la fibration $0 \rightarrow G \rightarrow G/O$ que l'espace G/O est simplement connexe. D'autre part $\pi_2 G/O \ (\simeq \pi_2 G = \Omega_2^{\text{fr}})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$ par l'invariant de Kervaire. Enfin, $\pi_3 G/O = 0$ (voir Appendice 3). On vérifie également que la composition : $\pi_4 G/O \rightarrow \pi_4(G/O; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\lambda} {}_2(\pi_3 G)$ est nulle sur la torsion de $\pi_4 G/O$, en effet celle-ci est l'image de $\pi_4 G$. [En fait $\pi_4 G = 0$ et $\pi_4 G/O$ est sans torsion.] La proposition 3.2 est un cas particulier de la proposition suivante :

PROPOSITION.- Soit E un H -espace tel que $\pi_0 E = 0$, $\pi_1 E = 0$, $\pi_2 E = \mathbb{Z}/2$, $\pi_3 E = 0$. Soient A un groupe abélien tel que $2A = 0$ et $\varphi : \pi_4 E \rightarrow A$ un homomorphisme nul sur la torsion de $\pi_4 E$. Alors il existe une classe dans $H^4(E; A)$ qui induit φ .

Démonstration. Soient $p : E \rightarrow K(\mathbb{Z}/2, 2)$ représentant la classe canonique de E et F la fibre de p . Soit C un groupe abélien, la suite spectrale de Serre donne une suite exacte : $H^4(E; C) \rightarrow H^4(F; C) \xrightarrow{\tau} H^5(\mathbb{Z}/2, 2; C)$. Cette suite peut s'écrire :

$$(S) \quad H^4(E; C) \rightarrow \text{Hom}(\pi_4 E, C) \xrightarrow{\tau} H^5(\mathbb{Z}/2, 2; C)$$

la première flèche étant la composition : $H^4(E; C) \rightarrow \text{Hom}(H_4 E, C) \rightarrow \text{Hom}(\pi_4 E, C)$.

Dans le cas particulier $C = \pi_4 E$, l'image par τ de $\text{id}_{\pi_4 E}$ est la classe caractéristique κ de la fibration. Dans le cas général, comme la suite (S) est fonctorielle en C , l'image par τ d'un homomorphisme φ de $\pi_4 E$ dans C est $\varphi \kappa$ (on note encore φ l'homomorphisme induit : $H^5(\mathbb{Z}/2, 2; \pi_4 E) \rightarrow H^5(\mathbb{Z}/2, 2; C)$). Un homomorphisme φ est donc induit par une classe de cohomologie si et seulement si $\varphi \kappa = 0$.

Soient L le quotient de $\pi_4 E$ par sa torsion et ρ la composition : $\pi_4 E \rightarrow L \rightarrow L/2L$, il s'agit de montrer $\rho \kappa = 0$. La "multiplication par 2" de $\pi_4 E$ dans E se factorise par une application f de E dans F ; soit ι la classe canonique de F , alors l'image de $f^* \iota$ dans $\text{Hom}(\pi_4 E, \pi_4 E)$ est $2 \text{id}_{\pi_4 E}$, il en

résulte $2\kappa = 0$. La classe $\rho\kappa$ est donc dans l'image du "bockstein"
 $B : H^4(\mathbb{Z}/2, 2; L/2L) \rightarrow H^5(\mathbb{Z}/2, 2; L/2L)$ associé à la suite exacte :
 $0 \rightarrow L/2L \rightarrow L/4L \rightarrow L/2L \rightarrow 0$. Or $H^*(\mathbb{Z}/2, 2; L/2L)$ s'identifie à
 $H^*(\mathbb{Z}/2, 2; \mathbb{Z}/2) \otimes L/2L$ et B à $\beta \otimes \text{id}$, β désignant le "bockstein" associé à la
suite exacte $0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z}/4 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0$, enfin
 $\beta : H^4(\mathbb{Z}/2, 2; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^5(\mathbb{Z}/2, 2; \mathbb{Z}/2)$ est nul.

[En fait le deuxième étage de Postnikov de G/O est $K(\mathbb{Z}/2, 2) \times_{\delta \text{Sq}^2} K(\mathbb{Z}, 4)$
(δ est le bockstein entier) ; il en est de même pour BSO . La classe w de la
proposition 3.2 correspond à la classe w_4 de $H^4(BSO; \mathbb{Z}/2)$.]

APPENDICE 3

On donne dans le § 1 une démonstration du théorème suivant dû à Rohlin [15].

THÉORÈME.- Soit M une variété, différentiable, compacte sans bord, orientée, de
dimension 4, telle que $w_2(M) = 0$, alors la signature de M est divisible par 16.

On pourra se référer à [8] [14] pour une démonstration plus "géométrique" et
à [9] pour une démonstration contenant davantage de topologie algébrique.

Dans le § 2, on montre $\pi_3 G/O = 0$ et dans le § 3 que le tore T^3 muni de
parallélisation de groupe de Lie représente un élément non trivial de Ω_3^{fr} .

§ 1. Le théorème de Rohlin

1.1. Soient Spin le revêtement universel de SO et $\text{Spin}(n)$ le revêtement induit
de $SO(n)$. Le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K(\mathbb{Z}/2, 1) & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ B \text{ Spin}(n) & \longrightarrow & BSO(n) \end{array}$$

fournit un diagramme commutatif d'espaces de Thom :

$$\begin{array}{ccc} S^n \wedge K_+ & \longrightarrow & S^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ M \text{ Spin}(n) & \longrightarrow & MSO(n) \end{array}$$

(K est une abréviation de $K(\mathbb{Z}/2, 1)$, K_+ désigne la réunion disjointe de K
et d'un point) ou bien encore un diagramme de spectres :

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{K}_+ & \longrightarrow & \underline{S}^0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M \text{ Spin} & \longrightarrow & MSO
 \end{array}$$

(on note $\underline{L}$ le spectre formé des suspensions itérées d'un espace pointé L). On en déduit une application i , de la cofibre de l'application $\underline{K}_+ \rightarrow \underline{S}^0$, c'est-à-dire $S^1 \wedge \underline{K}$, dans la cofibre C de l'application $M \text{ Spin} \rightarrow MSO$; on note D la cofibre de i . On a donc construit un diagramme de spectres :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & S^1 \wedge \underline{K} \\
 & & & & \downarrow i \\
 M \text{ Spin} & \longrightarrow & MSO & \xrightarrow{r} & C \\
 & & & & \downarrow j \\
 & & & & D
 \end{array}$$

où ligne et colonne sont des cofibrations.

On vérifie par inspection les points suivants :

(i) L'homomorphisme $i_* : H_t S^1 \wedge \underline{K} \rightarrow H_t C$ est un isomorphisme pour $t \leq 3$; $H_t D = 0$ pour $t \leq 3$.

(ii) Il existe deux classes, $a_4 \in H^4(C; \mathbb{Z}/4)$ et $a_5 \in H^5(C; \mathbb{Z}/2)$, caractérisées par les conditions ci-dessous :

— $r^* a_4 = U \cup \mathfrak{F} w_2$, le second membre désignant symboliquement l'image par l'isomorphisme de Thom : $H^4(BSO; \mathbb{Z}/4) \rightarrow H^4(MSO; \mathbb{Z}/4)$ du carré de Pontryagin de w_2 .

— $r^* a_5 = U \cup w_2 w_3$.

(iii) $i^* a_4 = \theta \Sigma \iota_1^3$, θ désignant l'inclusion de $\mathbb{Z}/2$ dans $\mathbb{Z}/4$, Σ la suspension en cohomologie, et ι_1 la classe canonique de $H^1(K; \mathbb{Z}/2)$.

(iv) Les homomorphismes : $H_4 C \xrightarrow{a_4} \mathbb{Z}/4$, $H_5 C \xrightarrow{a_5} \mathbb{Z}/2$ sont des isomorphismes ; soit $b_4 \in H^4(D; \mathbb{Z}/2)$ telle que $j_* b_4 = \rho_2 a_4$ (ρ_2 désignant la réduction modulo 2), alors l'homomorphisme : $H_4 D \xrightarrow{b_4} \mathbb{Z}/2$ est un isomorphisme ; $j_* : H_5 C \rightarrow H_5 D$ est un isomorphisme.

PROPOSITION.- Les deux homomorphismes : $\pi_t C \rightarrow \pi_t D$ ($t = 4, 5$) sont surjectifs.

Démonstration. Cas $t = 4$. L'homomorphisme d'Hurewicz : $\pi_4 D \rightarrow H_4 D$ est un isomorphisme et l'image de la classe de CP^2 dans $\pi_4 MSO$ par $j_* r_*$ est non triviale puisque $w_2^2[CP^2] = 1$.

Cas $t = 5$. La classe $Sq^3 b_4$ est non nulle, en effet $r^* j_* Sq^3 b_4 = U \cup w_2^2 w_3$; on en déduit que l'homomorphisme : $H_6 D \xrightarrow{Sq^2 b_4} \mathbb{Z}/2$ est non trivial.

Ceci implique que l'homomorphisme d'Hurewicz : $\pi_5 D \rightarrow H_5 D$ est encore un isomorphisme. La surjectivité de $j_* : \pi_5 C \rightarrow \pi_5 D$ se démontre alors comme précédemment en exhibant une variété différentiable W^5 , compacte sans bord, orientable, telle que $w_2 w_3 [W^5] \neq 0$ (on peut prendre pour W le tore de la "conjugaison" de $\mathbb{C}P^2$).

En utilisant la proposition ci-dessus on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \pi_3^S K & \longrightarrow & \pi_4 C & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \iota_1^3 & & \downarrow a_4 & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{Z}/4 & \xrightarrow{p_2} & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

où les lignes sont exactes.

L'interprétation géométrique de ce diagramme est la suivante. Le groupe $\pi_4 C$ est le groupe de cobordisme relatif $\Omega_4^{SO, Spin}$, un élément de ce groupe est représenté par une variété différentiable N^4 , compacte orientée, dont le bord est muni d'une structure $Spin s$; soit $w_2^s \in H^2(N, \partial N; \mathbb{Z}/2)$ l'obstruction à étendre s , alors la flèche $\pi_4 C \rightarrow \mathbb{Z}/4$ (resp. $\mathbb{Z}/2$) associe à N le nombre caractéristique $\mathcal{P}_{w_2^s}[N]$ (resp. $(w_2^s)^2[N]$). Un élément de $\pi_3^S K$ est représenté par une variété M^3 , qui est le bord d'une variété N^4 stablement parallélisée, munie d'une classe $x \in H^1(M; \mathbb{Z}/2)$; la flèche $\pi_3^S K \rightarrow \mathbb{Z}/2$ associe $x^3[M]$ à cet élément. La classe x détermine une structure $Spin s$ de M , celle qui diffère par x de la structure $spin$ de M induite par la parallélisation stable de N ; la flèche $\pi_3^S K \rightarrow \pi_4 C$ est claire à présent.

1.2. PROPOSITION.- Le groupe $\pi_3^S K$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/8$.

Démonstration. Ce groupe s'identifie à $\pi_3^S MO(1)$ c'est-à-dire au groupe de cobordisme des surfaces munies d'une réduction de leur fibré normal stable à la dimension 1 (à la donnée (M, x) décrite ci-dessus on associe la surface duale de x); celui-ci est isomorphe à $\mathbb{Z}/8$ via un invariant de Kervaire-Brown [4].

COROLLAIRE.- Le groupe $\pi_4 C$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/16$.

Démonstration. L'extension $0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z}/4 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0$ est non triviale, il en est donc de même pour l'extension $0 \rightarrow \pi_3^S K \rightarrow \pi_4 C \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0$.

LEMME.- L'homomorphisme $\pi_4^{MSO} \rightarrow \pi_4 C$ est surjectif.

Démonstration. On a déjà vu que l'image de la classe de $\mathbb{C}P^2$ par la composition $\pi_4^{MSO} \rightarrow \pi_4 C \rightarrow \mathbb{Z}/2$ est non triviale ce qui montre qu'elle engendre $\pi_4 C$.

L'image de $\pi_4 \text{MSpin}$ dans $\pi_4 \text{MSO}$ est donc d'indice 16. Puisque $\pi_4 \text{MSO}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ via la signature le théorème de Rohlin est démontré.

§ 2. La nullité de $\pi_3 \text{G/O}$

Le lemme ci-dessus et la nullité de $\pi_3 \text{MSO}$ impliquent $\pi_3 \text{MSpin} = 0$. Soit M^3 une variété fermée munie d'une parallélisation stable t , M est le bord d'une variété connexe N^4 muni d'une structure Spin qui étend la structure Spin de M induite par t ; soit N_0 la variété obtenue en supprimant dans N l'intérieur d'un disque D^4 , comme $H^4(N_0, M; \pi_3 \text{Spin}) = 0$ il n'y a aucune obstruction à étendre t en une parallélisation stable de N_0 , ceci montre qu'il existe un cobordisme stablement parallélisé entre (M, t) et une sphère c'est-à-dire que l'homomorphisme : $\pi_3 0 \rightarrow \pi_3 \text{G}$ est surjectif. Puisque $\pi_2 0 = 0$, $\pi_3 \text{G/O} = 0$.

§ 3. L'homomorphisme : $\Omega_1^{\text{fr}} \otimes \Omega_2^{\text{fr}} \rightarrow \Omega_3^{\text{fr}}$

Soit $\mathcal{U}$ la parallélisation de groupe de Lie de S^1 , le groupe Ω_1^{fr} , qui est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$, est engendré par la classe de $(S^1, \mathcal{U})$.

LEMME.- Soit V^2 une surface sans bord munie d'une trivialisatoin stable t . Si $(V \times S^1, t \times \mathcal{U})$ est le bord d'une variété N^4 stablement trivialisée, alors la signature de N est nulle.

Démonstration. Soit P^2 une surface stablement trivialisée dont le bord est formé de deux exemplaires de $(S^1, \mathcal{U})$, alors la réunion sur le bord de deux exemplaires de N et de $V \times P$ est une variété fermée R^4 stablement trivialisée. On a par "additivité de la signature" :

$$\sigma(R) = 2\sigma(N) - \sigma(V \times P).$$

Or $\sigma(R) = 0$ d'après la formule d'Hirzebruch et $\sigma(V \times P) = 0$ par "multiplicativité de la signature".

PROPOSITION.- L'homomorphisme : $\Omega_1^{\text{fr}} \otimes \Omega_2^{\text{fr}} \rightarrow \Omega_3^{\text{fr}}$ est injectif.

Démonstration. Soient V , t , N comme précédemment et a l'élément de $\pi_3^S K$ représenté par la donnée $(V \times S^1, t \times \mathcal{U}, N, 1 \times y)$ où y est le générateur de $H^1(S^1; \mathbb{Z}/2)$; a considéré comme un élément de $\pi_3^S \text{MO}(1)$ est l'image par l'homomorphisme naturel $\sigma : \Omega_2^{\text{fr}} \rightarrow \pi_3^S \text{MO}(1)$ de la classe de (V, t) . Or σ s'identifie à l'inclusion de $\mathbb{Z}/2$ dans $\mathbb{Z}/8$ (l'invariant de Kervaire-Brown généralise l'invariant de Kervaire), pour démontrer la proposition il suffit de vérifier que $a = 0$.

La structure Spin de $V \times S^1$ qui diffère de $t \times \mathcal{E}$ par la classe $1 \times y$ se prolonge à $V \times D^2$; soient X la réunion sur le bord de N et $V \times D^2$, et b la classe de X dans Ω_4^{SO} . Par construction a et b ont même image dans $\Omega_4^{SO, Spin}$, or $b = 0$ car d'après le lemme ci-dessus $\sigma(X) = 0$, il en résulte $a = 0$ puisque la flèche : $\pi_3^S K \rightarrow \Omega_4^{SO, Spin}$ est injective.

Remarque. - Comme Ω_2^{fr} est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$ avec la classe de $(S^1, \mathcal{E}) \times (S^1, \mathcal{E})$ pour générateur, la proposition ci-dessus dit seulement que la classe dans Ω_3^{fr} du tore T^3 muni de sa parallélisation de groupe de Lie est non triviale. Il est facile réciproquement de déduire le théorème de Rohlin de ce résultat.

Remarque. - Dans le cadre sophistiqué de la suite spectrale d'Adams modulo 2 [1], $\pi_3 G/O = 0$ équivaut à $h_1^3 = h_o^2 h_2$ et le fait que $(T^3, \mathcal{F})$ est non trivial dans Ω_3^{fr} au fait que h_1^3 persiste à l'infini.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. F. ADAMS - Stable Homotopy Theory, Lecture Notes in Math. n° 3, Springer-Verlag, 1969.
- [2] S. AKBULUT and R. KIRBY - An exotic free involution of S^4 , à paraître.
- [3] W. BROWDER - Surgery on simply connected manifolds, Academic Press, 1971.
- [4] E. H. BROWN - Generalization of Kervaire invariant, Ann. of Math., 95 (1972), 368-383.
- [5] S. E. CAPPELL and J. L. SHANESON - On 4 dimensional surgery and applications, Com. Math. Helv., 46 (1971), 500-528.
- [6] S. E. CAPPELL and J. L. SHANESON - Some new four manifolds, Ann. of Math., 104 (1976), 61-72.
- [7] J. CERF - Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension 3 ($\Gamma_4 = 0$), Lecture Notes in Math. n° 53, Springer-Verlag, 1968.
- [8] L. GUILLOU et A. MARIN - Une extension du théorème de Rohlin sur la signature, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 285 (1977), Série A, 95-98.
- [9] M. KERVAIRE and J. MILNOR - Bernoulli numbers, homotopy groups, and a theorem of Rohlin, Proc. I. C. M. Edimbourg (1958), 454-458.
- [10] R. KIRBY and L. SIEBENMANN - Foundational essays on topological manifolds, smoothing, and triangulations, Ann. of Math. Studies, n° 88, Princeton University Press.
- [11] R. LASHOF and M. ROTHENBERG - Microbundles and smoothing, Topology 3 (1965), 357-388.
- [12] F. LATOUR - Chirurgie non simplement connexe (d'après C. T. C. Wall), Séminaire Bourbaki, Exposé 397, Juin 1971, Lecture Notes in Math. n° 244, p. 289-322, Springer-Verlag, 1971.
- [13] F. LAUDENBACH and V. POENARU - A note on 4-dimensional handlebodies, Bull. Soc. Math. France, 100 (1972), 337-344.
- [14] Y. MATSUMOTO - An elementary proof of Rohlin's signature theorem and its extension by Guillou and Marin, à paraître.
- [15] V. A. ROHLIN - A new result in the theory of four dimensional manifolds, Soviet. Math. Doklady 8(1952), 221-224.
- [16] J. D. STASHEFF - A classification theorem for fibre spaces, Topology 2 (1963), 239-246.
- [17] D. SULLIVAN - Triangulating homotopy equivalences, Thesis Princeton University 1965.
- [18] C. T. C. WALL - Surgery on compact manifolds, Academic Press 1971.