

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ALAIN GUICHARDET

Représentations de G^X (G compact) selon Verchik-Gelfand-Graiev et Ismagilov

Séminaire N. Bourbaki, 1980, exp. n° 541, p. 303-311

http://www.numdam.org/item?id=SB_1978-1979__21__303_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATIONS DE G^X (G COMPACT) SELON VERCHIK - GELFAND - GRAIEV
ET ISMAGILOV

par Alain GUICHARDET

§ 1. Introduction

J'ai parlé dans un précédent exposé ([4]) du problème de l' "intégrale multiplicative" posé - et partiellement résolu - par Verchik - Gelfand et Graiev dans [6] : on se donne une variété X , une mesure positive m sur X et un groupe de Lie G ; on note $\mathcal{D}(X, G)$ le groupe des fonctions C^∞ à support compact de X dans G , et on cherche une représentation unitaire irréductible de $\mathcal{D}(X, G)$ qui soit invariante (à équivalence unitaire près) par tous les automorphismes de $\mathcal{D}(X, G)$ provenant des difféomorphismes de X qui conservent m . La construction repose sur l'existence d'une représentation unitaire irréductible de G ayant une 1-cohomologie non nulle, et ne s'applique donc pas lorsque G est compact. Je vais parler ici d'un nouveau travail de Verchik - Gelfand et Graiev ([7], [8], [9]) dans lequel les auteurs construisent une représentation unitaire de $\mathcal{D}(X, G)$ en supposant G compact ; ils se donnent une structure riemannienne sur X et notent m la mesure positive correspondante ; la représentation obtenue de $\mathcal{D}(X, G)$ est irréductible lorsque $\dim X \geq 4$; d'autre part elle est invariante non pas par tous les difféomorphismes de X qui conservent m , mais seulement par ceux qui conservent la structure riemannienne, de sorte que le problème de l' "intégrale multiplicative" reste posé. Je dois ajouter que R.S. Ismagilov a construit dans [5] des représentations unitaires

irréductibles de $\mathcal{D}(X, G)$ pour $G = SU(2)$, $\dim X \geq 5$, et que la méthode de [9] est une amélioration de celle de [5].

§ 2. Construction de représentations unitaires de $\mathcal{D}(X, G)$

On va utiliser la construction (exposée dans [4]) qui, à un groupe G , à une représentation orthogonale A de G dans un espace préhilbertien réel H et à un 1-cocycle $b \in Z^1(G, H)$ fait correspondre une représentation unitaire $U_{A, b}$ de G dans $S H_G$, espace hilbertien complexifié de la somme hilbertienne des puissances symétriques complétées de H .

Les données sont

- une variété riemannienne X dont on note m la mesure canonique, $P = (p_{ij}(x))$ le tenseur métrique, L l'opérateur de Laplace-Beltrami, $T(X)$ le fibré tangent ;
- un groupe de Lie semi-simple compact G dont on note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie, B la forme de Killing, $\exp$ l'application exponentielle, $T(G)$ le fibré tangent.

On pose

$\mathcal{D} = \mathcal{D}(X, G) =$ groupe des applications C^∞ de X dans G égales à 1 en dehors d'un compact

$\Delta = \mathcal{D}(X, \mathfrak{g})$

$\mathcal{K} = \Omega_c^1(X, \mathfrak{g}) =$ espace des 1-formes différentielles sur X à valeurs dans $\mathfrak{g}$ et à support compact

$d =$ différentiation extérieure $\Delta \longrightarrow \mathcal{K}$.

On sait ([1], ch. III, § 2) que $T(G)$, muni de la loi de composition tangente à celle de G , est un groupe de Lie, produit semi-direct du groupe additif $\mathfrak{g}$ par le groupe G opérant dans $\mathfrak{g}$ par Ad . Notons $\mathcal{H}^1(X, G)$ l'ensemble des morphismes de fibrés vectoriels à support compact $F : T(X) \longrightarrow T(G)$; écrivant $T(G) = \mathfrak{g} \times G$, un tel morphisme peut s'écrire

$$F(x, \xi) = (\omega_x(\xi), f(x)) \quad \forall x \in X, \xi \in T_x(X)$$

où $f \in \mathcal{D}$ et $\omega \in \mathcal{K}$; $\mathcal{U}^1(X, G)$, muni de la multiplication point par point, s'identifie au produit semi-direct du groupe additif $\mathcal{K}$ par le groupe $\mathcal{D}$ opérant dans $\mathcal{K}$ de la façon suivante :

$$(f \cdot \omega)_x = \text{Ad } f(x) \circ \omega_x.$$

Comme dans tout produit semi-direct, on a une action A_0 de $\mathcal{U}^1(X, G)$ dans $\mathcal{K}$ (par automorphismes intérieurs) et un 1-cocycle b_0 pour cette action : la projection $\mathcal{U}^1(X, G) \longrightarrow \mathcal{K}$. D'autre part on a un morphisme Λ de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{U}^1(X, G)$ associant à toute application C^∞ sa différentielle ; dans les notations ci-dessus, on a $\Lambda(f) = (\omega, f)$ avec

$$\omega_x = \tau_{f(x)}^{-1} \circ (Df)_x$$

où $\tau_g : T_e(G) \longrightarrow T_g(G)$ est la différentielle en e de $h \longmapsto gh$, et $(Df)_x$ est la différentielle de f en x .

En composant A_0 et b_0 avec Λ on obtient une action A de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{K}$ et un 1-cocycle b pour cette action :

$$(1) \quad (A(f) \cdot \omega)_x = \text{Ad } f(x) \circ \omega_x$$

$$(2) \quad b(f)_x = \tau_{f(x)}^{-1} \circ (Df)_x.$$

On définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel $\mathcal{K}$ de la façon suivante : pour tout $x \in X$ on munit $\text{Hom}_{\mathcal{K}}(T_x(X), \mathcal{K})$ du produit scalaire naturel, à savoir

$$(u | v)_x = \sum_{i,j} p^{ij}(x) \cdot B(u(\frac{\partial}{\partial x_i}), v(\frac{\partial}{\partial x_j}))$$

où $(x_1, \dots, x_n)$ sont des coordonnées locales et les $p^{ij}(x)$ - les coefficients de l'inverse de la matrice $(p_{ij}(x))$. Le produit scalaire sur $\mathcal{K}$ est alors défini par

$$(\omega | \omega')_{\mathcal{K}} = \int_X (\omega_x | \omega'_x)_x \cdot d\mu(x) ;$$

la norme correspondante est notée $\| \cdot \|$. La représentation A est orthogonale pour ce produit scalaire ; on notera U la représentation unitaire de $\mathcal{D}$ associée au couple (A, b) comme rappelé au début du paragraphe :

$$(3) \quad U(f).EXP \omega = \exp (-\|b(f)\|^2/2 - (A(f).\omega | b(f))). \exp (A(f).\omega + b(f)).$$

Le but de ce qui suit est d'indiquer les grandes lignes de la démonstration du théorème suivant :

Théorème 1. Si $\dim X \geq 4$, U est irréductible.

§ 3. Autre réalisation de U

En vertu du théorème de Minlos (cf. [2]), la fonction sur $\mathcal{K}$:

$$\omega \longmapsto \exp (-\|\omega\|^2/2)$$

est la transformée de Fourier d'une mesure gaussienne bien déterminée μ sur $\mathcal{K}'$; d'autre part (voir par exemple [3]) il existe un unique isomorphisme isométrique de $S\mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ sur $L^2(\mathcal{K}', \mu)$ transformant, pour tout $\omega \in \mathcal{K}$, $EXP \omega$ en la fonction

$$\mathcal{K}' \ni \chi \longmapsto \exp (i \langle \chi, \omega \rangle + \|\omega\|^2/2) ;$$

la représentation U , transportée par cet isomorphisme, devient

$$(4) \quad (U(f).\varphi)(\chi) = \exp (i \langle \chi, b(f) \rangle) . \varphi ({}^t A(f).\chi) .$$

Pour tout $\omega \in \mathcal{K}$ on notera T_{ω} l'opérateur suivant

$$(5) \quad (T_{\omega}.\varphi)(\chi) = \exp (i \langle \chi, \omega \rangle) . \varphi(\chi)$$

et on a facilement

$$(6) \quad U(f).T_{\omega}.U(f)^{-1} = T_{A(f).\omega} \quad \forall f \in \mathcal{D}, \omega \in \mathcal{K}.$$

On utilisera aussi l'espace Δ de la façon suivante : l'application d de Δ dans $\mathcal{K}$ et le produit scalaire sur $\mathcal{K}$ définissent un produit scalaire sur Δ :

$$\begin{aligned}
 (7) \quad (\varphi | \psi)_{\Delta} &= (d\varphi | d\psi)_{\mathcal{K}} \\
 &= \int_X \sum_{ij} p^{ij}(x) \cdot B\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right) \cdot dm(x) \\
 &= - \int_X B(L\varphi, \psi) \cdot dm ;
 \end{aligned}$$

on note ν la mesure gaussienne correspondante sur Δ' , image de μ par l'application $t_d : \mathcal{K}' \rightarrow \Delta'$; d'où une injection isométrique

$$(8) \quad L^2(\Delta', \nu) \longrightarrow L^2(\mathcal{K}', \mu) .$$

§ 4. Décomposition de U liée à un tore maximal de G

Soient G_0 un tore maximal de G , $\mathfrak{g}_0$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{g}_1$ l'orthogonal de $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}$ pour B , stable par $\text{Ad } G_0$. On pose

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_0 &= \mathcal{D}(X, G_0) \quad (\text{groupe abélien}) \\
 \Delta_i &= \mathcal{D}(X, \mathfrak{g}_i) \quad \text{pour } i = 0, 1 \\
 \mathcal{K}_i &= \Omega_c^1(X, \mathfrak{g}_i) \quad \text{"} \quad \text{"}
 \end{aligned}$$

et on peut écrire

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \Delta_0 \oplus \Delta_1, \quad \Delta' = \Delta'_0 \oplus \Delta'_1 \\
 \mathcal{K} &= \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1, \quad \mathcal{K}' = \mathcal{K}'_0 \oplus \mathcal{K}'_1 \\
 \nu &= \nu_0 \otimes \lambda, \quad \mu = \mu_0 \otimes \mu_1
 \end{aligned}$$

où $\nu_0, \lambda, \mu_0, \mu_1$ sont des mesures gaussiennes ;

$$L^2(\mathcal{K}', \mu) = L^2(\mathcal{K}'_0, \mu_0) \otimes L^2(\mathcal{K}'_1, \mu_1) .$$

Prenons $f \in \mathcal{D}_0$; alors l'opérateur $A(f)$ est trivial dans $\mathcal{K}_0$ et $b(f) \in \mathcal{K}_0$; donc (4) devient

$$(9) \quad (U(f). \varphi)(\chi_0, \chi_1) = \exp(i \langle \chi_0, b(f) \rangle) . \varphi(\chi_0, {}^t A(f). \chi_1)$$

c'est-à-dire

$$U|_{\mathcal{D}_0} = U_0 \otimes U_1$$

ou U_1 est la représentation de $\mathcal{D}_0$ dans $L^2(\mathcal{K}'_1, \mu_1)$ définie par

$$(10) \quad (U_0(f). \varphi)(\chi_0) = \exp(i \langle \chi_0, b(f) \rangle) . \varphi(\chi_0)$$

$$(11) \quad (U_1(f). \varphi)(\chi_1) = \varphi({}^t A(f). \chi_1) .$$

On va étudier les représentations V, V_0, V_1 de Δ_0 définies par

$$V(f) = U(\exp \circ f) \quad , \quad V_i(f) = U_i(\exp \circ f) ;$$

on a évidemment

$$V = V_0 \otimes V_1 .$$

La structure de V_0 est donnée par le ~~lemme~~ suivant :

Lemme 1. La mesure spectrale de V_0 est la mesure gaussienne ν_0 .

(On le démontre en utilisant (8) et la relation

$$b(\exp \circ f) = d f \quad \forall f \in \Delta_0 .)$$

Celle de V_1 est plus compliquée et fait intervenir les mesures de Poisson ; en effet V_1 est la somme des puissances symétriques de la représentation $A \circ \exp$ de Δ_0 dans $\mathcal{K}_1$; d'autre part, en décomposant $\mathcal{K}_1$ suivant les vecteurs racines et en notant Σ le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ on peut écrire

$$\mathcal{K}_1 = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathcal{K}_1^\alpha \quad \text{avec} \quad \mathcal{K}_1^\alpha \sim \Omega_c^1(X) ;$$

on en déduit le

Lemme 2. La mesure spectrale ν_1 de V_1 est portée par l'ensemble des éléments de Δ'_0 de la forme $\delta_{x_1}^{\lambda_1} + \dots + \delta_{x_p}^{\lambda_p}$ où $p \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$, $\lambda_i \in \Sigma$,
 $\delta_x^\lambda(f) = \lambda(f(x)) \quad \forall f \in \Delta_0$.

Le lemme suivant est le point crucial de la démonstration, et celui qui a nécessité la version révisée [9] de l'article.

Lemme 3. Si $\dim X \geq 4$, l'algèbre de von Neumann engendrée par $\nu(\Delta_0)$ contient $\nu_0(\Delta_0) \otimes I$ et $I \otimes \nu_1(\Delta_0)$.

On se ramène à démontrer le

Lemme 4. Si A et B sont des parties boréliennes disjointes de Δ'_0 , les mesures $\nu_0 * \nu_1|_A$ et $\nu_0 * \nu_1|_B$ sont disjointes.

Je vais donner une idée de la démonstration en supposant pour simplifier que $E_0 = \mathbb{R}$, de sorte que $\Delta_0 = \mathcal{D}(X)$ et que δ_x^λ devient δ_x ; d'autre part, utilisant des ouverts relativement compacts Y de X et les applications de restriction $\mathcal{D}'(X) \rightarrow \mathcal{D}'(Y)$, on est amené à remplacer X par une variété riemannienne compacte à bord et Δ_0 par $\mathcal{D}(\bar{X})$; on notera $\bar{\Delta}_0$ la complété de Δ_0 pour le produit scalaire analogue à (7); ce n'est autre que l'espace de Sobolev $H_0^1(X)$.

Rappelons le théorème de Feldman: deux translatées $\nu_0 * \delta_a$, $\nu_0 * \delta_b$ de la mesure gaussienne ν_0 sont disjointes si $a-b$ n'appartient pas à $\bar{\Delta}_0$. Le lemme 4 est une forme renforcée ("intégrée") de la conclusion de ce théorème, et nécessite une forme renforcée de son hypothèse, à savoir:

Lemme 5. Il existe un opérateur de Hilbert-Schmidt injectif Γ dans $\bar{\Delta}_0$ tel qu'aucun élément non nul de la forme $k_1 \delta_{x_1} + \dots + k_p \delta_{x_p}$ ($p \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$, $k_i \in \mathbb{Z}$) n'appartienne à $\bar{\Delta}_0$, complété de $\bar{\Delta}_0$ pour la norme $f \mapsto \|\Gamma f\|$.

Idée de la démonstration du lemme 5

Notons $u_1, u_2, \dots$ une base orthonormée de $\bar{\Delta}_0$ formée de fonctions propres du laplacien L , rangées de façon que les valeurs propres correspondantes λ_k (qui sont négatives) aillent en décroissant ; on définit Γ par $\Gamma(u_k) = c_k u_k$ où

$$c_k = (k+1)^{-\frac{1}{2}} (\log(k+1))^{-1}.$$

Montrons par exemple qu'aucun élément δ_x n'appartient à $\bar{\Delta}_0$. Ecrivons tout élément f de Δ_0 sous la forme $f = \sum f_k u_k$; un élément de $\bar{\Delta}_0$ appartient à $\bar{\Delta}_0$ (resp. $\bar{\Delta}_0$) si et seulement s'il est de la forme $f \mapsto \sum a_k f_k$ où $\sum |a_k|^2 < +\infty$ (resp. $\sum c_k |a_k|^2 < +\infty$) ; supposons $\delta_x \in \bar{\Delta}_0$; il existe des a_k tels que $\sum c_k |a_k|^2 < +\infty$ et que

$$\sum a_k f_k = f(x) = \sum f_k u_k(x) \quad \forall f \in \Delta_0 ;$$

ceci implique $u_k(x) = a_k$ et $\sum c_k |u_k(x)|^2 < +\infty$; or une formule asymptotique due à Carleman montre que

$$\sum_{\lambda_k < \lambda} c_k |u_k(x)|^2 \sim c(x) \int_a^\lambda t^{m/4-2} (\log t)^{-1} dt$$

où $m = \dim X$, $c(x) > 0$, $a > 1$; il en résulte que

$$\sum c_k |u_k(x)|^2 = +\infty \quad \forall x \quad \text{si } m \geq 4.$$

§ 5. Fin de la démonstration du théorème

On doit montrer que l'algèbre de von Neumann $\mathcal{A}$ engendrée par $U(\mathcal{D})$ est égale à $\mathcal{L}(L^2(K', \mu))$. D'après le lemme 3, $\mathcal{A}$ contient les opérateurs $U_0(\exp \circ f) \otimes I$ où $f \in \Delta_0$; d'après (10), $U_0(\exp \circ f)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction

$$\chi \longmapsto \exp(i \langle \chi, b(\exp \circ f) \rangle) = \exp(i \langle \chi, df \rangle) ;$$

donc (cf. § 3) , $U_0(\exp \circ f) = T_{df}$. Comme $\underline{g}$ est réunion de ses sous-algèbres de Cartan $\underline{g}_0$, on en déduit que $\mathcal{A}$ contient T_{df} pour toute $f \in \Delta$, puis, à cause de (6), T_ω pour toute ω de la forme $A(g).df$ où $g \in \mathcal{D}$, $f \in \Delta$. On montre ensuite que les ω de cette forme forment un ensemble total dans $\mathcal{K}$, d'où résulte que la fonction $1 \in L^2(\mathcal{K}', \mu)$ est cyclique pour $\mathcal{A}$. Pour terminer la démonstration du théorème, on exhibe une propriété qui caractérise les fonctions constantes parmi les éléments φ de $L^2(\mathcal{K}', \mu)$ et qui est conservée par tout opérateur M du commutant de $\mathcal{A}$, à savoir : pour toute sous-algèbre de Cartan $\underline{g}_0$, $\varphi(\chi_0, \chi_1)$ ne dépend que de χ_0 (avec les notations du § 4). Il en résulte que $M.1 = k.1$ et, comme 1 est cyclique, $M = k.I$.

Bibliographie.

- [1] N.Bourbaki. Groupes et algèbres de Lie.
- [2] P.Cartier. Processus aléatoires généralisés. Séminaire Bourbaki n° 272, 1963/64.
- [3] A.Guichardet. Symmetric Hilbert Spaces and Related Topics. Lecture Notes in Math., n° 261.
- [4] A.Guichardet. Représentations de G^X selon Gelfand et Delorme. Séminaire Bourbaki, n° 486, 1975/76.
- [5] R.S.Ismagilov. Sur les représentations unitaires du groupe $C_0^\infty(X, G)$, $G = SU(2)$. Mat. Sbornik, t. 100, 1976, p. 117-131.
- [6] A.M.Verchik-I.M.Gelfand-M.I.Graiev. Représentations irréductibles du groupe G^X et cohomologie. Funk. Anal. i ego prilozh., t.8, 1974, p. 67-69.
- [7] ~~Mêmes auteurs.~~ Représentations du groupe $C_0^\infty(X, G)$, G compact. Dokl. Akad. Nauk, t. 232, 1977, p. 745-748.
- [8] ~~Mêmes auteurs.~~ Même titre. Preprint. Moscou 1976.
- [9] ~~Mêmes auteurs.~~ Nouvelle version de [8]. Moscou 1979.