

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

BERNARD HELFFER

## **Propagation des singularités pour des problèmes aux limites**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1980, exp. n° 525, p. 1-20

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1978-1979\\_\\_21\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1978-1979__21__1_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROPAGATION DES SINGULARITÉS POUR DES  
PROBLÈMES AUX LIMITES

[d'après R. B. MELROSE, J. SJÖSTRAND]

par Bernard HELFFER

§ 0. Introduction

Cet exposé est en quelque sorte la suite de la deuxième partie de l'exposé de J. Chazarain [5]. Les travaux de ces dernières années ont en effet permis de comprendre assez complètement comment les singularités  $C^\infty$  des solutions d'une équation de type principal réel se propagent au voisinage du bord. Les principales contributions depuis juin 1973 ont été celles de :

F. G. Friedlander [14], R. B. Melrose ([28] [29] [30] [31] [32] [34] [36]), M. Taylor [44] [45] [46], G. Eskin [12] [13], K. G. Andersson - R. B. Melrose [2], R. B. Melrose - J. Sjöstrand [33] et Ivrii [22].

Dans l'exposé de J. Chazarain (2e partie), l'accent a été mis sur la construction de paramétrixes ; comme on le verra dans la suite, cette approche devient très difficile (mais encore nécessaire dans un cas) quand on aborde des situations géométriques compliquées, et, dans [2] et surtout dans [33], les auteurs sont revenus à des méthodes plus implicites basées sur des inégalités d'énergie et inspirées des démonstrations "classiques" de [19] [21].

0.1. Quelques définitions

Avant d'énoncer le théorème de R. B. Melrose - J. Sjöstrand, rappelons un certain nombre de définitions et de résultats préliminaires. Soit  $u$  une distribution sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  ( $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ). Le front d'onde de  $u$  (noté  $WF\ u$ ) est défini dans [20] par L. Hörmander comme un sous-ensemble fermé conique de  $T^*\Omega \setminus 0$  <sup>(1)</sup> :

On dit qu'un point  $(x_0, \xi_0)$  dans  $T^*\Omega$  n'est pas dans le front d'onde de  $u$ , s'il existe une fonction  $\varphi$  dans  $C_0^\infty(\Omega)$ , non nulle en  $x_0$ , telle que la transformée de Fourier de  $\varphi u$  notée  $\hat{\varphi u}$  est à décroissance rapide lorsque  $|\xi|$  tend vers l'infini pour  $\xi$  dans un ouvert conique  $\Gamma$  contenant  $\xi_0$ .

On dira qu'un opérateur  $P$  continu de  $\mathcal{D}'$  dans  $\mathcal{D}'$  est régularisant s'il envoie  $\mathcal{D}'$  dans  $C^\infty$ .

<sup>(1)</sup> Dans la suite, on notera plus simplement  $T^*\Omega$ .

Soit maintenant  $p$  un symbole dans  $S_{\text{classique}}^m(\dot{T}^*\Omega)$ , i.e.  $p$  admet un développement asymptotique :  $p(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_{m-j}(x, \xi)$  avec  $p_k \in C^\infty$  dans  $\dot{T}^*\Omega$  et homogène en  $\xi$  de degré  $k$ .

On associe à  $p$  un opérateur pseudodifférentiel  $P$  (dans  $OPS_{\text{class}}^m(\Omega)$ ) défini pour  $u$  dans  $C_0^\infty(\Omega)$  par :

$$Pu = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi.$$

Le symbole principal  $p_m$  est défini de manière invariante sur  $\dot{T}^*\Omega$ . On désignera par  $\Sigma(p_m)$  l'ensemble des zéros de  $p_m$  dans  $\dot{T}^*\Omega$ .

Le front d'onde peut alors être défini de manière équivalente par :

$$WF u = \{ \cap \Sigma(p_o), p_o \text{ symbole principal de l'opérateur pseudodifférentiel } P_o, P_o u \in C^\infty \}.$$

Rappelons que la projection de  $\dot{T}^*\Omega$  sur  $\Omega$  envoie  $WF u$  sur le support singulier de  $u$ .

A un symbole  $p$  réel défini sur  $\dot{T}^*\Omega$ , on associe le champ hamiltonien  $H_p$  qui est un champ de vecteurs sur  $\dot{T}^*\Omega$  défini dans des coordonnées canoniques  $(x, \xi)$  par :

$$H_p = \sum_{j=1}^n \left( -\frac{\partial p}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \frac{\partial p}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x^j} \right).$$

Les courbes bicaractéristiques (ou rayons) sont les courbes intégrales de  $H_p$  contenues dans  $\Sigma(p)$ .

Elles vérifient le système d'équations

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = + \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ \frac{d\xi}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x} \end{cases}.$$

La solution de (\*) ayant pour condition initiale  $(x(0), \xi(0)) = \rho$  est notée  $\exp tH_p(\rho)$ .

## 0.2. Le théorème de Hörmander

Le point de départ de notre exposé est le théorème suivant dû à L. Hörmander (1970) [19] [20] [21] (cf. [1] dans la catégorie analytique) qui règle le problème de la propagation des singularités dans un ouvert pour un opérateur de type principal réel (voir (0.4) (Pr. 1) pour la définition).

THÉORÈME 1.- Soit  $P$  un opérateur pseudodifférentiel de symbole principal réel  $p$  et  $u$  une distribution dans  $\Omega$  telle que :

$$Pu = f \quad \text{dans } \Omega.$$

Alors  $WF(u) \setminus WF(f)$  est contenu dans  $\Sigma(p)$  et est invariant par le flot du champ hamiltonien  $H_p$  dans  $T^*\Omega \setminus WF f$ .

Nous esquisserons trois démonstrations de ce théorème au § 1, car chacune a fourni l'amorce d'une démonstration dans le cas à bord.

### 0.3. Le problème au bord

Le théorème 1 ne dit rien sur le comportement des singularités au voisinage du bord  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  supposé  $C^\infty$ , lorsqu'on se place par exemple dans le cas où  $P$  est un opérateur du second ordre et que  $u$  est une distribution prolongeable telle que  $Pu$  est  $C^\infty$  jusqu'au bord et de trace  $C^\infty$  sur  $\partial\Omega$ . Les premiers résultats obtenus concernent la réflexion des singularités lorsque les courbes bicaractéristiques rencontrent le bord transversalement. Si deux courbes bicaractéristiques distinctes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  coupent le bord  $\partial T^*\Omega$  transversalement au-dessus d'un même point de  $T^*\partial\Omega$ , alors la présence de singularités pour  $u$  sur  $\gamma_1$  implique qu'il y a des singularités sur  $\gamma_2$  (on dit que  $\gamma_2$  est le rayon réfléchi de  $\gamma_1$ ). Ces résultats [4] [7] [8] [26] [39] [41] [43] ont été partiellement exposés dans [5]. Le cas resté longtemps sans solution (encore que des amorces de solution figurent dans les travaux de Ludwig [24] [25]) est celui où le champ hamiltonien  $H_p$  devient tangent au bord en des points de  $\Sigma(p)$ .

Le premier cas résolu indépendamment par R. B. Melrose [29] et M. Taylor [44] a été le cas "rasant" ou "diffractif", cas où les bicaractéristiques peuvent rencontrer  $\partial T^*\Omega$  tangentiellement, mais en restant en projection localement dans  $\Omega$  au voisinage du point de contact.

On peut par exemple analyser complètement la propagation des singularités pour le problème mixte suivant pour l'équation des ondes :

$$(**) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 & \text{dans } R_t \times U \\ u|_{R_t \times \partial U} = 0 \\ u|_{t=0} = \delta_{x_0}(x) \quad , \quad \partial_t u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

où  $U$  est l'extérieur d'un corps strictement convexe  $K$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Dans la figure 1, on indique en projection sur  $U$  la position du front d'onde aux différents temps  $t_1, t_2, \dots$

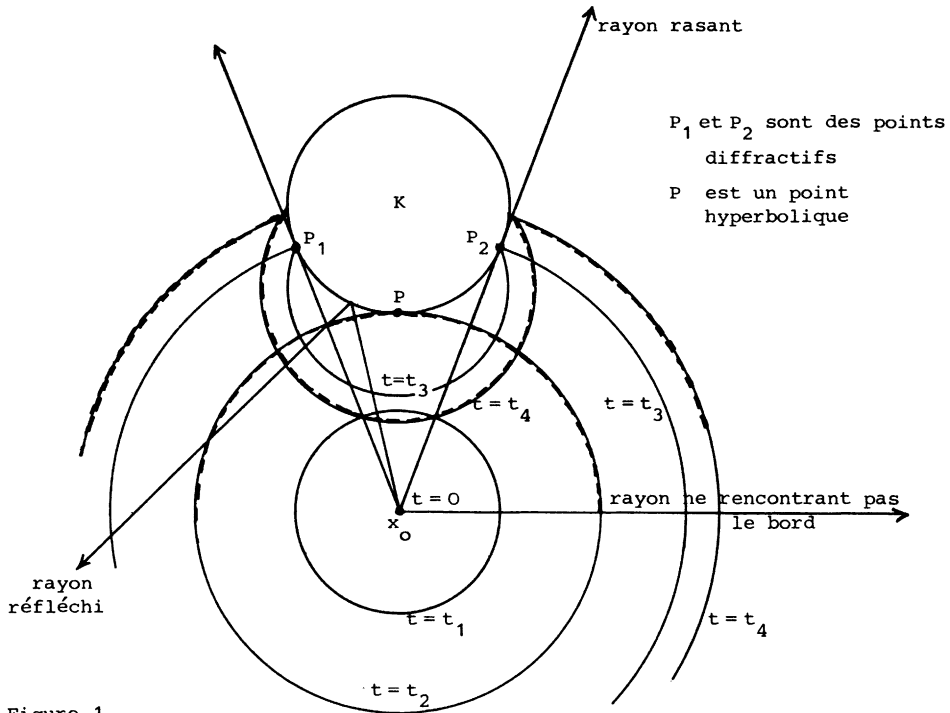


Figure 1

Le second cas étudié est le cas "glissant" (en anglais *gliding*). Les résultats ont été obtenus par K. G. Andersson - R. B. Melrose [2] et G. Eskin [13]. On peut ainsi analyser le problème de la propagation des singularités à l'intérieur et au bord d'une région convexe.

#### 0.4. Le théorème de Melrose - Sjöstrand

Nous allons maintenant énoncer le théorème général. On se place sur une variété  $C^\infty M$  de dimension  $(n+1)$ , de bord régulier  $\partial M$  et d'intérieur  $\mathring{M}$ . Soit  $P$  un opérateur différentiel du second ordre à coefficients  $C^\infty$  sur  $M$  de symbole principal  $p$  réel vérifiant :

- (Pr 1)  $dp$  et  $\alpha$  sont indépendants dans  $T^*M$   
(où  $\alpha$  désigne la 1-forme fondamentale, dite de Liouville sur  $T^*M$ ) ;
- (Pr 2)  $dp$  et  $\alpha$  restreints à  $\partial T^*M \setminus 0$  sont indépendants ;
- (Pr 3)  $\partial M$  est non caractéristique pour  $p$ , i.e.  $p$  est non nul sur le fibré conormal à  $\partial M$ .

On dira alors que  $P$  est de type principal réel jusqu'au bord.

La notion de rayon a été définie ci-dessus dans  $T^*\dot{M}$ , de même que la notion de rayon réfléchi dans le cas transversal. On peut étendre par continuité cette notion de rayon (il y a cependant des difficultés sérieuses lorsque  $H_P$  a un contact d'ordre infini avec  $\partial T^*M$ ) ; ces rayons, qui seront définis au § 2.4, seront des courbes dans  $BM (= \dot{T}^*\dot{M} \cup \dot{T}^*\partial M)$  muni de la topologie quotient naturelle. On définira également au § 2.1 le front d'onde d'une distribution prolongeable  $u$  sur  $M$   $WF_b u$  dans  $BM$  dont la restriction à  $\dot{T}^*\dot{M}$  est le front d'onde usuel défini précédemment.

THÉOREME 2 (cf. [33]).- Soient  $P$  un opérateur différentiel du second ordre à coefficients  $C^\infty$  sur  $M$  de type principal réel jusqu'au bord et  $u$  une distribution prolongeable telle que :

$$Pu \in C^\infty(M) \quad \text{et} \quad u|_{\partial M} \in C^\infty(\partial M)$$

alors, si  $\rho$  appartient à  $WF_b u$ , il existe un rayon maximal dans  $BM$ , passant par  $\rho$  et entièrement contenu dans  $WF_b u$ .

Remarque 0.1.- Il résulte de (Pr 3) (cf. [17]) que si  $Pu$  est dans  $C^\infty(M)$ , la trace de  $u$  sur  $\partial M$  est bien définie.

Remarque 0.2.- On peut prendre dans le théorème 2 d'autres conditions que la condition de Dirichlet (cf. [2], [33], [36]).

Remarque 0.3.- L'étude de la propagation des singularités dans le cadre analytique est encore très incomplète. Le cas des rayons transversaux au bord est traité par P. Schapira dans [42]. Par contre, dans les cas où les rayons sont rasants, un seul exemple est traité dans [15]. Cet exemple montre que les phénomènes de propagation sont différents de ceux de la catégorie  $C^\infty$ .

Application 1.- Formule sommatoire de Poisson pour une variété à bord.

Le théorème 2 permet d'obtenir des informations sur le support singulier de la transformée de Fourier de la mesure spectrale associée au problème de Dirichlet pour le Laplacien dans une variété riemannienne compacte à bord (cf. l'exposé de Chazarain [6] (pour le cas d'une variété sans bord) et les travaux récents [2], [16]).

Application 2.- Conjecture de "Lax - Philipps" [23] [38] [35].

Dans le cas du problème mixte pour l'équation des ondes le théorème implique des résultats sur la décroissance de l'énergie dans un compact de l'espace lorsque le temps tend vers l'infini.

### § 1. Propagation des singularités à l'intérieur

Nous esquissons dans ce paragraphe plusieurs démonstrations du théorème 1 qui servent de point de départ pour les démonstrations du théorème 2 dans le cas rasant, glissant ou général. On supposera pour simplifier dans ce paragraphe que  $\overset{\circ}{M} = \Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

#### 1.1. Utilisation des transformations canoniques (cf. [20], [21])

Si  $p$  est une fonction dans  $C^\infty(\overset{\circ}{T}^*\overset{\circ}{M})$  homogène de degré 1 vérifiant (Pr 1), il existe "microlocalement" (i.e. localement dans  $\overset{\circ}{T}^*\overset{\circ}{M}$ ) une transformation canonique homogène  $\kappa$  (i.e. un difféomorphisme homogène qui respecte la 2-forme symplectique  $\sum_{j=1}^n dx^j \wedge d\xi_j$ ) d'un ouvert conique de  $\overset{\circ}{T}^*\overset{\circ}{M}$  dans  $\overset{\circ}{T}^*\mathbb{R}^n$  tel que :

$$p \circ \kappa^{-1} = \xi_1 \quad (\text{où } (x^1, \dots, x^n; \xi_1, \dots, \xi_n) \text{ désigne le point courant de } \overset{\circ}{T}^*\mathbb{R}^n).$$

On peut alors associer à  $\kappa$  des opérateurs Fourier-Intégraux  $A$  et  $B$  tels que, si  $P$  est un opérateur pseudodifférentiel de symbole principal  $p$ ,  $BPA$  soit un opérateur pseudodifférentiel dont le symbole complet est  $\xi_1$ . La démonstration du théorème 1 se ramène microlocalement à l'étude de l'opérateur  $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^1}$  dans  $\mathbb{R}^n$ , et

il est facile d'écrire la solution explicite de:  $\frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial x^1} = f$ .

Les singularités se propagent dans la direction des  $x^1$ , on a en effet :

$$H_p = H_{\xi_1} = + \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

Cette idée de se ramener à des modèles microlocaux simples sera reprise dans le cas "diffractif" et dans le cas "glissant" (cf. § 3).

#### 1.2. "Trouver un opérateur pseudodifférentiel qui commute avec $P$ " (cf. [19])

On suppose pour simplifier que :

- a)  $WF f = \emptyset$
- b)  $P$  est hyperbolique dans la direction des  $x^1$  (cf. [5]).

Comme souvent, on va démontrer le théorème 1 en démontrant la propagation de la régularité.

Soit  $\rho_0 = (x_0, \xi_0) \notin WF u$ ; cela signifie qu'il existe un opérateur pseudodifférentiel  $A$ , elliptique en  $\rho_0$  (i.e. de symbole principal non nul en  $\rho_0$ ) tel que  $Au$  est  $C^\infty$ . On va construire un opérateur pseudodifférentiel  $B$  qui a la même propriété que  $A$  mais sur le rayon passant par  $\rho_0$ . On cherche  $B$  tel que  $[B, P] (= BP - PB)$  soit un opérateur régularisant et tel que  $Bu$  soit  $C^\infty$  près

de  $x^1 = x^1_0$ . La première condition implique que, si  $b_0$  désigne le symbole principal de  $B$ , il doit vérifier l'équation :

$$(E) \quad H_p b_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \{p, b_0\} = 0 \quad (1) \quad .$$

En particulier,  $b_0$  est constant le long des courbes bicaractéristiques. On choisit une solution  $b_0$  de l'équation ci-dessus en se donnant une trace sur l'hypersurface  $x^1 = x^1_0$  (transverse à  $H_p$ ) à support compact et égale à 1 au voisinage de  $\rho_0$  sur cette hypersurface. On obtient que le symbole complet de  $[B, P]$  est nul en résolvant par récurrence une suite d'équations du type (E) (mais avec second membre), obtenues en regroupant les termes par homogénéité. On obtient ainsi que :

$$PBu = BPu + [P, B]u \in C^\infty.$$

La construction standard de la paramétrix pour un opérateur elliptique permet de montrer l'existence d'un opérateur pseudodifférentiel  $C$  tel que  $(B - CA)$  soit régularisant près de  $x^1 = x^1_0$  (en effet, si  $x^1$  est près de  $x^1_0$ , un choix convenable de la trace de  $b$  sur  $x^1 = x^1_0$ , permet d'obtenir que  $A$  est elliptique sur le support de  $b$ ).

Alors  $Bu = CAu + (B - CA)u$  est  $C^\infty$  près de  $x^1 = x^1_0$  et  $PBu$  est  $C^\infty$ .

Un résultat classique sur les opérateurs hyperboliques (cf. [5]) permet de conclure que  $Bu$  est  $C^\infty$  partout.  $B$  étant elliptique au voisinage du rayon passant par  $\rho_0$ , on en déduit que le front d'onde de  $u$  ne rencontre pas le rayon passant par  $\rho_0$ . C.Q.F.D.

Cette méthode est utilisée dans [2] pour étudier le cas "glissant".

### 1.3. Méthode des inégalités d'énergie [21] [38]

La méthode des inégalités d'énergie est implicitement utilisée dans la méthode précédente, puisqu'on utilise des résultats sur les opérateurs hyperboliques. Ici, on démontre le théorème 1 en étudiant la propagation de la régularité  $H^S$  ( $H^S$  désigne l'espace de Sobolev usuel construit à partir de  $L^2$  :

$$H^S(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{J}'(\mathbb{R}^n), (1 + |\xi|^2)^{S/2} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

On peut microlocaliser les espaces  $H^S$  de la manière suivante : on dira qu'une distribution  $u$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  est  $H^S$  au point  $\rho$  de  $T^*\Omega$  et on notera :

$\rho \notin WF_{(S)} u$ , si il existe un opérateur pseudodifférentiel  $A$  d'ordre 0, elliptique

---

(<sup>1</sup>) Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions  $C^\infty$  sur  $T^*\Omega$ , on définit le crochet de Poisson  $\{f, g\}$  par :  $\{f, g\} = H_f g$ .



au point  $p$ , tel que  $Au$  soit dans  $H^s(\Omega)$ . On suppose ici que  $P$  est d'ordre 1. Pour démontrer le théorème 1, on va montrer que si  $f$  est dans  $H^s$  le long d'un rayon  $\gamma(t)$  ( $t \in I = [t_1, t_2]$ ) et si  $u$  est dans  $H^s$  en  $\gamma(t_2)$ , alors  $u$  est dans  $H^s$  sur  $\gamma(t)$  pour  $t \in I$ . On peut toujours supposer que  $u$  est dans  $H^{s-1/2}$  sur  $\gamma(I)$ .

Rappelons (cf. par exemple [20] ou [21]) que l'on désigne par  $S^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  la classe des fonctions  $p \in C^\infty$  sur  $\Omega \times \mathbb{R}^n \setminus 0$  telles que:  $\forall K \subset\subset \Omega$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $\forall \beta \in \mathbb{N}^n$ ,  $\exists C_{\alpha, \beta}(K)$ ;  $\forall x \in K$

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta}(K) (1 + |\xi|)^{m - |\beta|}$$

$S^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  est un espace de Fréchet pour la famille de semi-normes :

$$p \longrightarrow p_{K, \alpha, \beta}(p) = \sup_{x \in K} \frac{|D_x^\alpha D_\xi^\beta p|}{(1 + |\xi|)^{m - |\beta|}}$$

Soit maintenant  $F \subset S^{-1}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  un ensemble borné de  $S^s(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  de fonctions réelles à support dans un voisinage fermé conique  $\Gamma$  de  $\gamma(I)$ .

Soit  $c$  dans  $F$  et notons  $C = c(x, D)$  l'opérateur pseudodifférentiel de symbole  $c$ . On considère :

$$\text{Im}(Cf, Cu) = \text{Im}(CPu, Cu).$$

Quelques lignes de calcul permettent d'obtenir l'inégalité :

$$\text{Im}(Cf, Cu) \geq \text{Re}(\{p, c^2\}(x, D)u, u) - C_1 \|Cu\|_L^2 - C_2,$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes indépendantes de  $C$  dans  $F$ .

Posant  $e(x, \xi) = \{p, c^2\}(x, \xi) - (2C_1 + 1)c(x, \xi)^2$ , on obtient aisément :

$$\text{Re}(e(x, D)u, u) \leq \|Cf\|_L^2 + C_2,$$

où  $C_2$  est indépendant de  $C$  dans  $F$ .

Soit  $\Gamma_0$  un voisinage ouvert conique de  $\gamma(t_2)$  tel que  $u$  est de classe  $H^s$  dans  $\Gamma_0$ , et choisissons une fonction  $C^\infty c$  non négative homogène de degré  $s$  à support dans  $\Gamma$  telle que :

$$\{p, c^2\} \geq 0,$$

dans  $\Gamma \setminus \Gamma_0$ , avec inégalité stricte dans  $\gamma(I) \setminus \Gamma_0$ .

Choisissons également des symboles  $a_0$  et  $a_1$  homogènes de degré 0 (resp. 1) tels que :

$$H_p a_0 = 1 \quad ; \quad H_p a_1 = 0 \quad \text{et } a_1 \text{ non nul sur le support de } c.$$

On prendra pour  $F$  l'ensemble des fonctions :

$$c_{\lambda, \varepsilon} = c e^{\frac{\lambda a}{2}} (1 + \varepsilon^2 a_1^2)^{-1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

où  $\lambda$  est fixé assez grand.

Si  $c$  est remplacé par  $c_{\lambda, \varepsilon}$  la fonction  $e$  devient :

$$e_{\lambda, \varepsilon} = (\{p, c^2\} + (2\lambda - 2C_1 - 1)c^2) e^{\frac{2\lambda a}{2}} (1 + \varepsilon^2 a_1^2)^{-1}.$$

Comme  $e_{\lambda, \varepsilon}$  est non négative en dehors de  $\Gamma_0$  et strictement positive sur  $\gamma(I) \setminus \Gamma_0$ , nous pouvons choisir une fonction  $r$ , homogène de degré  $s$ , non négative, positive strictement sur  $\gamma(I)$ , et une fonction  $q$  homogène de degré  $s$  à support dans  $\Gamma_0$  et vérifiant :  $q(x, D)u$  dans  $L^2$ , telles que :

$$r^2 \leq (\{p, c^2\} + (2\lambda - C_1 - 1)c^2) e^{\frac{2\lambda a}{2}} + q^2.$$

Soient :  $r_\varepsilon = r (1 + \varepsilon^2 a_1^2)^{-1/2}$ ,  $q_\varepsilon = q (1 + \varepsilon^2 a_1^2)^{-1/2}$ .

On obtient en utilisant l'inégalité classique de Gårding que :

$$\|r_\varepsilon(x, D)u\|_0^2 \leq \operatorname{Re} (e_{\lambda, \varepsilon}(x, D)u, u) + \|q_\varepsilon(x, D)u\|_0^2 + C_3.$$

Chacun des termes du membre de droite est borné, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, indépendamment de  $\varepsilon$ . On en déduit, en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, que  $r(x, D)u$  est dans  $L^2$ , et par conséquent que  $u$  est dans  $H^s$  le long de  $\gamma(I)$  (car  $r$  est elliptique sur  $\gamma(I)$ ). (C.Q.F.D.)

C'est cette méthode qui sera utilisée pour démontrer une grande partie du théorème 2.

## § 2. Quelques définitions. Classification des points du bord

### 2.1. Définition du front d'onde au bord

Beaucoup de définitions ont été proposées. Nous prendrons ici celle utilisée dans [8], [2], [33]. Une définition plus sophistiquée est proposée dans [34] ou [36] mais nécessite l'introduction d'une nouvelle classe d'opérateurs pseudodifférentiels au bord (différente de celle de [3]) que nous ne présentons pas ici.

On considère une variété  $C^\infty$  à bord  $M$  de dimension  $(n+1)$  et on choisit au voisinage d'un point  $m$  de  $\partial M$  un système de coordonnées  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  de sorte que  $m$  est le point  $(0, 0)$  et que  $M$  est définie localement par :  $x \geq 0$ . Les coordonnées duales dans  $T^*M$  sont données par  $(\xi, \eta)$  de sorte que  $y$  et  $(y, \eta)$  forment un système de coordonnées naturelles dans  $\partial M$  et  $T^*\partial M$ .

Considérons un point  $\sigma$  de  $T_m^* \partial M$ , alors  $u$  est dit  $C^\infty$  jusqu'au bord

en  $\sigma$  dans les coordonnées  $(x, y)$ , s'il existe un opérateur pseudodifférentiel  $A$  dans  $\text{OPS}^0(\mathbb{R}^n)$ , à support compact (i. e. son noyau distribution est à support compact), elliptique en  $\sigma$ , tel que :

$$A(y, D_y)u(x, y) \Big|_{0 \leq x \leq \varepsilon} \in C^\infty([0, \varepsilon] \times \mathbb{R}_y^n) .$$

Cette définition reste très liée à un choix de coordonnées. Cependant, lorsqu'on ne considère que des distributions prolongeables  $u$  qui vérifient :  $Pu \in C^\infty(M)$ , avec  $P$  satisfaisant à (Pr 3), on peut montrer que cette notion est indépendante du choix de coordonnées et de l'opérateur  $A$ .

On pose alors la définition suivante :

DÉFINITION.- Soit  $u$  dans  $\mathcal{D}'(M)$  telle que  $Pu$  soit dans  $C^\infty(M)$ , où  $P$  est non caractéristique sur  $\partial M$  (condition Pr 3), alors on définit le front d'onde au bord de  $u$   $\text{WF}_b(u)$  dans  $\text{BM} = \dot{T}^*M \cup \dot{T}^*\partial M$  par :

$$\text{Si } p \in \dot{T}^*\dot{M}, \quad p \in \text{WF}_b u \iff p \in \text{WF}(u|_{\dot{M}}) .$$

$$\text{Si } p \in \dot{T}^*\partial M, \quad p \notin \text{WF}_b u \iff u \text{ est } C^\infty \text{ jusqu'au bord au sens ci-dessus.}$$

## 2.2. Classification des points du bord

Si  $b$  désigne la projection de  $\dot{T}^*M$  sur  $\text{BM}$ , on désigne par  $\Sigma_b$  l'image de  $\Sigma(p)$  par  $b$ .  $p$  est ici le symbole d'un opérateur différentiel du second ordre de type principal réel jusqu'au bord.

$$\begin{aligned} \text{On pose : } \Sigma_b^0 &= \Sigma_b \cap \dot{T}^*\dot{M} \\ \Sigma_b^1 &= \{p \in \Sigma_b, b^{-1}(p) \text{ contient deux points}\} . \end{aligned}$$

Dans un système de coordonnées convenables, on peut supposer que  $M$  est définie dans  $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y^n$  par  $x \geq 0$  et que :  $p = \xi^2 + r(x, y, \eta)$  où  $r$  vérifie la condition :  $dr$  et  $\sum_{j=1}^n \eta_j dy^j$  sont linéairement indépendants. On voit alors facilement que :

$$\Sigma_b^1 = \{(y, \eta) \in \dot{T}^*\mathbb{R}^n ; r(0, y, \eta) < 0\}$$

$$\text{et que : } \Sigma_b \setminus (\Sigma_b^0 \cup \Sigma_b^1) \stackrel{\text{déf}}{=} G = \{(y, \eta) \in \dot{T}^*\mathbb{R}^n ; r(0, y, \eta) = 0\} ,$$

$G$  est appelé l'ensemble des points glancing.

Pour  $k \geq 2$ , on pose :

$$\Sigma_b^k = \{p \in G ; H_p^j x = 0, j \leq k-1 ; H_p^k x \neq 0 \text{ en } b^{-1}(p)\}$$

où  $x$  est une fonction telle que  $M$  est définie par  $x \geq 0$  et telle que  $dx$  est

non nulle en tout point de  $\partial M$ .

Enfin, on pose :  $\Sigma_b^\infty = \{\rho \in G ; H_p^j x = 0 \text{ pour tout } j \text{ en } b^{-1}(\rho)\}$

et  $\Sigma_b^{(k)} = \bigcup_{j=k}^{\infty} \Sigma_b^j$ .

### 2.3. Etude de $\Sigma_b^2$ , théorème d'équivalence des hypersurfaces glancing

Si  $\rho$  est dans  $\Sigma_b^2$ ,  $b^{-1}(\rho)$  consiste en un point  $\mu$ , on définit :

$$\Sigma_b^{2,\pm} = \{\rho \in \Sigma_b^2 ; H_p^2 x \lesseqgtr 0 \text{ en } \mu\}.$$

Si  $\rho$  est dans  $\Sigma_b^{2,+}$ , alors la courbe intégrale de  $H_p$  passant par  $\mu$  quitte  $\dot{T}^*M$  pour  $t$  non nul. On est dans le cas "glissant".

Si  $\rho$  est dans  $\Sigma_b^{2,-}$ , alors la courbe intégrale de  $H_p$  passant par  $\mu$  rentre dans  $\dot{T}^*M$  pour  $t$  non nul. On est dans le cas "rasant" ou "diffractif".

L'étude de  $\Sigma_b^2$  a conduit R. B. Melrose [30] à résoudre un joli problème de géométrie symplectique. La motivation est la suivante : comme au paragraphe (1.1), on cherche à simplifier le problème en trouvant une transformation canonique homogène  $\kappa$  telle que  $p \circ \kappa^{-1}$  ait une allure sympathique. Mais ici, on doit de plus "conserver" le bord de  $M$ .

Théorème d'équivalence des hypersurfaces glancing. Soient  $\rho$  dans  $\dot{T}^*\mathbb{R}^{n+1}$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions  $C^\infty$  dans  $\dot{T}^*\mathbb{R}^{n+1}$  homogènes respectivement d'ordre 0 et 2 vérifiant :  $df, dg$  et  $\sum_{j=1}^{n+1} \xi_j dx_j$  linéairement indépendants en  $\rho$

$$f(\rho) = g(\rho) = \{f, g\}(\rho) = 0$$

$$\{f, \{f, g\}\}(\rho) \neq 0, \quad \{g, \{g, f\}\}(\rho) \neq 0,$$

alors il existe une transformation canonique homogène  $\kappa$  et des symboles elliptiques

$a_1$  et  $a_2$  tels que :

$$\begin{aligned} a_1 \cdot (f \circ \kappa^{-1}) &= x \\ a_2 \cdot (g \circ \kappa^{-1}) &= \xi^2 + x\eta_n^2 + \eta_1\eta_n, \end{aligned}$$

où  $\kappa(\rho) = (x, y, \xi, \eta)$  est le point ( $x = \xi = 0 ; \eta_1 = \dots = \eta_{n-1} = 0, \eta_n = 1, y^1 = \dots = y^n = 0$ ).

Tous les couples d'hypersurfaces glancing non dégénérées (i.e. dans  $\Sigma_b^2$ ) sont équivalents et la forme normale ne dépend que de la dimension. Le théorème est faux dans la catégorie analytique [40] et il n'y a pas de théorème équivalent dans  $\Sigma_b^{(3)}$  (cf. [30]).

En fait le théorème ci-dessus est suffisant dans la démarche adoptée dans [2], mais il reste insuffisant lorsqu'on veut construire des paramétrixes.

Dans [32] et [36], R. B. Melrose propose une définition plus restrictive de transformation canonique pour une variété à bord et une théorie des Fourier-Intégraux associés à ces transformations canoniques.

Il montre alors qu'en un point du bord, on peut microlocalement se ramener par une transformation canonique aux modèles suivants au voisinage du point  $(y^1 = \dots = y^n = 0, \eta_1 = \dots = \eta_{n-1} = 0, \eta_n = 1)$  de  $\dot{T}^*\mathbb{R}^n$ .

En dehors de  $\Sigma_b$  :  $D_x^2 + D_{y_n}^2$  (cas elliptique cf. [3][17][18])

En un point de  $\Sigma_b^1$  : (Figure 2)  $D_x^2 - D_{y_n}^2$  (cas hyperbolique cf. [5][39][43])

En un point de  $\Sigma_b^{2,-}$  : (Figure 3)  $D_x^2 - xD_{y_n}^2 + D_{y_1} D_{y_n}$  (cas rasant cf. [14][29][12][44])

En un point de  $\Sigma_b^{2,+}$  : (Figure 4)  $D_x^2 + xD_{y_n}^2 + D_{y_1} D_{y_n}$  (cas glissant cf. [2] [12])

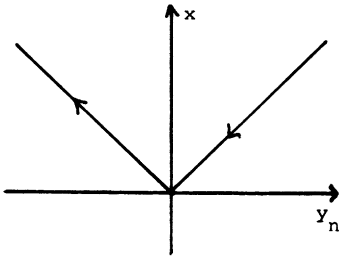


Figure 2 - Projection des bicaractéristiques dans  $\mathbb{R}^2$

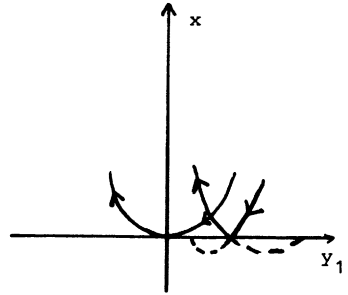


Figure 3

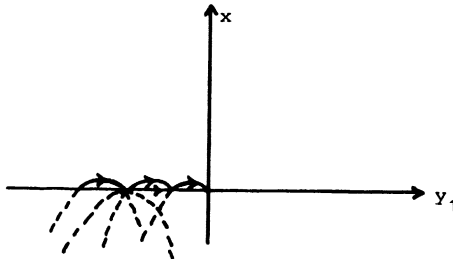


Figure 4 (c'est la figure 3 regardée dans les  $x$  négatifs !)

#### 2.4. Le rayon brisé

On pose maintenant la définition du rayon dans le cas général (dans les coordonnées choisies au § 2.2).

Définition locale. - Soient  $\rho_o$  un point de  $BM$  et  $\Gamma_o$  un voisinage de ce point dans  $BM$ . Un rayon (ou courbe bicaractéristique généralisée) est une courbe (continue) d'un intervalle  $I$  dans  $\Gamma$  telle que :

(1) Si  $\gamma(t_o) \in \Sigma_b^o$ ,  $t_o \in I$ , alors  $\gamma(t)$  est différentiable en  $t_o$  et :

$$\gamma'(t_o) = H_p(\gamma(t_o)) .$$

(2) Si  $\gamma(t_o) \in \Sigma_b^1 \cup \Sigma_b^{2,-}$ , alors  $\gamma(t)$  appartient à  $\Sigma_b^o$  pour  $t$  différent de  $t_o$  et  $|t - t_o|$  assez petit.

(3) Si  $\gamma(t_o) \in \Sigma_b^{2,+} \cup \Sigma_b^{(3)}$ , on pose  $\gamma(t) = (x(t), y(t), \xi(t), \eta(t))$ , alors

$(x(t), y(t), \eta(t))$  est différentiable au point  $t = t_o$  et sa dérivée est

$(0, H_{r_o}(\gamma(t_o), \eta(t_o)))$  où  $r_o(y, \eta) = r(0, y, \eta)$ . Bien entendu,  $\xi(t)$  n'est défini qu'au signe près lorsque  $x(t) = 0$ .

Remarque 1. - Lorsqu'on ne rencontre pas  $\Sigma_b^\infty$ , le rayon passant par un point est bien déterminé. C'est faux en général (cf. un exemple de M. Taylor [44]).

Remarque 2. - Dans les cas (1) et (2), on retrouve les notions usuelles de rayon, rayon réfléchi comme dessiné au § 2.3.

Remarque 3. - Si  $\Sigma_b^{(3)} = \emptyset$ , et si  $\gamma(t_o) \in \Sigma_b^{2,+}$ , alors tout le rayon reste dans  $T^*\partial M \setminus 0$  et est une courbe intégrale de  $H_{r_o}$ .

#### § 3. Construction de paramétrixes au voisinage d'un point de $\Sigma_b^{2,-}$

On admet (cf. § 2.3) que l'on peut se ramener à l'étude du modèle :

$$P = D_x^2 - x D_{y_n}^2 + D_{y_1} D_{y_n} ,$$

au voisinage du point  $\rho_o$  de coordonnées  $(x = y = 0, \eta_1 = \dots = \eta_{n-1} = 0, \eta_n = +1, \xi = 0)$  dans  $T^*\mathbb{R}^{n+1}$ .

Ce modèle est très proche de l'exemple de F. G. Friedlander [14]. On cherche à construire directement des solutions du problème :

$$(3.1) \quad D_x^2 u - x D_{y_n}^2 u + D_{y_1} D_{y_n} u = 0 \quad u|_{x=0} \equiv u_0 \quad (\text{modulo } C^\infty),$$

où  $u_0$  est une distribution à support compact dans  $R_y^n$  dont le front d'onde est près de  $(y = 0, \eta_1 = \dots = \eta_{n-1} = 0, \eta_n = 1)$ . En faisant la transformée de Fourier partielle en  $y$ , (3.1) devient :

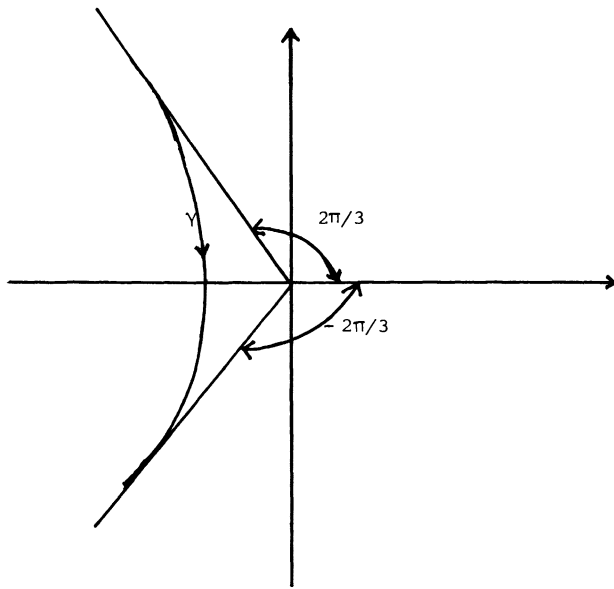
$$(3.2) \quad D_x^2 \hat{u}(x, \eta) = (x\eta_n^2 - \eta_1 \eta_n) \hat{u}.$$

Posant  $\zeta = -(x\eta_n^2 - \eta_1 \eta_n) \eta_n^{-4/3}$ , (3.2) devient :

$$(3.3) \quad \left( \frac{d^2}{d\zeta^2} - \zeta \right) v(\zeta) = 0 \quad \text{avec } v(\zeta) = \hat{u}(x, \eta).$$

On reconnaît l'équation d'Airy. Les fonctions d'Airy sont entières et peuvent être obtenues à partir de l'une d'entre elles :

$$Ai(z) = \int_{\gamma} \exp(zs - s^3/3) ds.$$



(Figure 5)

Les bicaractéristiques de  $P$  sont dessinées en projection au § 2.3. En prenant

$A_{\pm}(z) = Ai(e^{\pm 2\pi i/3} z)$ , on obtient que :

$$\hat{u}_{\pm}(x, \eta) = \hat{u}_0(\eta) \chi(\eta) \frac{A_{\pm}(\zeta(x, \eta))}{A_{\pm}(\zeta(0, \eta))}$$

(où  $\chi$  est une fonction de troncature qui localise) fournit deux solutions approchées "indépendantes", par transformation de Fourier inverse, du problème (3.1).

Utilisant le comportement asymptotique de la fonction d'Airy dans les différents secteurs du plan complexe, on constate que la solution  $u_+$  (resp.  $u_-$ ) a son front d'onde dans  $y^1 > -C$  pour  $C$  (assez grand) (resp.  $y^1 < +C$ ).

On peut alors utiliser ces deux solutions pour démontrer le théorème 2.

Remarque 3.1 (cf. [15]).- L'étude de l'opérateur  $B^\pm$ , qui associe à  $u_0$  la distribution  $B^\pm u_0 = \frac{\partial}{\partial x} u^\pm \Big|_{x=0}$  où  $u^\pm$  est une solution de (3.1), donne des informations intéressantes.

$B^\pm$  est un opérateur pseudodifférentiel non classique (et même un opérateur de convolution) de symbole :

$$-\chi(\eta) \frac{A_\pm'(\zeta(0, \eta))}{A_\pm(\zeta(0, \eta))} \zeta_x'(0, \eta).$$

En particulier  $WF B^\pm u_0 \subset WF u_0$ .

Par contre,  $B^\pm$  propage l'analyticité dans la direction des  $y^1$ . Il est possible, à l'aide des propriétés de  $B^\pm$  et du théorème 1, de réobtenir le théorème 2.

Remarque 3.2.- L'approche suivie ici permet de démontrer des résultats locaux ; pour aborder des problèmes globaux, R. B. Melrose construit dans [28] et [31] une classe définie globalement d'opérateurs Fourier-Intégraux d'Airy dans laquelle on peut construire des paramétrixes de  $P$ .

Remarque 3.3.- On ne connaît "essentiellement" qu'une démonstration du cas rasant, mais la technique utilisée semble difficilement se généraliser aux autres cas.

Remarque 3.4.- On peut suivre une démarche analogue à celle décrite dans ce paragraphe dans le cas "glissant" (cf. [13]).

#### § 4. Démonstration du théorème de R. B. Melrose - J. Sjöstrand (esquisse)

On travaille dans un voisinage de  $\rho_0$  dans  $\Sigma_b$ . Pour  $\rho_1 = (y_1, \eta_1)$  dans  $G$ , on pose :

$$B(\rho_1, \sigma) = \{(x, \xi, y, \eta) \in \Sigma_b ; 0 \leq x \leq \sigma, |(y, \eta) - (y_1, \eta_1)| \leq \sigma\}.$$

On va d'abord définir une relation  $D_\varepsilon : \Sigma_b \rightarrow \Sigma_b$ .

DÉFINITION 4.1.- Pour  $\rho$  dans  $\Sigma_b$  dans un voisinage de  $\rho_0$  et  $0 < \varepsilon < T$  (avec  $T$  assez petit), soit  $[0, \delta] \ni t \rightarrow \gamma(t)$  le rayon maximal qui vérifie

$$\delta \leq \varepsilon, \gamma(0) = \rho, \gamma(t) \in \Sigma_b^0 \cup \Sigma_b^1 \cup \Sigma_b^{2,-}, \quad 0 \leq t < \delta.$$



Si  $\delta = \varepsilon$ , on pose  $D_\varepsilon \rho = \{\gamma(\varepsilon)\}$  et si  $\delta < \varepsilon$ , on pose

$$D_\varepsilon \rho = B(\exp((\varepsilon - \delta)H_{X_0}(\gamma(\delta))), A_0^2(\varepsilon - \delta)^2)$$

où  $A_0$  est une constante convenable (déterminée au cours de la démonstration).

On peut montrer les points suivants :

1) Si  $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow \Sigma_b$  est un rayon, alors  $\gamma(\varepsilon)$  appartient à  $D_\varepsilon \gamma(0)$ .

2)  $D_{\varepsilon_1} \circ D_{\varepsilon_2} \subset D_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$  et, pour tout compact  $K$ ,  $D_\varepsilon(K)$  est compact.

Pour  $0 < t \leq T$ , on pose  $C_t^N = (D_{2^{-N}t})^{2^N}$ . Les  $C_t^N$  forment alors une suite décroissante et la limite  $C_t$  possède la propriété :  $C_t \rho \neq \emptyset$  pour tout  $\rho$  dans  $\Sigma_b$  (avec  $\rho$  suffisamment voisin de  $\rho_0$ ). Plus précisément, on obtient :

$$C_t \rho = \{\gamma(t) ; \gamma : [0, t] \rightarrow \Sigma_b \text{ est un rayon tel que } \gamma(0) = \rho\}.$$

En particulier, il existe, pour tout  $\rho$  dans  $\Sigma_b$  donné et  $\varepsilon$  assez petit, un rayon non trivial  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \Sigma_b$  tel que  $\gamma(0) = \rho$ .

Sous les hypothèses du théorème 2, on a la proposition suivante :

**PROPOSITION 4.2.-** Si  $\rho \in WF_b u$ , alors  $D_\varepsilon \rho \cap WF_b u \neq \emptyset$  pour  $0 < \varepsilon \leq T$ .

Démonstration. Soit  $\delta \leq \varepsilon$  comme dans la définition 4.1. Si  $\rho$  est dans  $WF_b u$ , on sait alors que  $\gamma(\delta)$  est dans  $WF_b u$ . Il suffit en effet d'utiliser le théorème 1 dans  $\Sigma_b^0$ , les résultats exposés dans [5] dans  $\Sigma_b^1$ , et dans  $\Sigma_b^{2,-}$ , les résultats brièvement démontrés au § 3.

Pour démontrer la proposition, on applique le théorème suivant :

**THÉORÈME 4.3.-** Sous les hypothèses du théorème 2, si  $\rho'$  est dans  $WF_b u \cap G$ , alors pour tout  $\varepsilon'$ ,  $0 < \varepsilon' \leq T$ , on a :

$$B(\exp \varepsilon' H_{X_0}(\rho'), A_0^2 \varepsilon'^2) \cap WF_b u \neq \emptyset.$$

Avant de commenter la démonstration de ce théorème, montrons comment on déduit le théorème 2 de la proposition. Il suffit de trouver un rayon

$\gamma : [0, T] \rightarrow \Sigma_b \cap WF_b u$  avec  $T > 0$  assez petit et  $\gamma(0) = \rho$ . Soit  $\varepsilon_N = 2^{-N}T$ ;

à l'aide de la proposition 4.2, on choisit des points  $\rho_{0,N}, \dots, \rho_{2^N,N}$  avec

$\rho_{0,N} = \rho$ ,  $\rho_{k+1,N} \in D_{\varepsilon_N} \rho_{k,N} \cap WF_b u$ . En faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$  et en

prenant une suite extraite convenable, on peut obtenir le rayon voulu à la limite.

Commentaire sur la démonstration du théorème 4.3

On est dans des coordonnées locales telles que :  $P = D_x^2 + R(x, y, D_y)$ . La démonstration suit la démonstration du cas sans bord (§ 1.3) avec un certain nombre d'astuces supplémentaires :

a) On choisit  $F$  dans la classe des opérateurs pseudodifférentiels de la forme  $c(x, y, D_y)$ , indépendants de  $x$  pour  $x$  assez petit.

b) On utilise l'identité (avec  $Q = c^*(x, y, D_y)c(x, y, D_y)$ ) :

$$2 \operatorname{Im}(Qu, Pu) = \frac{1}{i} ([P, Q] + (R^* - R)Q)u, u \Big|_L^2,$$

qui est vraie si :  $Pu \in C^\infty(M)$ ,  $u \Big|_{\partial M} = 0$ .

c) Les symboles  $c$  sont construits avec un support parabolique de longueur  $\epsilon$  dans la direction de  $H_{r_0}$  et de largeur  $A_0^2 \epsilon^2$  dans les autres directions.

d) En gros, on applique la technique exposée au § 1.3 à l'opérateur  $R(x, y, D_y)$  et un choix astucieux du support de  $c$  permet d'absorber le terme  $\frac{1}{i} ([D_x^2, Q]u, u)$ .

## BIBLIOGRAPHIE

Outre l'exposé [5] déjà mentionné, on pourra consulter sur le sujet les surveys de R. B. Melrose [32] et de M. Taylor [45].

- [1] K. G. ANDERSSON - Analytic wave front sets for solutions of linear differential equations of principal type, Trans. Amer. Math. Soc., 177(1973), p. 1-27.
- [2] K. G. ANDERSSON and R. B. MELROSE - The propagation of singularities along gliding Rays, Inventiones Math., 41 (1977), p. 197-232 ; et exposé n° 1, Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1976/77, Ecole Polytechnique.
- [3] L. BOUTET DE MONVEL - Boundary problems for pseudo-differential operators, Acta Math., 126 (1971), p. 11-51.
- [4] J. CHAZARAIN - Construction de la paramétrix du problème mixte pour l'équation des ondes, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 276 (1973), p. 1212-1215.
- [5] J. CHAZARAIN - Le problème mixte, Séminaire Bourbaki, Exposé 432, juin 1973, Lecture Notes in Math. n° 383, p. 265-285, Springer-Verlag, 1974.
- [6] J. CHAZARAIN - Spectre des opérateurs elliptiques et flots hamiltoniens, Séminaire Bourbaki, Exposé 460, Février 1975, Lecture Notes in Math. n° 514, p. 111-123, Springer-Verlag, 1976.
- [7] J. CHAZARAIN - Paramétrix du problème mixte pour l'équation des ondes à l'intérieur d'un domaine convexe pour les bicaractéristiques, Astérisque n° 34/35, (1976), p. 165-182.
- [8] J. CHAZARAIN - Reflection of singularities for a class of operators with multiple characteristics, Publ. R. I. M. S. Kyoto Univ., (1976).
- [9] J. J. DUISTERMAAT - Fourier Integral operators, Courant Institute Lecture Notes, New York, (1973).
- [10] J. J. DUISTERMAAT - Oscillatory integrals, Lagrange immersions and Unfolding of singularities, Comm. Pure Appl. Math., 27 (1974), p. 135-142.
- [11] J. J. DUISTERMAAT and L. HÖRMANDER - Fourier integral operators II, Acta Math., 128 (1972), p. 183-259.
- [12] G. ESKIN - A parametrix for mixed problems for strictly hyperbolic of arbitrary order, Comm. in p. d. e., vol. 1, n° 6 (1976).
- [13] G. ESKIN - A parametrix for interior mixed problems for strictly hyperbolic equations, Journal d'Analyse Mathématique de Jérusalem, vol. 32 (1977), p. 17-61, ou Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1976/77, exposé 12, Ecole Polytechnique.
- [14] F. G. FRIEDLANDER - The Wave front set of the solution of a simple initial boundary value problem with glancing rays, Proc. Cambridge Philo. Soc., 79(1976), p. 145-159.

- [15] F. G. FRIEDLANDER and R. B. MELROSE - The wave front set of the solution of a simple initial boundary value problem with glancing rays II, Proc. Cambridge Philos. Soc., 79 (1977), p. 97-120.
- [16] GUILLEMIN - R. B. MELROSE - The Poisson summation formula for manifolds with boundary, Preprint.
- [17] L. HÖRMANDER - Linear partial differential equations, Springer-Verlag, Berlin, 1963.
- [18] L. HÖRMANDER - Pseudodifferential operators and non-elliptic boundary value problems, Ann. of Math., 83 (1966), p. 129-209.
- [19] L. HÖRMANDER - Linear Differential Operators, Actes du Congrès International, 1970, tome 1, p. 121-133.
- [20] L. HÖRMANDER - Fourier integral operators I, Acta Math., 127 (1971), p. 79-183.
- [21] L. HÖRMANDER - On the existence and regularity of solutions of linear pseudo-differential equations, Enseignement Math., 17 (1971), p. 99-163.
- [22] Ja. V. IVRII - Non classical distribution of singularities of the wave equation solution near the boundary, Doklady Acad. Nauk CCCP, tome 241 (1978), n° 5, p. 1013-1016.
- [23] P. D. LAX and R. PHILIPPS - Scattering theory, Acad. Press New York, 1967.
- [24] D. LUDWIG - Uniform asymptotic expansions at a caustic, Comm. Pure Appl. Math., vol. 19 (1966), p. 215-250.
- [25] D. LUDWIG - Uniform asymptotic expansions of the field scattered by a convex object at high frequencies, Comm. Pure Appl. Math., vol. 19 (1967), p. 103-138.
- [26] A. MAJDA and S. OSHER - Reflection of singularities at the boundary, Comm. Pure Appl. Math., vol. 28 (1975), p. 479-499.
- [27] A. MELIN and J. SJÖSTRAND - A calculus for F. I. O. in domains with boundary and applications to the oblique derivative problem, Comm. in P. D. E., 2 (1977), p. 857-935.
- [28] R. B. MELROSE - Local Fourier - Airy integral operators, Duke Math. Journal, vol. 42, n° 4, (1975), p. 583-604.
- [29] R. B. MELROSE - Microlocal parametrices for diffractive boundary value problems, Duke Math. Journal, vol. 42 (1975), p. 605-635.
- [30] R. B. MELROSE - Equivalence of glancing hypersurfaces (I) and (II), Inventiones Math., 37 (1976), p. 165-191, et à paraître.
- [31] R. B. MELROSE - Airy Operators, Comm. in P. D. E., 3(1) (1978), p. 1-76.
- [32] R. B. MELROSE - Differential boundary value problems of principal type, Séminaire à Princeton (1977).

- [33] R. B. MELROSE and J. SJÖSTRAND - Singularities of boundary value problems, I and II : Comm. Pure Appl. Math., vol. XXXI, n° 5, (1978), p. 593-619 ; et en préparation (et Sémin. Goulaouic-Schwartz, 77-78, Exposé n° 15).
- [34] R. B. MELROSE - Singularities of solutions to boundary value problems, Actes du Congrès International des Math. d'Helsinki (1978).
- [35] R. B. MELROSE - Singularities and energy decay in acoustical scattering, à paraître.
- [36] R. B. MELROSE - Transformation of boundary problems, en préparation.
- [37] C. MORAWETZ and D. LUDWIG - The generalized Huygens' principle for reflecting bodies, Comm. Pure Appl. Math., 22 (1969), p. 189-205.
- [38] MORAWETZ - RALSTON - STRAUSS - Decay of solutions of the wave equation outside non-trapping obstacles, Comm. Pure Appl. Math., 30 (1977), p. 447-508.
- [39] L. NIRENBERG - Lectures on linear partial differential equations, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., n° 17, Amer. Math. Soc., Providence R.I., (1973).
- [40] T. OSHIMA - On Analytic Equivalence of Glancing Hypersurfaces, Sci. Papers of the Coll. of General Education, University of Tokyo, vol. 28, n° 1 (1978), p. 51-57.
- [41] A. POVZNER and J. SUKHAREVSKII - Discontinuities of the Green's function of a mixed problem for the wave equation, Mat. Sb., 51 (1960), p. 326 ; Amer. Math. Soc. Transl., (2) 47 (1965), p. 131-156.
- [42] P. SCHAPIRA - Propagation au bord et réflexion des singularités analytiques des solutions des équations aux dérivées partielles, Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1975/76, Exposé n° 6 } Ecole Polytechnique.  
Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1976/77, Exposé n° 9 }
- [43] M. E. TAYLOR - Reflection of singularities of solutions to systems of differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 28 (1975), p. 457-478.
- [44] M. E. TAYLOR - Grazing rays and reflection of singularities of solutions to wave equations I, II, III, Comm. Pure Appl. Math., 29 (1976), p. 1-38 ; p. 463-481 ; et à paraître.
- [45] M. E. TAYLOR - Propagation, reflection, and diffraction of singularities of solutions to wave equations, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 84, n° 4, Juillet 1978.
- [46] M. E. TAYLOR - Rayleigh waves in linear elasticity as a propagation of singularities phenomenon : Park City Conf. in P. D. E. and Geometry, (1977), à paraître.