SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-CLAUDE FOURNIER

# Le théorème du coloriage des cartes (ex-conjecture de Heawood et conjecture des quatre couleurs)

*Séminaire N. Bourbaki*, 1979, exp. nº 509, p. 41-64

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1977-1978__20__41_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
30e année, 1977/78, n° 509



Novembre 1977

# LE THÉORÈME DU COLORIAGE DES CARTES

[ex-conjecture de Heawood et conjecture des quatre couleurs]

par Jean-Claude FOURNIER

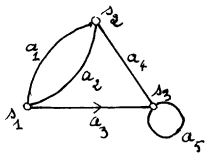
Le problème du coloriage des cartes sur les surfaces fermées comprend la conjecture des quatre couleurs et la conjecture de Heawood. Si la première est bien un problème de coloration, la seconde est dans sa partie difficile uniquement un problème de représentation de graphes dans les surfaces (§ 2). C'est pourquoi nous faisons d'abord une brève mise au point de cette question (§ 1). La solution de la conjecture de Heawood est l'essentiel de ce qui vient ensuite (§ 3 pour la démonstration selon Ringel et Youngs, § 4 pour le principe des constructions que nous dégageons en toute généralité dans une mise au point originale). Après quelques mots sur une solution récente annoncée par Appel et Haken du problème des quatre couleurs (§ 5) nous montrons en conclusion comment la conjecture de Hadwiger propose d'une certaine manière un prolongement au problème du coloriage des cartes (§ 6).

## 1. Préliminaires

(1.1) Nous avons besoin de redéfinir ici les graphes par un formalisme qui tout en restant intuitif soit assez précis pour permettre par exemple de parler d'arêtes multiples et de boucles orientées. Nous définissons donc avec les arêtes d'un graphe les arêtes orientées.

Un graphe est défini par un ensemble $S$ d'éléments appelés sommets, un ensemble $A$ d'éléments appelés arêtes, un ensemble $B$ d'éléments appelés arcs (ou arêtes orientées), une application $e$ de $B$ dans $S$ et une application surjective $f$ de $B$ dans $A$ telle que les $f^{-1}(a)$ pour $a$ décrivant $A$ forment une partition de $B$ en classes à deux éléments. On note un tel graphe $G = (S,A,B)$ . Etant donné $a \in A$ les éléments $b' \in B$ et $b'' \in B$ tels que $f^{-1}(a) = \{b',b''\}$ sont les deux arcs associés à l'arête $a$ et si $b$ désigne l'un d'eux on notera $b^-$ l'autre (l'arc opposé) ; les sommets $e(b')$ et $e(b'')$ sont les deux extrémités de l'arête $a$ , qui peuvent être confondues et dans ce cas l'arête est une boucle. Etant donné $b \in B$ , le sommet $e(b)$ est l'extrémité initiale et $e(b^-)$ l'extrémité terminale de l'arc $b$ .

Dans le graphe représenté ci-contre suivant l'usage par des points et des traits, l'arête $a_5$ est une boucle, les arêtes $a_1$ et $a_2$ forment ce qu'on appelle une arête multiple (en l'occurrence double) ; un arc associé à l'arête $a_3$ est indiqué par une flèche.




Dans le cas d'un graphe sans boucles et sans arêtes multiples chaque arête s'identifie à la paire de ses extrémités et les deux arcs associés peuvent être identifiés aux deux couples associés à cette paire. On peut donc définir un tel graphe simplement par un ensemble $S$ et une partie $A$ de $\mathfrak{P}(S)$ formée d'ensembles à deux éléments, $B$ étant alors l'ensemble des couples associés.

On appelle sous-graphe d'un graphe $G = (S,A,B)$ un triplet $G' = (S',A',B')$ où $S' \subset S$ , $A' \subset A$ et $B' \subset B$ , qui avec les restrictions de $f$ et de $e$ à $B'$ est un graphe. Un sous-graphe $G' = (S',A',B')$ de $G$ est <u>plein</u>, ou <u>engendré</u> par $S' \subset S$, si $A'$ est l'ensemble des arêtes de $G$ dont les extrémités sont dans $S'$ .

On appelle <u>circuit</u> de $G$ toute suite $(b_1,\ldots,b_r)$ d'arcs de $G$ telle que l'extrémité terminale de $b_i$ coïncide avec celle initiale de $b_{i+1}$ pour $i = 1,\ldots,r-1$ et l'extrémité terminale de $b_r$ avec celle initiale de $b_1$ ; l'entier $r$ est la <u>longueur</u> du circuit. Le circuit considéré peut aussi être écrit $(b_i,\ldots,b_r, b_1,\ldots,b_{i-1})$ pour $1 < i \leq r$ . La suite $(b_r^-,\ldots,b_1^-)$ définit le circuit <u>opposé</u> du circuit considéré.

Nous ne redéfinissons pas des notions bien connues telles que <u>connexité</u> des graphes, <u>composantes connexes</u> etc. qui ne sont pas sujettes dans la littérature à des variations de définition ou de terminologie comme le sont les précédentes [1] . Les graphes considérés sont finis. On appelle, à un isomorphisme près, <u>graphe complet</u> à $n$ sommets et on note $K_n$ le graphe sans boucles et sans arêtes multiples ayant $n$ sommets et les $\binom{n}{2}$ paires de sommets pour arêtes.

(1.2) Pour les définitions de base sur les plongements ou <u>représentations</u> (<u>embeddings</u> en anglais) d'un graphe dans un espace topologique par des images homéomorphes de $[0,1]$ en particulier dans une surface, nous renvoyons à Youngs [9] (voir aussi § (4.2)). On peut se représenter les surfaces fermées comme : la sphère avec $p$ "anses" pour la surface orientable de genre $p \geq 0$ , notée ici $\mathbf{T}_p$ , la sphère avec $q$ "capes croisées" pour la surface non orientable de genre $q \geq 1$ , notée ici $\mathbf{U}_q$ ; de façon générale nous notons $\mathbf{S}$ une surface, $c$ sa caractéristique où $c = 2-2p$

[1] voir par exemple : C. Berge, <u>Graphes et Hypergraphes</u>, 2e éd., Dunod Paris, 1973.

si $\mathbf{S} = \mathbf{T}_p$ et $c = 2 - q$ si $\mathbf{S} = \mathbf{U}_q$ . Une représentation d'un graphe $G$ dans une surface $\mathbf{S}$ est cellulaire (2-cell embedding) si ses faces sont des ouverts homéomorphes à un disque du plan ; dans ce cas le bord de chaque face définit un circuit de $G$ , ou son opposé, également appelé face par extension. Nous dirons que $G$ est représentable (cellulairement) dans $\mathbf{S}$ s'il admet une représentation (cellulaire) dans $\mathbf{S}$ . On a les résultats de base suivants :

(1.2.1) Si un graphe $G$ est représentable dans une surface $\mathbf{S}$ alors tout sous-graphe de $G$ est également représentable dans $\mathbf{S}$ .

(1.2.2) Si un graphe $G$ est représentable dans une surface $\mathbf{S}$ de caractéristique $c$ alors $G$ est représentable dans toute surface $\mathbf{S}'$ , non orientable si $\mathbf{S}$ est non orientable, de caractéristique $c' < c$ .

(1.2.3) Soit une représentation cellulaire d'un graphe $G$ dans une surface $\mathbf{S}$ . Si $n$ est le nombre de sommets de $G$ , $m$ le nombre d'arêtes, $f$ le nombre de faces de la représentation, $c$ la caractéristique de $\mathbf{S}$ , on a la relation d'Euler : $n - m + f = c$ .

(1.2.4) Si un graphe connexe $G$ est représentable dans une surface $\mathbf{S}$ de caractéristique $c$ alors il existe une surface $\mathbf{S}'$ de caractéristique $c' \geq c$, orientable si $\mathbf{S}$ est orientable, dans laquelle $G$ est représentable cellulairement, telle qu'en outre $c' \neq c$ si $G$ est représentable non cellulairement dans $\mathbf{S}$ .

(1.2.1) et (1.2.3) sont bien connus, (1.2.2) n'est souvent qu'implicite, pour (1.2.4) voir dans [9] "capping operation".
Une représentation cellulaire d'un graphe $G$ est triangulaire si toutes ses faces sont de longueur $3$ ; dans ce cas $G$ est dit représentable triangulairement.

(1.2.5) PROPOSITION.- Si un graphe $G$ sans boucles ni arêtes multiples connexe et tel que $m > 1$ est représentable dans une surface $\mathbf{S}$ de caractéristique $c$ alors on a (avec les notations de (1.2.3)) : $m \leq 3n - 3c$ , l'égalité ayant lieu si et seulement si $G$ est représentable triangulairement dans $\mathbf{S}$ .

En effet d'après (1.2.4) et (1.2.3) il existe une représentation cellulaire de $G$ ayant $f$ faces telle que $n - m + f \geq c$ . Par ailleurs grâce aux hypothèses faites sur $G$ toute face est de longueur $\geq 3$ et donc $3f \leq 2m$ . L'élimination de $f$ donne $m \leq 3n - 3c$ .

Remarque.- Il y a de nombreux contre-exemples à la réciproque de cette proposition (cf. par exemple [28]). On verra le cas du graphe complet $K_7$ qui n'est pas représentable dans $\mathbf{U}_2$ .

Exemple.- Les graphes représentables dans la sphère $\mathbf{T}_0$ , ou le plan euclidien c'est équivalent, sont appelés planaires. Le graphe complet $K_5$ n'est pas planaire car $10 > 3 \times 5 - 3 \times 2$ .

Le genre (resp. genre non orientable) $\gamma(G)$ (resp. $\mu(G)$ ) d'un graphe $G$ est le plus petit entier $p \geq 0$ (resp. $q \geq 1$ ) tel que $G$ est représentable sur $\mathbf{T}_p$ (resp. $\mathbf{U}_q$ ). On a d'après ce qui précède en particulier (1.2.1) et (1.2.2) : pour tout sous-graphe $G'$ d'un graphe $G$ $\gamma(G') \leq \gamma(G)$ et $\mu(G') \leq \mu(G)$ , et un graphe $G$ est représentable dans $\mathbf{T}_p$ (resp. $\mathbf{U}_q$ ) si et seulement si $p \leq \gamma(G)$ (resp. $q \leq \mu(G)$ ).

Nous ne redéfinissons pas la notion bien classique de graphe dual d'un graphe représenté dans une surface.

(1.3) Considérons des graphes sans boucle et disons voisins deux sommets extrémités d'une même arête. Etant donné un entier $k \geq 1$ on dit qu'un graphe $G$ est k-coloriable s'il existe une application de l'ensemble de ses sommets dans un ensemble de $k$ éléments telle que deux sommets voisins quelconques n'aient pas même image ; on appelle k-coloriage une telle application, couleurs les $k$ éléments, couleur d'un sommet l'image de ce sommet par cette application. Le nombre chromatique de $G$ , noté $\chi(G)$ , est le plus petit entier $k$ tel qu'il existe un k-coloriage de $G$ (il existe toujours un k-coloriage pour $k \geq n$ où $n$ est le nombre de sommets de $G$ ). On a les propriétés suivantes très simples du nombre chromatique d'un graphe $G$ : $G$ est k-coloriable si et seulement si $\chi(G) \leq k$ , et pour tout sous-graphe $G'$ de $G$ on a $\chi(G') \leq \chi(G)$ .

## 2. Enoncés des résultats principaux

Une carte sur une surface $\mathbf{S}$ peut être définie par la représentation d'un graphe dans $\mathbf{S}$ , les arêtes figurant les frontières et les faces les diverses régions. Colorier celles-ci avec la condition habituelle que deux régions adjacentes reçoivent des couleurs différentes revient à donner un coloriage du graphe dual et inversement. On définit le nombre chromatique $\chi(\mathbf{S})$ d'une surface $\mathbf{S}$ comme étant la borne supérieure des nombres chromatiques des graphes (sans boucles) représentables dans $\mathbf{S}$ (on définit de même $\delta(\mathbf{S})$ et $\omega(\mathbf{S})$ plus loin à partir de $\delta(G)$ et $\omega(G)$ ). L'entier $\chi(\mathbf{S})$ représente le nombre de couleurs toujours suffisant et qui peut être nécessaire pour colorier toute carte sur la surface $\mathbf{S}$ .

Dans la suite $\lfloor\ \rfloor$ dénote la partie entière (inférieure), $\lceil\ \rceil$ la partie entière supérieure.

(2.1) Théorème du coloriage des cartes.- On a

$$\chi(\mathbf{T}_p) = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48p}}{2} \right\rfloor \qquad (p \geq 0)$$

$$\chi(\mathbf{U}_q) = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+24q}}{2} \right\rfloor \qquad (q \geq 1 \ , \ q \neq 2)$$

et $$\chi(\mathbf{U}_2) = 6 \ .$$

Il y a dans cet énoncé deux parties dont les démonstrations posent des difficultés de nature tout à fait différentes comme on le verra : le cas de $\mathbf{T}_0$ qui correspond à la conjecture des quatre couleurs et tous les autres cas qui constituaient la conjecture de Heawood. Et dans cette dernière il y a une inégalité facile montrée par Heawood [2] en même temps qu'il posait la conjecture. Cette inégalité repose sur le très simple théorème de coloriage suivant [1]. Considérons, cela suffit, uniquement des graphes sans boucles et sans arêtes multiples. Etant donné un graphe $G$ rappelons que le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes ayant ce sommet pour extrémité et notons $\delta(G)$ le minimum des degrés des sommets de $G$ .

(2.1.1) PROPOSITION.- Soient $G$ un graphe et $k$ un entier. Si pour tout sous-graphe plein $G'$ de $G$ , on a $\delta(G') \leq k$ , alors $\chi(G) \leq k+1$ .

En effet il résulte de l'hypothèse faite sur $G$ qu'il est possible de ranger ses sommets en une suite $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de telle sorte que, pour $i = 1, \ldots, n$ , $s_i$ soit de degré inférieur ou égal à $k$ dans le sous-graphe engendré par $\{s_1, s_2, \ldots, s_i\}$ . Il est alors aisé de définir un $k$-coloriage de $G$ en attribuant successivement dans l'ordre de cette suite à chaque sommet une couleur.

Appliquant (2.1.1) aux graphes représentables dans une surface $\mathbf{S}$ avec $k = \delta(\mathbf{S})$ il découle :

(2.1.2) $$\chi(\mathbf{S}) \leq \delta(\mathbf{S}) + 1 \ .$$

Déterminons $\delta(\mathbf{S})$ . Etant donné un graphe $G$ avec les hypothèses de (1.2.5) (pour avoir la connexité on peut toujours considérer séparément chaque composante connexe et l'hypothèse $m > 1$ n'écarte que des cas triviaux) représentable dans une surface $\mathbf{S}$ de caractéristique $c$ on a : $m \leq 3n - 3c$ , et par ailleurs par définition de $\delta(G)$ : $n.\delta(G) \leq 2m$ . Par élimination de $m$ , il vient : $\delta(G) \leq \left\lfloor 6 - \frac{6c}{n} \right\rfloor$ . Par ailleurs, on a évidemment : $\delta(G) \leq n-1$ . D'où si $6 - \frac{6c}{n} \leq n-1$ soit $n^2 - 7n + 6c \geq 0$ , soit encore, en supposant $c < 2$ , $n \geq \frac{7+\sqrt{49-24c}}{2}$ , alors

[1] Ce théorème est le point de départ de toute une filière d'autres de même type : les théorèmes bien connus de Brooks, Dirac et également des extensions de J. Weinstein (cf. Excess in Critical Graphs, J. Comb. Theory (B), 18 (1975), 24-31).

$\delta(G) \leq \left\lfloor 6 - \frac{6c}{n} \right\rfloor \leq \frac{5+\sqrt{49-24c}}{2}$ ; et si $n - 1 \leq 6 - \frac{6c}{n}$ un calcul analogue donne également $\delta(G) \leq \frac{5+\sqrt{49-24c}}{2}$ . Cette borne ne dépendant plus de $n$ on a pour toute surface $\mathbf{S} \neq \mathbf{T}_o$ :

(2.1.3) $\delta(\mathbf{S}) \leq \left\lfloor \frac{5+\sqrt{49-24c}}{2} \right\rfloor$ et avec (2.1.2) :

(2.1.4) $\chi(\mathbf{S}) \leq \left\lfloor \frac{7+\sqrt{49-24c}}{2} \right\rfloor$ soit en explicitant :

$\mathbf{S} = \mathbf{T}_p$ $\delta(\mathbf{T}_p) \leq \left\lfloor \frac{5+\sqrt{1+48p}}{2} \right\rfloor$ et $\chi(\mathbf{T}_p) \leq \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48p}}{2} \right\rfloor$

$\mathbf{S} = \mathbf{U}_q$ $\delta(\mathbf{U}_q) \leq \left\lfloor \frac{5+\sqrt{1+24q}}{2} \right\rfloor$ et $\chi(\mathbf{U}_q) \leq \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+24q}}{2} \right\rfloor$

(en particulier $\chi(\mathbf{U}_2) \leq 7$ ).

<u>Cas de la sphère</u>. Pour $c = 2$ , l'inégalité (2.1.4) est vraie, mais la démonstration donnée n'est pas applicable à ce cas car l'inégalité (2.1.3) est fausse. L'inégalité $\delta(G) \leq \left\lfloor 6 - \frac{6c}{n} \right\rfloor$ obtenue plus haut (sans supposer $c < 2$ ) donne directement : $\delta(\mathbf{T}_o) \leq 5$ , d'où avec (2.1.2) : $\chi(\mathbf{T}_o) \leq 6$ ; alors que la bonne borne donnée par l'expression de Heawood est **4** . On peut déjà obtenir simplement en jouant sur l'existence d'un sommet de degré 5 : $\chi(\mathbf{T}_o) \leq 5$ . Esquissons la démonstration par récurrence sur le nombre de sommets. Soient $s$ un sommet de degré $d \leq 5$ d'un graphe planaire $G$ et $G'$ le sous-graphe engendré par $S - \{s\}$ (où $S$ est l'ensemble des sommets de $G$ ). Le cas $d \leq 4$ étant facile, supposons $d = 5$ . Comme $K_6$ n'est pas planaire, les cinq voisins de $s$ n'engendrent pas un sous-graphe complet et il en existe donc deux, soient $s_1$ et $s_2$ , non voisins entre eux. Soit $G''$ le graphe obtenu en identifiant dans $G'$ les sommets $s_1$ et $s_2$ en un même sommet $s_3$ ; $G''$ est planaire et également 5-coloriable par hypothèse de récurrence. D'un 5-coloriage de $G''$ on déduit de manière évidente un 5-coloriage de $G'$ attribuant une même couleur à $s_1$ et $s_2$ (celle de $s_3$ dans $G''$ ), lequel se prolonge directement en un 5-coloriage de $G$ (puisque au plus quatre couleurs sont utilisées par les voisins de $s$ ). D'où le théorème : tout graphe planaire est 5-coloriable. Il est extrêmement difficile de passer de 5 à 4 couleurs (voir § 5 plus loin). Notons que ce raisonnement fait pour les graphes planaires s'étend directement pour démontrer le lemme suivant qui nous sera utile et où $\omega(\mathbf{S})$ est défini par $\omega(G)$ qui est le plus grand nombre de sommets des sous-graphes complets du graphe $G$ ou directement par $\omega(\mathbf{S}) = \sup\{n \mid K_n$ est représentable dans $\mathbf{S}\}$.

(2.1.5) <u>Lemme</u>.- <u>Soient</u> $\mathbf{S}$ <u>une surface et</u> $k$ <u>un entier</u>. <u>Si</u> $\delta(\mathbf{S}) \leq k$ <u>et</u> $\omega(\mathbf{S}) \leq k$ <u>alors</u> $\chi(\mathbf{S}) \leq k$ .

Pour les surfaces autres que la sphère, il reste à compléter les inégalités (2.1.4) avec l'inégalité $\chi(\mathbf{U}_2) \leq 6$ et à établir dans tous les cas l'inégalité inverse. Autrement dit à trouver pour chaque surface un graphe représentable dont le nombre chromatique atteint la borne donnée. Il se trouve que le graphe complet répond à cette exigence, ce qui est une circonstance heureuse car son nombre chromatique est simple à déterminer. La conjecture de Heawood se trouvera ainsi impliquée par le théorème suivant.

(2.2) <u>Théorème du genre du graphe complet</u>.- <u>On a</u>

$$\gamma(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil \qquad (n \geq 3)$$

$$\mu(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\rceil \qquad (n \geq 5 \ , \ n \neq 7)$$

<u>et</u> $\qquad \mu(K_7) = 3$ .

Nous allons montrer en fait l'équivalence entre ce théorème (2.2) et le théorème (2.1) moins le cas $\mathbf{S} = \mathbf{T}_0$ . Posons :

$$h_1(p) = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48p}}{2} \right\rfloor \ , \quad k_1(n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil \ ,$$

$$h_2(q) = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+24q}}{2} \right\rfloor \ , \quad k_2(n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\rceil \ .$$

On vérifie d'abord que pour $n \geq 7$ et $p \geq 0$ , on a $h_1(k_1(n)) = n$ et $k_1(h_1(p)) \leq p$ , et que pour $n \geq 6$ et $q \geq 1$ , on a $h_2(k_2(n)) = n$ et $k_2(h_2(q)) \leq q$ . Supposons que, pour tout $n \geq 3$ , on ait $\gamma(K_n) = k_1(n)$ , alors, pour tout $p \geq 1$ , on a $h_1(p) \geq 3$ et $\gamma(K_{h_1(p)}) = k_1(h_1(p)) \leq p$ , c'est-à-dire $K_{h_1(p)}$ représentable dans $\mathbf{T}_p$ et donc $\chi(\mathbf{T}_p) \geq \chi(K_{h_1(p)}) = h_1(p)$ , et enfin l'égalité avec (2.1.4). Inversement si, pour tout $p \geq 1$ , on a $\chi(\mathbf{T}_p) = h_1(p)$ , alors, pour tout $n \geq 7$ , on a $k_1(n) \geq 1$ et $\chi(\mathbf{T}_{k_1(n)}) = h_1(k_1(n)) = n$ , et par ailleurs (2.1.4) appliqué avec $\mathbf{S} = \mathbf{T}_{k_1(n)}$ donne $\delta(\mathbf{T}_{k_1(n)}) \leq h_1(k_1(n)) - 1 = n-1$ ; si alors on avait $\gamma(K_n) > k_1(n)$ pour un $n \geq 7$ , on aurait aussi $\omega(\mathbf{T}_{k_1(n)}) \leq n-1$ qui, avec la précédente inégalité en appliquant le lemme (2.1.5), donnerait $\chi(\mathbf{T}_{k_1(n)}) \leq n-1$ , contrairement à ce qui vient d'être montré. On a donc $\gamma(K_n) \leq k_1(n)$ et, l'inégalité inverse étant facile à montrer (voir § 3), l'égalité pour $n \geq 7$ . Les cas $n = 5,6$ découlent du cas $n = 7$ et les cas $n = 3,4$ sont triviaux. Les cas non orientables sauf celui de $\mathbf{U}_2$ se traitent de façon exactement similaire.

Cas du tore de Klein $\mathbf{U}_2$ . Sachant que $\mu(K_7) = 3$ , on en déduit $\omega(\mathbf{U}_2) < 7$ et comme par ailleurs, on a $\delta(\mathbf{U}_2) \leq 6$ d'après (2.1.5) on a donc $\chi(\mathbf{U}_2) \leq 6$ ; comme, ensuite $\mu(K_6) = 2$ , $K_6$ est représentable dans $\mathbf{U}_2$ , d'où $\chi(\mathbf{U}_2) \geq \chi(K_6) = 6$ . Inversement, sachant que $\chi(\mathbf{U}_2) = 6$ , on en déduit $\mu(K_7) \geq 3$ et de là $\mu(K_7) = 3$ (on a, comme d'ailleurs pour tout graphe, $\mu(K_7) \leq 2\gamma(K_7) + 1$ ).

Remarques.- 1) Pour montrer la conjecture de Heawood pour une surface $\mathbf{T}_p$ donnée, il suffit de montrer que $K_{h_1(p)}$ est représentable dans $\mathbf{T}_p$ , c'est-à-dire, il suffit de connaître seulement le genre de $K_{h_1(p)}$ . C'est ainsi par exemple que Heawood résolvait le cas du tore $\mathbf{T}_1$ en donnant une représentation de $K_7$ (dualement par une carte sur le tore comportant 7 régions deux à deux voisines).

2) On a $h_1(p) = \sup\{n \mid k_1(n) \leq p\}$ , ce qui, avec les théorèmes précédents, s'interprète par $\chi(\mathbf{T}_p) = \sup\{\chi(K_n) \mid K_n$ est représentable dans $\mathbf{T}_p\}$,, égalité qui montre bien le rôle du graphe complet. On peut faire les mêmes remarques, mutatis mutandis, pour les cas non orientables.

La démonstration du théorème (2.2) constitue l'essentiel de la solution de la conjecture de Heawood et fait l'objet du paragraphe suivant. Terminons auparavant cette présentation du théorème du coloriage des cartes en rassemblant dans un même énoncé les divers paramètres mis en jeu. Ce qui a été montré précédemment peut se résumer, pour une surface $\mathbf{S}$ de caractéristique $c$ et en posant $h(c) = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24c}}{2} \right\rfloor$ , comme suit : d'une part directement $\chi(\mathbf{S}) \leq \delta(\mathbf{S}) + 1 \leq h(c)$ si $\mathbf{S} \neq \mathbf{T}_o$ , d'autre part en admettant le théorème du genre du graphe complet pour en déduire la conjecture de Heawood $\chi(\mathbf{S}) \geq \omega(\mathbf{S}) \geq h(c)$ si $\mathbf{S} \neq \mathbf{T}_o$ , $\mathbf{U}_2$ . Admettant en outre la conjecture des quatre couleurs, il en découle le théorème général suivant complété du cas de $\mathbf{U}_2$ :

(2.3) THÉORÈME.- Pour toute surface $\mathbf{S}$ de caractéristique $c$ , on a

$$\chi(\mathbf{S}) = \omega(\mathbf{S}) = \delta(\mathbf{S}) + 1 = h(c) \qquad (\mathbf{S} \neq \mathbf{T}_o , \mathbf{U}_2)$$

$$\chi(\mathbf{U}_2) = \omega(\mathbf{U}_2) = \delta(\mathbf{U}_2) = 6$$

$$\chi(\mathbf{T}_o) = \omega(\mathbf{T}_o) = \delta(\mathbf{T}_o) - 1 = 4 \ (= h(2)) .$$

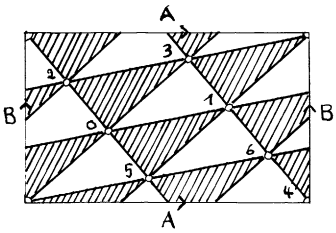
Il est remarquable que seule l'égalité $\chi = \omega$ soit valable pour toutes les surfaces. Par ailleurs, le fait que $\chi = \delta - 1$ pour la sphère, alors que $\chi = \delta$ ou $\delta + 1$ pour les autres surfaces, rend un peu compte de la difficulté exceptionnelle du cas de la sphère.

## 3. Démonstration de la conjecture de Heawood (selon Ringel et Youngs)

L'ensemble de la solution de la conjecture de Heawood dont un aperçu est donné ici fait l'objet du livre de Ringel [18] (voir aussi Youngs [12] pour une introduction théorique).

(3.1) Comme on l'a vu le problème se ramène à établir le genre du graphe complet $K_n$ tel que donné en (2,2). Si $K_n$ où $n \geq 3$ est représentable dans la surface $\mathbf{T}_p$, la proposition (1.2.5) fournit $\frac{n(n-1)}{2} \leq 3n - 3(2-2p)$ soit $p \geq \frac{(n-3)(n-4)}{12}$. On a donc déjà l'inégalité $\gamma(K_n) \geq \lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \rceil$. Il s'agit de montrer qu'il y a égalité ce qui revient à montrer l'existence d'une représentation de $K_n$ dans $\mathbf{T}_p$ où $p = \lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \rceil$. Un cas particulier important est celui où $K_n$ est représentable triangulairement dans une surface $\mathbf{T}_p$, on a alors, suivant le cas d'égalité de (1.2.5), $p = \frac{(n-3)(n-4)}{12}$. Ce qui montre que : 1°) il ne peut exister de représentation triangulaire de $K_n$ que si 12 divise $(n-3)(n-4)$, soit si $n \equiv 0, 3, 4$ ou $7 \pmod{12}$, 2°) il suffit qu'une représentation de $K_n$ soit triangulaire pour qu'elle soit une représentation cherchée c'est-à-dire dans $\mathbf{T}_p$ où $p = \lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \rceil$ (et en fait dans ce cas toute telle représentation est triangulaire). En non-orientable, on a les mêmes conclusions dans un plus grand nombre de cas, à savoir lorsque 6 divise $(n-3)(n-4)$ soit si $n \equiv 0$ ou $1 \pmod{3}$ excepté $n = 7$. Dans ces cas, appelés cas réguliers, on peut construire effectivement des représentations triangulaires de $K_n$, selon la méthode suivante décrite ici sans trop formaliser par un exemple (voir la description complète dans [18]).

(3.2) Considérons la représentation triangulaire ci-contre de $K_7$ dans $\mathbf{T}_1$ (les côtés A du rectangle figurant la surface sont à identifier dans le sens des flèches, de même les côtés B ). Identifions comme indiqué les sommets avec les éléments $0,\ldots,6$ du groupe additif $\mathbf{Z}_7$ des entiers modulo 7




(3.2.1)

Considérons maintenant le tableau ci-contre. La ligne $i$ est constituée des sommets voisins de $i$ dans la représentation précédente, dans l'ordre où on les rencontre en tournant autour de $i$ dans un sens choisi. Chaque ligne est à lire cycliquement (par exemple 1 après 5 dans la ligne 0).

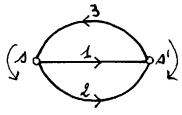
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0. | 1 | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 |
| 1. | 2 | 4 | 3 | 0 | 5 | 6 |
| 2. | 3 | 5 | 4 | 1 | 6 | 0 |
| 3. | 4 | 6 | 5 | 2 | 0 | 1 |
| 4. | 5 | 0 | 6 | 3 | 1 | 2 |
| 5. | 6 | 1 | 0 | 4 | 2 | 3 |
| 6. | 0 | 2 | 1 | 5 | 3 | 4 |

(3.2.2)

Partons de ce tableau, appelé <u>schéma</u>. Associons à la ligne $i$ un polygone $P_i$ à 6 côtés du plan, choisissons un sens de parcours de son bord et associons aux côtés ainsi orientés les éléments de la ligne $i$ dans le même ordre cyclique. Pour tous les $i$ et $j$ tels que $0 \leq i < j \leq 6$, identifions le côté associé à $j$ du polygone $P_i$ au côté associé à $i$ du polygone $P_j$ dans le sens opposé de leurs orientations. Cet assemblage des 7 polygones $P_0,\ldots,P_6$ donne un polyèdre dont le dual du squelette est $K_7$. Comme il est facile de s'en apercevoir, c'est en fait combinatoirement parlant la représentation précédente qui est ainsi reconstituée à partir de la seule donnée du schéma.

Considérons à nouveau le schéma (3.2.2). Pour $i = 1,\ldots,6$, la ligne $i$ se déduit de la ligne 0 en ajoutant $i$ à chacun des éléments de celle-ci. Autrement dit ce schéma est entièrement engendré à partir de sa première ligne par l'opération des éléments du groupe $\mathbf{Z}_7$.

Soit le diagramme ci-contre. C'est un graphe avec en chaque sommet une permutation circulaire des arêtes (définie par un sens de rotation autour de ce sommet) et associé à chaque arc un élément de $\mathbf{Z}_7$ appelé <u>courant</u> (sur la figure pour chaque arête un seul des deux arcs est indiqué avec son courant ; l'arc opposé a par définition le courant opposé dans $\mathbf{Z}_7$).




(3.2.3)

Considérons le circuit suivant de ce graphe (décrit en identifiant les arcs à leurs courants) : on commence par l'arc 1 et tournant autour de son extrémité terminale s' dans le sens indiqué, on poursuit par l'arc 3 puis de même en s par l'arc 2, ensuite ce sera l'arc $1^-$, ainsi de suite jusqu'à retrouver l'arc 1. On obtient ainsi la suite $1, 3, 2, 1^-, 3^-, 2^-$ qui prise comme suite d'éléments de $\mathbf{Z}_7$ (par exemple, $-1 = 6$ pour $1^-$) est exactement la ligne 0.

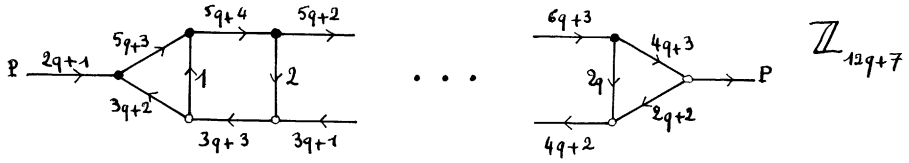
Ainsi au total la donnée du diagramme (3.2.3), appelé <u>graphe de courant</u> (notion introduite par Gustin [10]), suffit à reconstituer le schéma (3.2.2) par sa première ligne,

puis de là la représentation triangulaire de $K_7$ . Autrement dit la seule donnée de ce graphe de courant établit l'existence de la représentation cherchée de $K_7$ . Bien entendu le graphe de courant doit posséder, en général, certaines propriétés précises ; fondamentalement, il s'agit de la loi de Kirchhoff : en tout sommet, la somme des courants "entrants" est égale à la somme des courants "sortants" (d'où la terminologie des circuits électriques). On peut voir que grâce à cette loi le schéma déduit de la ligne 0 elle-même déduite du graphe de courant vérifie la règle suivante

(R) Si dans la ligne i , on a i. ...jk ... , alors dans la ligne k , on a k. ... ij... .

Cette règle assure d'une manière générale que l'assemblage des polygones comme décrit plus haut donne bien un polyèdre dont le dual du squelette est une triangulation.

La solution précédente pour $n=7$ se généralise par le graphe de courant (3.2.4) ci-dessous qui représente la solution complète du cas orientable $n \equiv 7 \pmod{12}$ de la conjecture de Heawood. (Les sommets avec rotation dans le sens des aiguilles d'une montre sont représentés par • et ceux avec rotation inverse par ∘ ; les extrémités P sont à identifier, P n'est pas un sommet ; le groupe utilisé est naturellement $\mathbb{Z}_n$ où $n = 12q + 7$ .)




(3.2.4)

(3.3) Pour les cas non réguliers $K_n$ n'est plus représentable triangulairement. La méthode consiste en enlevant des arêtes à $K_n$ (en nombre qui dépend de n modulo 12) à se ramener à un graphe représentable triangulairement, ce qui permet d'appliquer encore la construction précédente. Mais il faudra compléter la représentation obtenue des arêtes manquantes pour retrouver $K_n$ . C'est le problème d'adjacence additionnelle qui est résolu à l'aide d' "anses" , et de "capes croisées" en non orientable, adjointes à la surface (en nombre ce qu'il faut pour avoir au total le genre voulu). Par exemple, pour $n \equiv 10 \pmod{12}$ , on peut représenter triangulairement $K_n - K_3$ ($K_n$ moins trois arêtes formant un $K_3$ )

et on ajoute les trois arêtes manquantes en se servant d'une anse adjointe à la surface (cf. (4.4.1)). C'est là un cas facile du problème d'adjacence additionnelle qui devient beaucoup plus compliqué quand par exemple on part d'une représentation de $K_n - K_8$ et qu'il faut donc ajouter 28 arêtes, (à l'aide de 6 anses ajoutées), ce qui impose de modifier au préalable la représentation (cas 2 orientable).

(3.4) La complexité de la solution varie beaucoup suivant la valeur de $n$ modulo 12. Le cas où $n \equiv 7$ (mod. 12), dit "cas 7", est un des plus simples. Sa solution en orientable décrite plus haut en (3.2) est dite d'indice 1 car le graphe de courant n'a qu'un seul circuit et le schéma qu'une seule ligne génératrice. Pour chaque indice plus grand, on a considéré surtout les indices 2 et 3, il faut donner un ensemble d'autres propriétés du graphe de courant. Pour les cas non orientables la règle (R) est à modifier et les graphes de courant sont décrits de manière plus compliquée (cascades). Par ailleurs, pour certains cas, il s'est révélé très fécond de considérer des graphes de courant avec des sommets en lesquels la loi de Kirchhoff n'est pas satisfaite, ce sont les vortex qui correspondent à des faces non triangulaires. Il y a encore certaines anomalies rencontrées dans de nombreux graphes de courant utilisés : arêtes pendantes, principe de doublement par exemple.

Nous n'insistons pas sur tout cela qui concerne la théorie générale des graphes de courant que nous présentons autrement au paragraphe suivant. Il y aurait aussi à dire sur certains aspects techniques de la solution : techniques de construction de familles de graphes de courant et surtout de répartition des courants en respectant la loi de Kirchhoff, pour certains cas constructions par induction (assemblage de représentations par recollement de surfaces), "petits" cas échappant aux méthodes générales par manque de régularité (résolus directement entre autres par J. Mayer) et le cas particulier du graphe $K_7$ dont il faut montrer qu'il n'est pas représentable sur $\mathbf{U}_2$ (P. Franklin), les différents groupes utilisés ($\mathbf{Z}_n$ ou un produit de $\mathbf{Z}_n$ le plus souvent). Sur ce dernier point, signalons la singularité du cas 0 qui nécessite, en indice 1 tout au moins (cf. [16]), un groupe non commutatif, et de surcroît celui utilisé n'était pas défini de manière constructive, ce qui était unique dans l'ensemble de la solution. Récemment, Jungerman et Pengelley [29] ont donné pour ce cas une solution constructive avec un groupe commutatif (mais une solution compliquée d'indice 4).

La démonstration de la conjecture de Heawood se compose d'un ensemble hétéroclite de cas. Depuis son achèvement, en 1968, plusieurs cas ont reçu des solutions plus simples, reprises dans [18] ou plus récentes comme par exemple le cas 1 non orien-

table, le plus "tordu" dans [18], dont Jungerman [23] donne une solution simple et nette.

## 4. Présentation duale par les "déploiements" de représentations

Le principe général des constructions de représentations de graphes par les graphes de courant apparaît mal. Tout devient plus clair en voyant les graphes de courant comme des graphes représentés dans une surface (y compris et surtout les cascades, voir à ce sujet l'article récent de Ringel [25]) et en considérant leurs graphes duaux, qui sont graphes de tension. Dans cette optique, il est possible de dégager un procédé général que nous appelons déploiement de graphes et de représentations et qui intègre dans un même modèle cascades, vortex, indices quelconques, principe de doublement, etc.

(4.1) Soit un graphe $G=(S,A,B)$ avec les applications $e$ de $B$ dans $S$ et $f$ de $B$ dans $A$. Soient une famille $E_s$, $s \in S$, d'ensembles finis ayant tous même nombre d'éléments et une famille $\varphi_b$, $b \in B$, de bijections où $\varphi_b$ applique $E_{s_1}$ sur $E_{s_2}$, $s_1$ étant l'extrémité initiale et $s_2$ l'extrémité terminale de l'arc $b$, avec la condition pour tout $b \in B$ : $\varphi_{b^-} = (\varphi_b)^{-1}$ [1]. Définissons un graphe $G' = (S',A',B')$ avec les applications $e'$ de $B'$ dans $S'$ et $f'$ de $B'$ dans $A'$, qu'on appellera déploiement de $G$ suivant les $E_s$ et les $\varphi_b$. L'ensemble $S'$ est la somme des $E_s$ où $s \in S$ ; $A'$ est l'ensemble des triplets $(s'_1,b,s'_2)$ où $s'_1$ et $s'_2 \in S'$ et $b \in B$ avec $s'_2 = \varphi_b(s'_1)$, modulo l'égalité $(s'_1,b,s'_2) = (s'_2,b^-,s'_1)$ ; $B'$ est l'ensemble des couples $b' = (s',b)$ où $b \in B$ et $s' \in E_s$ avec $s = e(b)$ ; l'application $e'$ est définie par $e'(b') = s'$, et l'application $f'$ par $f'(b') = (s',b,\varphi_b(s')) = (\varphi_b(s'),b^-,s')$. Ainsi l'arc opposé de l'arc $b' = (s',b)$ est $b'^- = (\varphi_b(s'),b^-)$, l'extrémité initiale de $b'$ est $s'$ et son extrémité terminale $\varphi_b(s')$. Etant donné un circuit $C = (b_1,\dots,b_r)$ de $G$ on appelle déploiement de $C$ dans $G'$ tout circuit de $G'$ défini par une suite d'arcs de la forme suivante : $(s'_{11},b_1),\dots,(s'_{1r},b_r),(s'_{21},b_1),\dots,(s'_{ij},b_j),(s'_{ij+1},b_{j+1}),\dots$ $\dots,(s'_{ir},b_r),(s'_{i+11},b_1),\dots,(s'_{tr},b_r)$ où $s'_{ij+1} = \varphi_{b_j}(s'_{ij})$ pour $i = 1,\dots,t$, $j = 1,\dots,r-1$ et $s'_{i+11} = \varphi_{b_r}(s'_{ir})$ pour $i = 1,\dots,t-1$, $t$ étant l'ordre de transitivité de $s'_{11}$ pour la permutation $\psi = \varphi_{b_r} \dots \varphi_{b_1}$ de $E_{s_1}$ $(s'_{11} = \psi^t(s'_{11}) = \varphi_{b_r}(s'_{tr}))$ ; $C'$ est de longueur $r \times t$.

[1] Gross et Tucker [30] font des graphes de tension une généralisation équivalente à celle que nous donnons ici.

La proposition suivante permet de définir le déploiement d'une représentation.

(4.2) PROPOSITION.- Le déploiement des faces d'une représentation cellulaire de $G$ donne les faces d'une représentation cellulaire de $G'$, orientable si la représentation de $G$ est orientable.

Rappelons qu'on identifie une face d'une représentation et un circuit du graphe qui la borde. On peut caractériser combinatoirement la famille des faces d'une représentation cellulaire. Etant donné un circuit $C$ d'un graphe $G$ disons que $C$ passe par l'arête $a$ de $G$ (suivant l'arc $b$) si un arc $b$ associé à $a$ apparaît dans $C$, et ce autant de fois qu'il y a d'occurrences d'arcs associés à $a$ dans $C$ ; et disons que $C$ passe par le sommet $s$ suivant, dans l'ordre, les arcs $b$ et $b'$ dont $s$ est extrémité respectivement terminale et initiale si $b$ et $b'$ apparaissent consécutivement dans $C$ c'est-à-dire si $C$ est de la forme $(\ldots,b,b',\ldots)$ ou réduit à l'arc $b$ lorsque $b = b'$. La famille des faces d'une représentation cellulaire de $G$ vérifie :

$(F_1)$ Par toute arête de $G$ passent exactement deux faces (distinctes ou non, ce peut être la même face qui passe deux fois par une arête).

$(F_2)$ Pour tout sommet $s$ de $G$, il est possible de ranger en une suite $b_1,\ldots,b_d$ les arcs d'extrémité initiale $s$ de telle sorte qu'il y ait une face passant par $s$ suivant $b_i^-$ et $b_{i+1}$ ou $b_{i+1}^-$ et $b_i$ pour chaque $i = 1,\ldots,d-1$ et une face passant par $s$ suivant $b_d^-$ et $b_1$ ou $b_1^-$ et $b_d$.

En outre, dans le cas d'une représentation orientable, la famille des faces est orientable en ce sens qu'il est possible en remplaçant les faces d'une sous-famille par les circuits opposés d'obtenir que les deux faces passant par une arête selon $(F_1)$ passent suivant des arcs opposés.

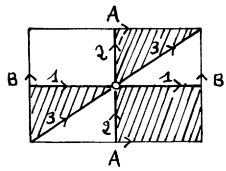
Inversement, on montre qu'une famille de circuits d'un graphe $G$ vérifiant $(F_1)$ et $(F_2)$ est la famille des faces d'une représentation cellulaire de $G$. Dans ces conditions la démonstration de la proposition (4.2) revient à vérifier que les propriétés $(F_1)$ et $(F_2)$ et la propriété d'orientabilité sont conservées par déploiement.

Exemple.- Soit $G$ le graphe ayant un seul sommet et pour unique arête une boucle dont on note $b$ l'un des deux arcs associés. Soit $C$ le circuit de $G$ constitué de $b$, $C'$ celui constitué de $b$ suivi de l'opposé $b^-$, $C''$ celui constitué de $b$ suivi de $b$ lui-même. Alors $(C_1,C_2)$, où $C_1 = C$ et $C_2 = C$, est la famille des faces d'une représentation orientable de $G$ (dans $\mathbf{T}_0$), $C''$ est l'unique face d'une représentation non orientable de $G$ (dans $\mathbf{U}_1$) ; la famille

réduite à $C'$ vérifie $(F_1)$ mais pas $(F_2)$ .

Ouvrons une parenthèse pour indiquer comment dans le prolongement de ce qui précède, il est possible de fonder combinatoirement la théorie des "graphes topologiques". Appelons système de faces toute famille de circuits d'un graphe $G$ vérifiant $(F_1)$ et $(F_2)$ et appelons caractéristique de ce système l'entier $c = n - m + f$ où $n$ est le nombre de sommets et $m$ le nombre d'arêtes de $G$ , $f$ le nombre de circuits de la famille. La caractéristique d'un système de faces est un entier $\leq 2$ pair lorsque le système est orientable au sens donné plus haut. Appelons surface combinatoire orientable (resp. non -) de caractéristique $c$ l'ensemble des systèmes de faces orientables (resp. non -) de caractéristique $c$ . Disons qu'un graphe $G$ est représentable dans une surface combinatoire $\mathcal{S}$ s'il est sous-graphe d'un graphe $G'$ possédant un système de faces de $\mathcal{S}$ , et $G$ est représentable cellulairement si $G$ lui-même possède un système de faces de $\mathcal{S}$ , appelé alors représentation de $G$ dans $\mathcal{S}$ . A partir de ces nouvelles définitions, on peut montrer l'équivalent des propositions de base (1.2.1) à (1.2.4). Un graphe est représentable (cellulairement) dans une surface combinatoire $\mathcal{S}$ si et seulement si il est représentable (cellulairement) au sens du plongement topologique dans la surface de même caractéristique et même caractère d'orientabilité que $\mathcal{S}$ .

(4.3) Etant donné un graphe connexe $G = (S,A,B)$ , un groupe commutatif $X$ et un sous-groupe $Y$ , nous appelons tension modulo $Y$ dans $X$ de $G$ une application $\theta$ de $B$ dans $X$ telle que, pour tout $b \in B$ , on ait $\theta(b^-) = -\theta(b)$ et pour tout circuit $(b_1,\ldots,b_r)$ de $G$ , on ait $\theta(C) = \sum_{i=1}^{r} \theta(b_i) \in Y$ (la tension de tout circuit est nulle modulo $Y$ ; pour $Y = \{0\}$ , $\theta$ est une tension au sens habituel) ; $G$ muni de $\theta$ est appelé un graphe de tension. Etendant des considérations classiques, on a que la tension $\theta$ est associée à un potentiel : une application $\pi$ de $S$ dans le groupe quotient $X/Y$ définie (à une constante additive près) par la relation $\pi(s_2) = \pi(s_1) + \theta(b)$ pour tout $b \in B$ d'extrémités initiale $s_1$ et terminale $s_2$ . Posant alors $E_s = \pi(s)$ pour tout $s \in S$ et $\varphi_b(x) = x + \theta(b)$ pour tout $b \in B$ et tout $x \in \pi(s)$ où $s$ est l'extrémité initiale de $b$ , on a des familles de $E_s$ et de $\varphi_b$ comme en (4.1). Un circuit $C$ de $G$ de longueur $r$ se déploie en $|Y|/t$ circuits de $G'$ tous de même longueur $r \times t$ où $t$ est l'ordre dans $Y$ de $\theta(C)$ . Par exemple, ces circuits sont de longueur $3$ dans deux cas : $r = 3$ et $t = 1$ , c'est-à-dire $C$ de longueur $3$ et de tension nulle (ce qui correspond à la loi de Kirchhoff en un sommet de degré $3$ dans le graphe de courant dual), $r = 1$ et $t = 3$ qui est le cas d'une tension d'ordre $3$ sur un arc associé à une boucle (vortex de degré $1$ dans un graphe de courant).




Exemple.- Le déploiement du graphe de tension ci-contre ($X = Y = \mathbf{Z}_7$) représenté dans $T_1$ (pour chaque arête un seul des deux arcs est indiqué avec sa tension) fournit $K_7$ et sa représentation (3.2.1). Ainsi la face hachurée, dont la suite des tensions des arcs est $(1,-3,2)$, est de tension nulle et se déploie suivant les sept faces triangulaires hachurées de (3.2.1).

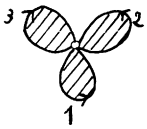
Le graphe de l'exemple précédent s'appelle un quotient de $K_7$. Toute la solution de la conjecture de Heawood, aussi bien les cas non orientables que ceux orientables, peut être revue suivant ce principe de représenter un quotient aussi simple que possible, de façon à ce que le déploiement fournisse le graphe considéré avec une représentation cherchée (cf. quotients de $K_n$ dans [21]). Cela s'applique à beaucoup de graphes et par exemple les graphes de Cayley souvent considérés sont simplement ceux admettant comme quotient un sommet avec des boucles. La possibilité d'avoir un quotient suffisamment simple avec une représentation qui convienne tient à la régularité des représentations qu'on cherche à construire, au sens des automorphismes de celles-ci (bijections sur les sommets préservant les faces). Par exemple dans le modèle précédent défini avec une tension, c'est l'ordre du groupe $Y$ qui mesure le degré de régularité qui se trouve "ramassée" dans le quotient de $G$, car, nous n'avons pas la place de développer cela ici, mais on peut voir que $Y$ définit un groupe d'automorphismes de la représentation déployée (Biggs [15] dans un cas très particulier montre que $Y$ est le noyau de Frobenius du groupe de tous les automorphismes de celle-ci).

Les graphes de tension furent introduits par Gross [20] sous une forme un peu différente. Il a été défini des prolongements topologiques des graphes de courant et des graphes de tension en termes de revêtements (cf. par exemple [24] et références incluses).

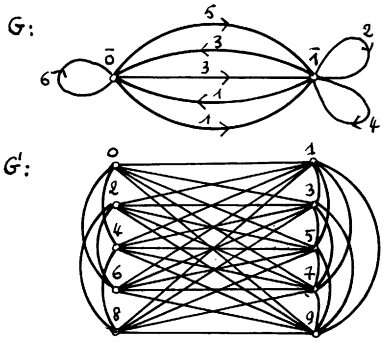
(4.4) Terminons par quelques exemples empruntés à la solution de la conjecture de Heawood, lesquels montreront qu'un vortex correspond ici à une face de tension non nulle, une cascade à un graphe de tension dans une surface non orientable, l'indice d'une solution à l'indice du sous-groupe $Y$ dans $X$ et au nombre de sommets du graphe de tension, une demi-arête-pendante (dead-end-arc dans [18]) à une boucle dont la tension des arcs associés est d'ordre $2$ dans $Y$.

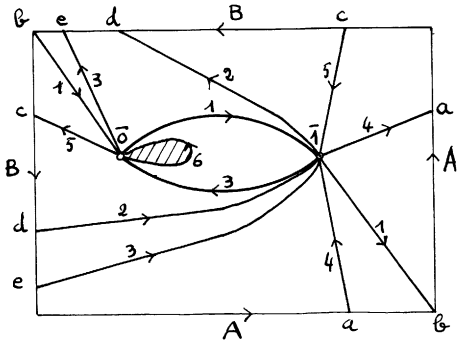
(4.4.1) Exemple du cas non régulier $n = 10$, avec le même graphe de tension que

plus haut $(X = Y = \mathbf{Z}_7)$, mais représenté dans le plan comme ci-contre (ce qui figure une représentation dans $\mathbf{T}_0$). Le déploiement est une représentation de $K_7$ dans $\mathbf{T}_3$ (on trouve le genre en appliquant la relation d'Euler) dont trois faces sont de longueur 7 (ce sont les déploiements des trois faces hachurées, lesquelles correspondent aux trois vortex du graphe p. 29 dans [18] qui est le graphe de courant dual). Ajoutant dans chacune de ces trois faces un sommet qu'on relie à tous les sommets de la face, on obtient une représentation de $K_{10} - K_3$. Les trois arêtes manquantes sont faciles à ajouter à l'aide d'une anse adjointe à la surface (adjacence additionnelle), ce qui donne enfin $K_{10}$ dans $\mathbf{T}_4$ (on a $4 = \left\lceil \frac{(10-3)(10-4)}{12} \right\rceil$).

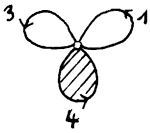



(4.4.2) Soit le graphe de tension G donné plus bas avec un potentiel $(X = \mathbf{Z}_{10}$, $Y = \{0,2,4,6,8\})$. Son déploiement G' s'identifie à $K_{10}$ moins les cinq arêtes définissant le circuit de sommets successifs : 0,2,4,6,8 . Le déploiement de la représentation de G donnée à côté dans $\mathbf{U}_2$ (les côtés A sont à identifier dans le sens des flèches, de même les côtés B) est une représentation G' dont exactement une face est de longueur 5 (le déploiement de la boucle 6) et toutes les autres sont de longueur 3 . Cet exemple correspond à la cascade d'indice 2 , p. 164 dans [18], qui illustre une construction par induction.

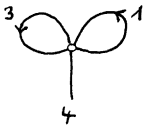


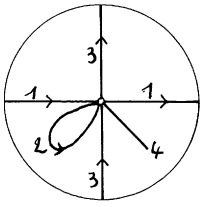
(4.4.3) Dans le graphe de tension $(X = Y = \mathbf{Z}_8)$ représenté ci-contre dans le plan (pour $\mathbf{T}_0$), la boucle 4 se déploie en quatre faces de longueur 2 (car sa tension est d'ordre 2). Ce genre de faces étant sans intérêt, on les "rétrécit" jusqu'à faire coincider les deux arêtes qui les bordent. Pour signifier cela dans le graphe de tension on remplace la bou-



cle par une "demi-arête-pendante", comme dans la figure ci-contre. Le déploiement de cet exemple donne le graphe $K_8$ moins 8 arêtes définissant deux circuits de longueur 4 représentés dans $\mathbf{T}_2$ . Ces deux circuits sont des faces et en ajoutant dans celles-ci deux sommets que l'on réunit ensuite à l'aide d'une anse, on obtient $K_9$ dans $\mathbf{T}_3$ (cet exemple correspond au cas très spécial donné p. 99 dans [18]).



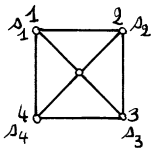

(4.4.4) Le dernier exemple suivant montre que le déploiement d'une représentation non orientable peut être une représentation orientable. En l'occurrence le déploiement du graphe de tension ci-contre $(X = Y = \mathbf{Z}_8)$ représenté dans $\mathbf{U}_1$ (les points diamétralement opposés du cercle figurant la surface sont à identifier) fournit une représentation de $K_8$ dans $\mathbf{T}_2$ .




## 5. Sur le principe de la solution de Appel et Haken du problème des quatre couleurs

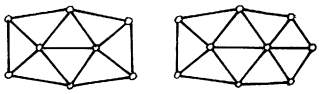
De nature tout à fait différente de ce qui précède, la conjecture des quatre couleurs est vraiment un problème de coloration : montrer que tout graphe planaire est 4-coloriable. Peu après la publication de cette conjecture par Cayley, en 1879, Kempe [1], dans une démonstration d'ailleurs fausse, posait implicitement un principe possible de preuve : montrer l'existence d'un système inévitable de configurations réductibles. En effet, d'une part une configuration réductible ne peut pas apparaître dans un contre-exemple minimal à la conjecture et d'autre part tout graphe planaire possède au moins une configuration d'un système inévitable. Depuis principalement les travaux de Birkhoff [3] et Heesch [14], la réductibilité relève d'algorithmes (cf. [17] pour une mise au point théorique sur les diverses réductibilités définies depuis l'erreur de Kempe). C'est encore Heesch [14] qui devait introduire le principe de déchargement qui permet d'engendrer des systèmes inévitables (sorte de machinerie à tirer des conséquences de la relation d'Euler, à rapprocher de [4] qui se trouve repris dans [11]). A partir de cela et au terme de développements techniques considérables et d'investigations qui n'ont pû se faire, et ne peuvent se refaire, qu'avec des centaines d'heures de travail d'ordinateurs puissants, Appel et Haken [26] donnent un système de 1877 configurations, qui, enfin, conviendrait. Il est difficile de se prononcer sur les chances que des retombées de cette enquête informatique conduisent à une démonstration "à la main" ou au moins permettent de réduire la part des ordinateurs (à ce sujet cf. [27]).

Donnons quelques brèves indications sur la notion de configuration réductible et le principe de déchargement. Pour montrer la conjecture des quatre couleurs, il suffit de considérer les graphes planaires représentables triangulairement dans le plan, autrement dit, en identifiant un tel graphe et une représentation, de montrer que toute triangulation du plan est 4-coloriable. Raisonnant par l'absurde, considérons une triangulation du plan non 4-coloriable et minimale quant au nombre de sommets. D'une part, selon ce que l'on a déjà vu, il existe au moins un sommet de degré $\leq 5$, soit $s_0$, et d'autre part, par hypothèse, il existe un 4-coloriage, soit $C$, du sous-graphe engendré par les autres sommets. Evidemment si l'une des quatre couleurs n'est la couleur d'aucun sommet voisin de $s_0$ le 4-coloriage $C$ se prolonge en un 4-coloriage de la triangulation considérée en attribuant cette couleur à $s_0$, ce qui contredit l'hypothèse sur la triangulation. Il en résulte en particulier que le degré de $s_0$ n'est pas inférieur à 4. Supposons le degré de $s_0$ égal à 4 et les couleurs dans $C$ des quatre voisins de $s_0$, soient $s_1$, $s_2$, $s_3$ et $s_4$, différentes comme dans la figure ci-contre (qui représente l'unique cas à considérer ; les couleurs sont notées 1, 2, 3, 4). Si, dans le but de libérer la couleur 1 pour le sommet $s_0$, on change la couleur de $s_1$ de 1 en 3, il faudra, pour conserver un coloriage, changer aussi de 3 en 1 la couleur d'éventuels voisins de $s_1$ de couleur 3 dans $C$, puis changer encore de nouveau de 1 en 3 la couleur d'éventuels voisins de ces voisins de couleur 1 dans $C$, etc. On est ainsi amené à échanger les deux couleurs 1 et 3 sur un ensemble de sommets constituant ce qu'on appelle la composante bicolore 1 - 3 du sommet $s_1$, ou chaîne de Kempe. Si cette composante ne contient pas $s_3$, le but poursuivi est atteint : il est possible de prolonger à $s_0$ le nouveau coloriage en attribuant la couleur 1 à $s_0$. Sinon le même procédé recommencé à partir de $s_2$ au lieu de $s_1$ avec les couleurs 2 et 4 réussira nécessairement car <u>s'il existe une chaîne</u> 1 - 3 <u>joignant</u> $s_1$ <u>et</u> $s_3$, <u>il n'existe pas de chaîne</u> 2 - 4 <u>joignant</u> $s_2$ <u>et</u> $s_4$. Il est donc toujours possible de modifier le coloriage $C$ de façon à pouvoir le prolonger au sommet $s_0$. On dit que le sommet de degré 4 est une configuration réductible, et la triangulation considérée ne la contient pas. Il reste à considérer le cas où $s_0$ est de degré 5. Et là, on n'a pas réussi jusqu'à présent à étendre le procédé précédent. On a considéré pour remplacer d'autres configurations comportant au lieu d'un seul sommet un groupement de sommets à l'intérieur d'un circuit appelé circuit séparateur, car il sépare la configuration du reste de la triangulation considérée. (Les plus grosses configurations contenues dans le système de Appel et Haken ont un circuit séparateur de 14 sommets ; pour fixer



les idées précisons qu'un tel circuit possède 199291 coloriages non équivalents). Mais demeurait la principale difficulté pour montrer la réductibilité d'une configuration qui déjà pour le sommet de degré 5 avait occasionné l'erreur de Kempe et qui tient à l'effet d'un échange de deux couleurs sur les chaînes de Kempe du coloriage considéré. Précisément la D-réductibilité introduite par Heesch permet pour certaines configurations, mais pas par exemple pour le sommet de degré 5 qui n'est pas D-réductible, de tourner la difficulté en imposant d'envisager à chaque échange de couleurs toutes les situations possibles de chaînes de Kempe, qu'on considère par leurs traces sur le circuit séparateur, lesquelles n'ont qu'un nombre fini d'arrangements possibles. On a là un point essentiel qui a rendu possible de ramener le problème des quatre couleurs à l'examen d'un nombre élevé mais fini de cas.

Soit encore une triangulation du plan non 4-coloriable et minimale. On vient de le voir celle-ci ne contient pas de sommet de degré $\leq 4$ . Attribuons à chaque sommet une "charge" égale à $6-d$ où $d$ est le degré du sommet. Il est facile de déduire de la relation d'Euler que la somme de toutes ces charges est égale à $+12$ . Le principe de déchargement consiste à opérer suivant certaines règles des transferts de charges positives (qui sont au départ toutes sur les sommets de degré 5 ) et à déterminer tous les types de configurations où il peut se trouver une fois les transferts effectués des charges positives. La charge totale étant restée positive égale à $+12$ , la triangulation considérée contient au moins une de ces configurations qui constituent ainsi un système inévitable. Par exemple si la règle est de transférer de chaque sommet de degré 5 une charge de $\frac{1}{5}$ à tout voisin de degré $\geq 7$ , il ne reste de charge positive qu'en un sommet de degré 5 voisin d'un sommet de degré 5 ou 6 (les autres sommets de degré 5 sont complètement déchargés) ou en un sommet de degré 7 ayant au moins 6 voisins de degré 5 , ce qui donne encore deux sommets de degré 5 voisins. Cette procédure très simple donne le système inévitable constitué des deux configurations ci-contre (avec leurs circuits séparateurs), dont on ne sait pas non plus démontrer la réductibilité.



## 6. Du coloriage des cartes à la conjecture de Hadwiger

Il résulte du théorème suivant de Dirac [5] que, pour presque toutes les surfaces, le graphe complet est le seul graphe "critique" (au sens de minimal) atteignant la borne chromatique.

(6.1) Soit $G$ un graphe représentable dans un surface $S$ de caractéristique $< -1$ , si

$\chi(G) = \chi(\mathbb{S})$ , alors, on a $\omega(G) = \chi(G)$ .

Remarque.- Le graphe ci-contre est un contre-exemple pour la sphère. On peut en donner également pour $S = U_2$ .

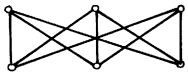
Dans le langage dual des cartes sur une surface $S$ qu'emprunte Dirac, cela signifie que toute carte de nombre chromatique $k$ égal au nombre chromatique de la surface contient $k$ régions deux à deux adjacentes. Pour les cartes telles que $k < \chi(S)$ cela n'est plus vrai en général, mais Dirac [6] observe dans certains cas, comme celui $k = \chi(S) - 1$ , qu'il y a toujours, à défaut de $k$ régions, $k$ unions de régions deux à deux adjacentes, où une union de régions est ce qui est obtenu en effaçant les frontières entre des régions choisies de façon que le résultat soit connexe. L'effacement de frontières correspond dans le graphe dual de la carte à la contraction d'arêtes. En termes de graphes, contracter une arête $a$ d'extrémités $s$ et $s'$ d'un graphe $G$ , c'est enlever $a$ (et ses arcs associés) et identifier $s$ et $s'$ en un seul sommet qui sera alors extrémité de toutes les arêtes dont $s$ ou $s'$ était extrémité dans $G$ . Un graphe obtenu par une suite de contractions d'arêtes est appelé un contracté. Comme l'opération de contraction d'arête peut s'effectuer sur une représentation dans une surface, si un graphe est représentable dans une surface, tous ses contractés le sont également. Ce qu'observait donc dualement Dirac, dans certains cas de graphes représentables dans une surface, est que si un graphe est de nombre chromatique $k$ , alors il possède un contracté complet à $k$ sommets, c'est-à-dire $K_k$ . Si on extrapole cet énoncé à tous les cas, la représentabilité dans une surface ne joue plus aucun rôle (un graphe est toujours représentable dans au moins une surface), et on rejoint là exactement la conjecture déjà posée par Hadwiger (cf. [7]) qui tente d'expliciter ce lien profond entre nombre chromatique et graphe complet. Posons le nouveau paramètre de graphe : le plus grand nombre de sommets des contractés complets du graphe $G$ , noté $\zeta(G)$ .

(6.2) Conjecture de Hadwiger.- Pour tout graphe connexe $G$ , on a $\chi(G) \leq \zeta(G)$ .

Remarque.- On peut avoir $\chi(G) < \zeta(G)$ . Par exemple, avec le graphe ci-contre où $\chi(G) = 2$ et $\zeta(G) = 3$ . Rappelons que l'on a aussi $\chi(G) \geq \omega(G)$ .

Cette conjecture peut être décomposée suivant les entiers positifs $n$ : si $\chi(G) \geq n$ , alors $\zeta(G) \geq n$ , autrement dit si un graphe $G$ n'est pas $(n-1)$-coloriable, alors il admet le graphe complet $K_n$ comme contracté. Cette proposition pour $n = 5$ entraîne trivialement le théorème des 4 couleurs : en effet, si un

graphe non 4-coloriable admet $K_5$ comme contracté, il n'est pas planaire car $K_5$ ne l'est pas. Dans cette optique, Mader [13] démontrait directement qu'un graphe non 4-coloriable admet comme contracté $K_5$ ou l'icosaèdre (soit dans les deux cas $K_5$ moins une arête). En fait, il y a équivalence, mais la réciproque est beaucoup moins simple à montrer (due à Wagner [8], démonstration simplifiée dans Ore [11]) : le théorème des 4 couleurs entraîne la conjecture de Hadwiger pour $n = 5$ (et par voie de conséquence pour $n < 5$ ) à savoir qu'un graphe n'admettant pas comme contracté $K_5$ est 4-coloriable. Or, par ailleurs suivant une caractérisation issue du classique théorème de Kuratowski les graphes planaires sont ceux n'admettant pas comme contracté $K_5$ ou le graphe ci-contre (avec éventuellement des arêtes supplémentaires).



Ainsi, l'hypothèse de planarité faite dans le théorème des quatre couleurs n'est pas la meilleure puisqu'en fait le graphe complet $K_5$ est l'unique obstruction au "4-chromatisme".

La conjecture de Hadwiger est parmi les nombreux problèmes de coloration encore non résolus un des plus intéressants.

BIBLIOGRAPHIE

On trouvera dans la référence [18] suivante une bibliographie très complète sur le théorème du coloriage des cartes. Nous n'en recopions que les références explicitement citées, et complétons par des publications plus récentes ou citées sur les sujets reliés évoqués.

[1] A. B. KEMPE - On the geographical problem of the four colours, Amer. J. Math., 2(1879), 193-200.

[2] P. J. HEAWOOD - Map colour theorem, Quart. J. Math., 24(1890), 332-338.

[3] G. D. BIRKHOFF - The reducibility of maps, Amer. J. Math., 35(1913), 114-128.

[4] H. LEBESGUE - Quelques conséquences simples de la formule d'Euler, J. de Math., 9, Sér. 19 (1940), 27-43.

[5] G. A. DIRAC - Map-colour theorems, Can. J. Math., 4(1952), 480-490. Repris dans Short proof of a map-colour theorem, Can. J. Math., 9(1957), 225-226.

[6] G. A. DIRAC - Map-colour theorems related to the Heawood colour formula, J. Lond. Math. Soc., 31(1956), 460-471 et 32(1957), 436-455.

[7] H. HADWIGER - Ungelöste Probleme, Element. Math., 13(1958), 127-128.

[8] K. WAGNER - Bemerkungen zur Hadwigers Vermutung, Math. Annalen, 141(1960), 433-451.

[9] J. W. T. YOUNGS - Minimal imbeddings and the genus of a graph, J. Math. Mech., 12(1963), 303-314.

[10] W. GUSTIN - Orientable embedding of Cayley graphs, Bull. Amer. Math. Soc., 69 (1963), 272-275.

[11] O. ORE - The four-color problem, Pure and Applied Maths., 27, Acad. Press New York-London, 1967.

[12] J. W. T. YOUNGS - The Heawood map-colouring conjecture, Chapter 12 in Graph Theory and Theoretical physics (F. Harary ed.), Acad. Press New York-London, 1967, 313-354.

[13] W. MADER - Homomorphiesätze für Graphen, Math. Annalen, 178(1968), 154-168.

[14] H. HEESCH - Untersuchungen zum Vierfarbenproblem, B.I. Hochschulskripten 810/810a/810b, Bibliographische Institute Mannheim-Vienna-Zürich, 1969.

[15] N. BIGGS - Classification of complete maps on orientable surfaces, Rend. Matematica (VI), 4(1971), 645-655.

[16] H. MAHNKE - The necessity of non-abelian groups in the case 0 of the Heawood map-coloring theorem, J. Comb.Theory, 13(1972), 263-265.

[17] W. TUTTE - H. WHITNEY - Kempe chains and the four color problem, Utilitas Mathemetica, 2(1972), 241-281.

[18] G. RINGEL - Map color theorem, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 209, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974, 191 pages.

[19] M. JUNGERMAN - Orientable triangular embeddings of $K_{18} - K_3$ and $K_{13} - K_3$, J. Comb. Theory (B),16(1974), 293-294.

[20] J. L. GROSS - Voltage graphs, Discrete Mathematics, 9(1974), 239-246.

[21] J. L. GROSS - T. W. TUCKER - Quotients of complete graphs : revisiting the Heawood map-colouring problem, Pacific J. Math., 55(1974), 391-402.

[22] M. JUNGERMAN - The genus of $K_n - K_2$, J. Comb. Theory (B),18(1975), 53-58.

[23] M. JUNGERMAN - A new solution for the non-orientable case 1 of the Heawood map color theorem, J. Comb. Theory (B),19(1975), 69-71.

[24] S. R. ALPERT - J. L. GROSS - Components of branched coverings of current graphs, J. Comb. Theory (B), 20(1976), 283-303.

[25] G. RINGEL - The combinatorial map color theorem, J. Graph Theory 1 (Summer 1977), 141-155.

à paraître :

[26] K. APPEL - W. HAKEN - Every planar map is four colorable, Part I : discharging, Part II : reducibility, Illinois J. Math.

[27] K. APPEL - W. HAKEN - J. MAYER - Triangulations à $V_5$ séparés dans le problème des quatre couleurs.

[28] R. RINGEL - Non-existence of graph embeddings, Theory and Applications of graphs, Springer-Verlag.

[29] M. JUNGERMAN - D. J. PENGELLEY - Index four orientable embeddings and case zero of the Heawood conjecture, J. Comb. Theory (B) ~ August 1978.

[30] J. L. GROSS - T. W. TUCKER - Generating all graph coverings by permutation voltage assignments.