JEAN-PIERRE RAMIS

Frobenius avec singularités

Séminaire N. Bourbaki, 1979, exp. nº 523, p. 290-299

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1977-1978__20__290_0>

Séminaire BOURBAKI 523-01
30e année, 1977/78, n° 523 Juin 1978

FROBENIUS AVEC SINGULARITÉS

[d'après B. MALGRANGE, J. F. MATTEI et R. MOUSSU]

par Jean-Pierre RAMIS

L'étude des singularités locales des formes différentielles holomorphes (ou plus généralement des systèmes de Pfaff) a été quelque peu négligée depuis quelques décades. Cette situation est en train de changer et des progrès importants ont été faits récemment. Ce qui suit concerne le problème de l'existence d'intégrales premières pour des formes (ou des systèmes) intégrables. La plus grande partie de l'exposé sera consacrée à la codimension 1 ; l'étude de la codimension quelconque met en oeuvre le même genre d'idées mais il y a d'assez importantes difficultés techniques et je me contenterai d'énoncer les principaux résultats. Pour la codimension 1, je donnerai deux approches un peu différentes (respectivement celles de Malgrange [4] et Mattei-Moussu [6]) ; j'étudierai assez en détail le cas d'une singularité isolée en dimension 2 qui présente déjà une bonne partie des difficultés du cas général. (On peut d'ailleurs penser que plus généralement l'élucidation du cas des singularités isolées des formes différentielles holomorphes en dimension 2 serait un grand pas, qui malheureusement est bien loin d'être franchi ; cf. par exemple Ramis [8].)

0. Introduction

Dans toute la suite ω désignera le germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ d'une forme différentielle holomorphe de degré 1 : $\omega = \Sigma\, a_i\, dx_i$; on notera $S(\omega)$ le germe en 0 du lien singulier de ω : $S(\omega) = V(a_1,\dots,a_n)$.

DÉFINITION 0.1.- On dira que ω est intégrable si $\omega \wedge d\omega = 0$.

Notations : On désignera par $\mathcal{O}_n$ (resp. $\hat{\mathcal{O}}_n$) l'anneau des séries convergentes (resp. formelles) à n variables complexes.

DÉFINITION 0.2.- On dira que ω admet une intégrale première holomorphe (resp. formelle) s'il existe f et $g \in \mathcal{O}_n$ (resp. $\hat{\mathcal{O}}_n$), avec $f(0) \neq 0$ et $\omega = f\, dg$.

Il est clair que si cette condition est vérifiée (de manière convergente ou formelle) ω est intégrable. Nous allons étudier la réciproque.

Cette réciproque est évidemment vraie quand $S(\omega) = \emptyset$ (Frobenius). Si l'on excepte un certain nombre de cas particuliers que l'on peut trouver dans des travaux "anciens" [1], le premier progrès dans l'étude du cas $S(\omega) \neq \emptyset$ est dû à G. Reeb ([10], 1952) : on suppose $n \geq 3$, $S(\omega) = \{0\}$; le rang de la matrice $\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(0)\right)$ est indépendant des coordonnées et, si ce rang est supérieur ou égal à 3, cette matrice est symétrique, de plus on a le

THÉORÈME 0.3 (G. Reeb [10]).- Si ce rang est maximum, ω admet une intégrale première holomorphe.

Pour établir ce résultat, on se ramène d'abord au cas où $\omega = x_1\,dx_1 + \ldots + x_n\,dx_n$ + termes d'ordre ≥ 2 par un changement de coordonnées. On utilise ensuite l'application $\psi : \Sigma_{n-1} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ et la forme $\psi^*(\omega) = \omega^*$ (Σ_{n-1} est défini dans $\mathbb{C}^n$ par $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ et $\psi(u,\rho) = \rho u$) : $\omega^* = \rho\,d\rho + \rho^2\omega_2^* + \ldots + \rho^p\omega_p^* + \ldots$; on construit ensuite une intégrale de ω^*/ρ de la forme $g = \rho^2 + \rho^3 f_3 + \ldots + \rho^p f_p + \ldots$.

Plus récemment (1976), R. Moussu a repris le problème et obtenu (entre autres) le résultat suivant [2] :

THÉORÈME 0.4 (R. Moussu [7]).- Soit ω une forme différentielle holomorphe intégrable, de degré 1 . Si codim $S(\omega) \geq 3$, alors ω admet une intégrale première formelle.

R. Moussu propose deux démonstrations de ce résultat ; nous reviendrons sur l'une de ces démonstrations dont l'idée est due à J. Martinet.

Enfin l'état actuel de la question est donné par les résultats suivants :

THÉORÈME 0.5 (B. Malgrange [4]).- Soit ω une forme différentielle holomorphe intégrable de degré 1 :

(i) Si codim $S(\omega) \geq 3$, alors ω admet une intégrale première holomorphe ;

(ii) Si codim $S(\omega) \geq 2$ et si ω admet une intégrale première formelle, alors ω admet une intégrale première holomorphe.

Ce dernier Théorème a été récemment précisé par Mattei et Moussu [6] :

THÉORÈME 0.6.- Soit ω une forme différentielle holomorphe intégrable de degré 1 .

---

[1] Painlevé, Dulac,...

[2] Il y a aussi des résultats analytiques et $\mathcal{C}^\infty$ dont nous ne parlons pas.

S'il existe un germe d'application holomorphe $h : (\mathbb{C}^r,0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n,0)$ tel que $\operatorname{codim} S(h^*\omega) \geq 2$, et que $h^*\omega$ possède une intégrale première formelle, alors ω possède une intégrale première holomorphe.

Si $\operatorname{codim} S(\omega) \geq 3$, ω possède une intégrale première formelle (Th. 0.4) ; il en est donc de même de $h^*\omega$. Le théorème 0.5 résulte donc du théorème 0.6 pourvu que l'on choisisse h de façon adéquate, ce qui est possible d'après la

PROPOSITION 0.7 (Mattei et Moussu [6]).- Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe, quel que soit l'entier $p < m$, il existe un plongement $i : (\mathbb{C}^p,0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n,0)$ tel que $S(i^*\omega) = i^{-1}(S(\omega))$ et $\operatorname{codim} S(i^*\omega) = \inf(\operatorname{codim} S(\omega)\, , p)$.

I. Le cas formel

Soit Ω^p l'espace des germes de p-formes différentielles holomorphes en 0 dans $\mathbb{C}^n$; pour $\omega \in \Omega^1$, non identiquement nulle, on considère le complexe

$$K(\omega) : 0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \Omega^1 \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \Omega^n \longrightarrow 0 \ , \qquad \text{avec } \delta(\alpha) = \omega\wedge\alpha \ .$$

Notons toujours $\omega = \sum_i a_i\, dx_i$ et $S(\omega)$ son lien singulier.

PROPOSITION 1.1 (Malgrange [4] appendice, ou Saito [11]).- Pour un entier $1 \leq p \leq n$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\operatorname{codim} S(\omega) \geq p$;

(ii) $H^i(K(\omega)) = 0$, $i = 0,\dots, p-1$;

(iii) $H^{p-1}(K(\omega)) = 0$.

Le raisonnement de Martinet et Moussu est alors le suivant $(\operatorname{codim} S(\omega) \geq 3)$: $\omega \wedge d\omega = 0$ implique $(H^2(K(\omega)) = 0)$ l'existence de $\omega_1 \in \Omega^1$ vérifiant $d\omega = \omega \wedge \omega_1$; par différenciation, on en déduit $\omega \wedge d\omega_1 = 0$, et l'existence de $\omega_2 \in \Omega^1$ satisfaisant à $d\omega_1 = \omega \wedge \omega_2$ ... On obtient ainsi (cf. Godbillon-Vey [2]) une suite de formes $\omega_p \in \Omega^1$ $(p \geq 0)$, vérifiant $\omega_o = \omega$ et

$$(\mathrm{GV}.p+1) \qquad d\omega_p = \omega_o \wedge \omega_{p+1} + \sum_{1\leq q\leq p} \binom{p}{q}\, \omega_q \wedge \omega_{p-q+1} \ .$$

On considère alors la forme à coefficients dans $\hat{\mathcal{O}}_{n+1}$: $\alpha = dt + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p}{p!}\, \omega_p$.

On vérifie facilement que $d\alpha = \alpha \wedge \left(\sum_p \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\, \omega_p\right)$, d'où $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

La forme α étant non singulière à l'origine, le théorème de Frobenius formel montre qu'il existe F et $G \in \hat{\mathcal{O}}_{n+1}$, avec $F(0) \neq 0$ et $\alpha = F\,dG$; il suffit de faire $t = 0$ pour obtenir un facteur intégrant formel pour ω .

On n'a pas fait autre chose que prolonger ω en une forme α intégrable non singulière sur le complété formel de $(\mathbb{C}^n,0)$ dans $(\mathbb{C}^{n+1},0)$. L'idée de départ de Malgrange [4] a été de faire la même chose, mais de manière convergente. Nous y reviendrons.

II. Le cas convergent : la méthode de Mattei et Moussu

Nous commencerons à exposer le résultat de Mattei et Moussu [6], ce qui nous permettra de détailler la situation en dimension 2 . Le théorème 0.6 résulte des deux propositions suivantes :

PROPOSITION 2.1.- Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de 1-forme holomorphe, avec $S(\omega) = \{0\}$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) ω possède une intégrale première formelle.

(ii) ω possède une intégrale première holomorphe.

PROPOSITION 2.2.- Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe intégrable. Supposons qu'il existe un plongement $i : (\mathbb{C}^r,0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n,0)$ tel que $\operatorname{codim} S(i^*\omega) \geq 2$. Alors ω possède une intégrale première holomorphe (resp. formelle) dès que $i^*\omega$ possède une intégrale première holomorphe (resp. formelle).

La démonstration de la proposition 2.1 repose sur un résultat de Brjuno [1], modulo un argument de désingularisation :

THÉORÈME 2.3 (Brjuno [1], p. 140 et 147).- Soit η un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de 1-forme holomorphe, dont le jet à l'ordre 1 s'écrit $j^1\eta = \alpha y\,dx + \beta x\,dy$, avec α et $\beta \in \mathbb{N}$ premiers entre eux ; alors il existe $A , B \in \hat{\mathcal{O}}_1$ et $X , Y \in \hat{\mathcal{O}}_2$, tels que :

(i) $X = x + \sum_{i,j>1} a_{ij}\, x^i z^j \quad , \qquad Y = y + \sum_{i,j>1} b_{ij}\, x^i y^j \;;$

avec $a_{ij} = b_{ij} = 0$ si $\alpha j = \beta i$.

(ii) $\eta = (A(X^\alpha Y^\beta)Y dX + B(X^\alpha Y^\beta)X dY)\,\dfrac{D(x,y)}{D(X,Y)}$.

De plus, si $\beta A = \alpha B$, alors $X , Y , A(X^\alpha Y^\beta)$ et $B(X^\alpha Y^\beta) \in \mathcal{O}_2$ (i.e. convergent).

<u>Remarque</u>.- Ce type de forme η a été également étudié par l'école japonaise (cf. [3] et [8]).

Nous appellerons éclatement tout germe d'application analytique $\pi : (\mathbb{C}^2,0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2,0)$ composé d'automorphismes algébriques de $(\mathbb{C}^2,0)$ et d'éclatements de Hopf $((x,y) \longmapsto (xy,y))$. On vérifie facilement "à la main" que, si $F \in \hat{\mathcal{O}}_2$ et $F \circ \pi \in \mathcal{O}_2$, alors $F \in \mathcal{O}_2$. (On a en fait un isomorphisme naturel

$\hat{\mathcal{O}}_2 / \mathcal{O}_2$ "en bas" $\longrightarrow \pi_*(\hat{\mathcal{O}}_2 / \mathcal{O}_2)$; résultat qui s'étend en dimension quelconque et à des éclatements très généraux, Ramis [9].)

Soit ω comme dans la proposition 2.1 ; supposons la condition (i) satisfaite : $\omega = f\,dg$ avec f , $g \in \hat{\mathcal{O}}_2$ et $f(0) \neq 0$.

On montre l'existence de $\ell \in \hat{\mathcal{O}}_1$, $\ell(0) = 0$, $\ell'(0) \neq 0$ tel que $\ell \circ g \in \mathcal{O}_2$, ce qui implique la condition (ii). D'après $S(\omega) = \{0\}$ et $f(0) \neq 0$, on voit que

$$g = g_1 \dots g_k \quad , \text{ avec } g_i \text{ irréductible dans } \hat{\mathcal{O}}_2 \text{ et } g_i \neq g_j \text{ pour } i \neq j .$$

En reprenant la méthode classique de désingularisation des courbes, on trouve un éclatement π tel que

$$g \circ \pi(x,y) = (y - H(x))x^{\alpha} h(x,y) = G(x,y) \text{ , avec } \alpha \in \mathbb{N} \text{ , } h \in \hat{\mathcal{O}}_2 \text{ , } h(0) \neq 0$$

et $H \in (x^2)\hat{\mathcal{O}}_1$. Il suffit alors de trouver $\ell \in \hat{\mathcal{O}}_2$ tel que $\ell \circ G \in \mathcal{O}_2$ pour terminer la démonstration.

On a $\pi^*(\omega) = (f \circ \pi)\, dG = f(0)h(0)x^{\alpha-1}\omega_1$, où ω_1 admet pour 1-jet $j^1\omega_1 = \alpha\, y\, dx + x\, dy$. On lui applique le résultat de Brjuno (théorème 2.3). On obtient X , $Y \in \hat{\mathcal{O}}_2$ et A , $B \in \hat{\mathcal{O}}_1$ vérifiant (i) et (ii).

Soient $G_1 \in \hat{\mathcal{O}}_2$ et $\ell_1 \in \mathcal{O}_1$ définis par :

$$G(x,y) = G_1(X,Y) = \sum_{i,j>0} c_{ij} X^i Y^j$$

$$\ell_1(Z) = \sum_{r>0} c_{r\alpha,r}\, Z^r .$$

De la condition $\omega_1 \wedge dG = 0$, on déduit :

(i) $A = \alpha B$ et X et Y convergent.

(ii) $G_1(X,Y) = \ell_1(X^{\alpha}Y)$ et $\ell_1'(0) \neq 0$. Il suffit de poser $\ell = \ell_1^{-1}$; la série $\ell \circ G = X^{\alpha}Y$ est convergente.

Passons à la démonstration de la proposition 2.2.

L'argument est analogue, en plus simple, à un argument de Malgrange [4] sur lequel nous reviendrons. (On bénéficie ici de l'unicité du processus.)

Notations : Soit $\rho = (\rho_1,\dots,\rho_n)$ $(\rho_i > 0)$; pour $f = \Sigma\, a_{\alpha} x^{\alpha} \in \mathcal{O}_m$, on pose $|f|_{\rho} = \Sigma\, |a_{\alpha}|\rho^{\alpha}$; pour $\omega = \Sigma\, a_i\, dx_i$, on pose $|\omega|_{\rho} = \sum_i |a_i|_{\rho}$. Le sous-espace de $\mathcal{O}_m$ (resp. Ω^1_m) sur lequel la pseudonorme $|\ |_{\rho}$ est finie est noté $\mathcal{O}_m(\rho)$ (resp. $\Omega^1_m(\rho)$).

Par récurrence sur r , on peut supposer que $r = n - 1$ et noter $(x_1,\dots,x_r , t)$ les coordonnées de $\mathbb{C}^n$.

On utilise de façon essentielle le résultat élémentaire :

Lemme 2.4.- Soit $\omega \in \Omega^1_n$, avec codim $S(\omega) \geq 2$. Quel que soit $\pi \in \Omega^1_n$, avec $\omega \wedge \pi = 0$, il existe $g \in \mathcal{O}_n$ tel que $g\omega = \pi$. De plus, il existe $K > 0$ et ρ tel que si $\pi \in \Omega(\rho)$, alors $g \in \mathcal{O}(\rho)$ et $|g|_{t\rho} \leq K|\pi|_{t\rho}$, si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Remarque.- Un argument fondamental de Malgrange [4] est le théorème 3.2 (cf. dessous) qui est une extension (non triviale !) de ce lemme.

Soit maintenant $\omega \in \Omega^1_n$ $(n = r + 1)$ intégrable ; on écrit $\omega = \sum_{n \geq 0} t^n (\omega_n + a_n\, dt)$ son développement de Taylor en t . On suppose que :

(i) codim $S(\omega_0) \geq 2$ et $\omega_0 = d\gamma_0$, avec $\gamma_0 \in \mathcal{O}(\rho)$.

(ii) $\omega_n \in \Omega^1_r(\rho)$, $a_n \in \mathcal{O}_r(\rho)$ $(n \geq 0)$.

(iii) $\sum_{n \geq 0} (|a_n|_\rho + |\omega_n|_\rho)t^n$ a un rayon de convergence > 0 .

Une construction par récurrence (formellement voisine de celle employée par Reeb [10]) permet d'obtenir :

(iv) Il existe une suite unique $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$ d'éléments de $O_r(\rho)$ telle que

$$\omega \wedge d(\sum_{n \geq 0} t^n f_n) = 0 .$$

On termine en prouvant

(v) La série $\sum_{n \geq 0} |f_n|_{\rho/2}\, t^n$ est convergente.

L'argument est le même que celui employé par Malgrange dans [4].

III. Le cas convergent : la méthode de Malgrange

On établit d'abord la Proposition suivante :

PROPOSITION 3.1. (Malgrange [4]).- Etant donné $\omega = \omega_0$, non identiquement nul, supposons que pour n'importe quel choix de $\omega_1, \ldots, \omega_p \in \Omega^1$ vérifiant (GV.1),..., (GV.p) , on puisse trouver $\omega_{p+1} \in \Omega^1$ vérifiant (GV.p+1) . Alors ω possède une intégrale première holomorphe.

On montre que l'on peut modifier le choix des $\omega_p \in \Omega^1$ de telle sorte que la série $\sum_p \frac{t^p}{p!}\omega_p$ soit convergente. On utilise pour cela une amélioration du théorème des voisinages privilégiés : On reprend les notations de II. Soit $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$ $(\rho_i > 0)$; on pose, pour $f = (f_1, \ldots, f_p) \in \mathcal{O}^p$, $|f|_\rho = \sum_i |f_i|_\rho$; $P(\rho) = \{x \mid |x_i| < \rho_i\}$. Soit $u : \mathcal{O}^q \longrightarrow \mathcal{O}^p$ une application

$\mathcal{O}$-linéaire. Pour tout ρ assez petit u induit une application continue $\mathcal{O}^q(\rho) \longrightarrow \mathcal{O}^p(\rho)$. On dira qu'une application $\mathbb{C}$-linéaire $\Lambda : \mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{O}^q$ est une scission de u si $u\Lambda u = u$. On dira d'autre part que Λ est adapté à ρ s'il existe $c > 0$ tel que l'on ait, pour $f \in \mathcal{O}^p$ et $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, $|\Lambda f|_{t\rho} \leq c|f|_{t\rho}$.

On a alors :

THÉORÈME 3.2 (Malgrange [4]).- Soient $\{u_i\}$ des matrices à coefficients dans $\mathcal{O}$ en nombre fini. On peut trouver des scissions Λ_i telles que l'ensemble des polydisques $P(\rho)$ tels que les Λ_i soient simultanément adaptées à ρ forme un système fondamental de voisinages de 0 .

Appliquons ce résultat à la situation précédente : On choisit $\rho = (\rho_1,\ldots,\rho_n)$ tel que $\omega_o\wedge\ : \Omega^1 \longrightarrow \Omega^2$ soit adaptée à ρ et $|\omega_o|_\rho < +\infty$. On peut alors construire par récurrence les ω_p vérifiant, pour $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ et $c > 0$ convenable :

$$|\omega_{p+1}|_{t\rho} \leq c(|d\omega_p|_{t\rho} + \sum_{1\leq q\leq p} \binom{p}{q} |\omega_q|_{t\rho}|\omega_{p-q+1}|_{t\rho}) \quad .$$

Malgrange utilise ensuite la "méthode de Gevrey".

On a le lemme élémentaire :

<u>Lemme</u> 3.3.- Il existe $c_1 > 0$ tel que, pour $\omega \in \Omega^1$ et $\frac{1}{2} \leq t < s \leq 1$:

$$|d\omega|_{t\rho} \leq \frac{c_1}{s-t} |\omega|_{s\rho} \ .$$

On en déduit l'inégalité :

$$|\omega_{p+1}|_{t\rho} \leq \frac{c'}{s-t} |\omega_p|_{s\rho} + c \sum_{1\leq q\leq p} \binom{p}{q} |\omega_q|_{t\rho} \cdot |\omega_{p-q+1}|_{t\rho} \ .$$

On définit une suite $\{v_p\}$ de réels > 0 par :

$$v_o = |\omega_o|_\rho$$

$$v_{p+1} = c'\,e\,v_p + c \sum_{1\leq q\leq p} v_q v_{p-q+1} \ .$$

On a $\quad |\omega_p|_{t\rho} \leq p!v_p/(1-t)^p \qquad (\frac{1}{2} \leq t < 1)$.

(On choisit $1 - s = (p/p+1)(1-t)$ et utilise $(1+\frac{1}{p}) < e$.)

Il reste à vérifier que la série $F(t) = \sum_p v_p t^p$ est convergente, ce qui résulte immédiatement de l'équation $F(t) = c'\,e\,v_o t + c'\,e\,t\,F(t) + cF(t)^2$. On a ainsi terminé la démonstration de la proposition 3.1. Les conditions de cette proposition sont satisfaites si codim $S(\omega) \geq 3$ (cf. l'étude formelle faite en I). Le théorème 0.5 (i) s'en déduit immédiatement. Il reste à prouver le théorème 0.5 (ii) ;

on va montrer pour cela que si codim $S(\omega) \geq 2$ et si ω admet une intégrale première formelle les conditions de la proposition 3.1 sont également satisfaites.

Posons $\alpha_p = dt + \omega_o + \ldots + \omega_p \frac{t^p}{p!}$. On constate facilement que pour que (GV.i) $(i = 1,\ldots,p)$ soit satisfaite il faut et il suffit que le développement de $\alpha_p \wedge d\alpha_p$ suivant les puissances de t ne contienne pas de termes de degré $\leq p-1$ $(\alpha_p \wedge d\alpha_p \equiv 0 \pmod{t^p})$.

On considère alors des automorphismes analytiques F de $\mathbb{C}^{n+1}$ au voisinage de 0, de la forme $x_i' = x_i$, $t' = t + f(x,t)$, avec $f(x,0) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = 0$; on a

$$F^*(\alpha) = (1 + \frac{\partial f}{\partial t})(dt + \sum_k \omega_k' \frac{t^k}{k!}) \qquad (\omega_o' = \omega_o) \quad ;$$

on pose $\alpha_{Fp} = dt + \sum_{k=0,\ldots,p} \omega_k' \frac{t^k}{k!}$ et on vérifie que $\alpha_{Fp} \wedge d\alpha_{Fp} \equiv 0 \pmod{t^p}$; il en résulte que $\omega_o',\ldots,\omega_p'$ vérifient (GV.i) $(i = 1,\ldots,p)$.

<u>Lemme</u> 3.4.- Si codim $S(\omega) \geq 2$ (i.e. $H^1(K(\omega)) = 0$). Si $\omega_o' = \omega$, $\omega_1',\ldots,\omega_p'$ vérifient (GV.i) $(i = 1,\ldots,p)$, il existe un automorphisme analytique F comme ci-dessus tel que

$$\alpha_{Fp} = dt + \omega_o' + \ldots + \omega_p' \frac{t^p}{p!} \quad .$$

La démonstration est alors terminée une fois établie la proposition 3.5.

Supposons que $\omega = \omega_o$ admette une intégrale première formelle et que codim $S(\omega) \geq 2$. Alors, pour toute suite $\omega_o' = \omega_o$, $\omega_1',\ldots,\omega_p'$ vérifiant (GV.i) $(i = 1,\ldots,p)$, on peut trouver $\omega_{p+1}' \in \Omega^1$ vérifiant (GV.p+1).

De $\omega = f\, dg$ $(f, g \in \hat{\mathcal{O}}$; $f(0) \neq 0)$, on déduit que ω admet une suite infinie de Godbillon-Vey formelle $(\omega_1 = -f^{-1} df$ et $\omega_p = 0$ pour $p \geq 1)$; $\alpha = dt + \omega_o + t\omega_1$.

Soit $\hat{K}(\omega)$ la version formelle de $K(\omega)$; on a aussi $H^1(\hat{K}(\omega)) = 0$ ($\hat{\mathcal{O}}$ est plat sur $\mathcal{O}$) et la version formelle du lemme 3.4. Il existe donc un automorphisme formel F (de la forme précisée plus haut) tel que

$$\left(1 + \frac{\partial f}{\partial t}\right)^{-1} F^*(\alpha) \equiv dt + \omega_o + \omega_1' t + \ldots + \omega_p' \frac{t^p}{p!} \pmod{t^{p+1}} .$$

Il suffit de prendre ω_{p+1}' égal au coefficient de $\frac{t^{p+1}}{(p+1)!}$ dans le développement de $\left(1 + \frac{\partial f}{\partial t}\right)^{-1} F^*(\alpha)$; ω_{p+1}' est à coefficients dans $\hat{\mathcal{O}}$ et vérifie (GV.p+1) ;

la convergence de $\omega'_o,\ldots,\omega'_p$ et la fidèle platitude de $\hat{\mathcal{O}}$ sur $\mathcal{O}$ permet de trouver un autre ω'_{p+1} à coefficients dans $\mathcal{O}$ et vérifiant (GV.p+1).

IV. La codimension quelconque (Malgrange [5])

Nous n'entrerons pas dans les détails techniques du cas général et nous contenterons de l'énoncé du résultat fondamental qui généralise le théorème 0.5.

Soit $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_p) \in (\Omega^1)^p$. Le système ω est dit intégrable (resp. formellement intégrable) s'il existe $f_1,\ldots,f_p \in \mathcal{O}$ (resp. $\hat{\mathcal{O}}$) et $g_{ij} \in \mathcal{O}$ (resp. $\hat{\mathcal{O}}$), i , $j \in [1,\ldots,p]$ tels que

a) $\omega_i = \sum_i g_{ij}\, df_j$;

b) $\det g_{ij}(0) \neq 0$.

On note toujours $S(\omega)$ l'ensemble des zéros de $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p$.

THÉORÈME 4.1.- (i) Si $\operatorname{Codim} S(\omega) \geq 3$ et $d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p = 0$ $(i = 1,\ldots,p)$, ω est intégrable.

(ii) Si $\operatorname{Codim} S(\omega) \geq 2$ et si ω est formellement intégrable, ω est intégrable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. D. BRJUNO - Analytic form of differential equations, Trans. Moscow Mathematical Soc., 25, (1971), pp. 131-282.

[2] C. GODBILLON, J. VEY - Un invariant des feuilletages de codimension un, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 273, (1971), pp. 92-95.

[3] M. HUKUHARA, R. KIMURA, T. MATUDA - Equations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1961.

[4] B. MALGRANGE - Frobenius avec singularités, 1. Codimension un, Public. Sc. I.H.E.S., 46 (1976), pp. 163-173.

[5] B. MALGRANGE - Frobenius avec singularités, 2. Le cas général, à paraître.

[6] J. F. MATTEI, R. MOUSSU - Intégrales premières d'une forme de Pfaff analytique, Preprint, Univ. de Dijon, 1977.

[7] R. MOUSSU - Sur l'existence d'intégrales premières pour un germe de forme de Pfaff, Annales Inst. Fourier, 26-2, (1976), pp. 171-220.

[8] J.-P. RAMIS - Etude locale des singularités des équations différentielles dans le plan complexe, Rencontre de Cargèse sur les Singularités et leurs applications, (1975), pp. 114-125.

[9] J.-P. RAMIS - Variations sur le thème "GAGA", à paraître dans le "Séminaire P. Lelong 1976/77", Lecture Notes in Math., vol. 694 , 1978, Springer-Verlag, Berlin.

[10] G. REEB - Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Hermann, Paris, 1952.

[11] K. SAITO - On a generalization of the de Rham Lemma, Annales Inst. Fourier, 28-2, (1976).