Jean-Paul Thouvenot

La démonstration de Furstenberg du théorème de Szemerédi sur les progressions arithmétiques

Séminaire N. Bourbaki, 1979, exp. nº 518, p. 221-232
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1977-1978__20__221_0>

Séminaire BOURBAKI 518-01
30e année, 1977/78, n° 518 Février 1978

LA DÉMONSTRATION DE FURSTENBERG DU THÉORÈME DE SZEMERÉDI SUR LES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES

par Jean-Paul THOUVENOT

Introduction

En 1936, Erdös et Turán ont conjecturé que dans toute suite d'entiers de densité positive, on peut trouver des progressions arithmétiques de longueur arbitraire. K. F. Roth [4] a montré que c'était vrai pour les progressions de longueur 3 et E. Szemerédi a démontré la conjecture en toute généralité dans [5]. Sa démonstration est combinatoire. H. Furstenberg a donné dans [2] une démonstration entièrement différente du Théorème de Szemerédi après l'avoir traduit en un énoncé équivalent dans le cadre de la théorie ergodique. Nous donnons ici une présentation de son travail. La stratégie que nous suivons est essentiellement conforme à celle de [2], et il n'y a, même dans les étapes intermédiaires, aucun résultat qui ne soit pratiquement contenu dans [2]. Mais le point de vue général, les démonstrations, sont souvent différents. Ce point de vue, toutes ces démonstrations sont dus à la collaboration de D. Ornstein, Y. Katznelson et S. Varadhan et ont été exposés à Paris VI. par Y. Katznelson dans son cours de 3ème cycle (Automne 1977).

DÉFINITION 1.- <u>Une partie</u> E <u>de</u> $\mathbb{Z}$ <u>est dite de densité asymptotique positive s'il existe un nombre</u> α <u>strictement positif et deux suites d'entiers</u> N_ℓ , M_ℓ , $\ell \geq 1$, <u>telles que</u> :

(a) $N_\ell - M_\ell \longrightarrow +\infty$ <u>quand</u> $\ell \longrightarrow +\infty$,

(b) $\dfrac{1}{N_\ell - M_\ell}\ \mathrm{card}(E \cap [M_\ell , N_\ell]) \longrightarrow \alpha$ <u>quand</u> $\ell \longrightarrow +\infty$.

Notre but est de montrer le

THÉORÈME 1 (Szemerédi).- <u>Si une partie</u> E <u>de</u> $\mathbb{Z}$ <u>a une densité asymptotique positive, elle contient, pour tout entier positif</u> k , <u>une progression arithmétique de longueur</u> k .

Pour le démontrer, nous produisons d'abord un nouvel énoncé :

THÉORÈME 2 (Théorème ergodique de Szemerédi-Furstenberg).- <u>Si</u> T <u>est une bijection bimesurable préservant la mesure de l'espace probabilisé</u> $(X , \mathfrak{A} , m)$, <u>étant donné</u> k <u>un entier plus grand que</u> 2 <u>et un ensemble</u> A <u>dans</u> $\mathfrak{A}$ <u>tel que</u> $m(A) > 0$, <u>il existe un entier</u> n <u>tel que</u> $m(A \cap T^nA \cap T^{2n}A \cap \ldots \cap T^{(k-1)n}A) > 0$.

<u>Lemme</u> 1.- <u>Le Théorème ergodique de Szemerédi-Furstenberg entraîne le Théorème de Szemerédi</u>.

Démonstration

Soit E une partie de $\mathbb{Z}$ de densité supérieure α strictement positive. Cela entraîne qu'il existe une moyenne L sur $\mathbb{Z}$ invariante par la translation S, $(Sx = x+1)$, telle que $L(E) = \alpha$. Soit $X = (\{0\},\{1\})^{\mathbb{Z}}$ muni de la translation T (i.e. si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $Tx = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$). Etant donné un cylindre de X, $c = (x_0 = \varepsilon_0 , x_1 = \varepsilon_1 , \ldots , x_r = \varepsilon_r)$ où $\varepsilon_i = 0$ ou 1, $0 \leq i \leq r$, on pose

$$(1) \qquad m(c) = L(E_{\varepsilon_0} \cap SE_{\varepsilon_1} \cap S^2E_{\varepsilon_2} \cap \ldots \cap S^rE_{\varepsilon_r})$$

où $E_{\varepsilon_i} = E$ si $\varepsilon_i = 1$, $E_{\varepsilon_i} = E^c$ si $\varepsilon_i = 0$.

Alors m définit une mesure de probabilité T-invariante sur X muni de la tribu $\mathfrak{A}$ associée à sa structure d'espace produit. Si on prend pour A l'ensemble $(x_0 = 1)$, $m(A) = \alpha$, et le théorème 2 se traduit à l'aide de (1) par l'existence d'un entier n tel que

$$L(E \cap S^nE \cap S^{2n}E \cap \ldots \cap S^{(k-1)n}E) > 0$$

et les progressions arithmétiques de longueur k, de pas n, dans E, ont une densité asymptotique positive.

Remarque.- On peut montrer directement que l'implication réciproque dans l'énoncé du lemme 1 est vraie.

On appelle système, et on note $(X,\mathfrak{A},m,T)$ la donnée d'une bijection bimesurable, préservant la mesure, de l'espace probabilisé $(X,\mathfrak{A},m)$. Le système $(X,\mathfrak{A},m,T)$ est dit ergodique si $m(A\,\Delta\,TA) = 0$ entraîne $m(A) = 0$ ou 1. Il est dit faiblement mélangeant si son carré cartésien $(X\times X, \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}, m\otimes m, T\times T)$ est ergodique.

DÉFINITION 2.- *Soit $(X,\mathfrak{A},m,T)$ un système. Un ensemble A de $\mathfrak{A}$ de mesure positive est dit (L.B.) si, pour tout entier $k > 0$, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ et un entier $L > 0$ tels que la suite des entiers $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $m(A \cap T^nA \cap T^{2n}A \cap \ldots \cap T^{(k-1)n}A) > \varepsilon$ soit à lacunes bornées par L. Si tout ensemble A de $\mathfrak{A}$ est (L.B.), on dit que le système $(X,\mathfrak{A},m,T)$ a la propriété (L.B.).*

On va montrer, en fait, un résultat un peu plus fort que le Théorème 2.

THÉORÈME 2'.- *Pour tout système $(X,\mathfrak{A},m,T)$, si $A \in \mathfrak{A}$ et $m(A) > 0$*

$$\liminf_N \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N}\, m(A \cap T^nA \cap \ldots \cap T^{(k-1)n}A) > 0 .$$

Pour démontrer ce résultat, on va parcourir un certain nombre d'étapes dans le domaine de la théorie ergodique.

Lemme 2.- Si $(X, \mathfrak{A}, m, T)$ est faiblement mélangeant et si $f_1, f_2, \ldots, f_k$ sont k fonctions de $L^\infty(X, \mathfrak{A}, m)$, alors :

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^n f_1 T^{2n} f_2 \ldots T^{kn} f_k - \int f_1 dm \int f_2 dm \ldots \int f_k dm \right\|_2 \longrightarrow 0 ,$$

quand $n \longrightarrow \infty$. [Par $T^n f$, on désigne $f \circ T^n$.]

Démonstration

Ce résultat se démontre par récurrence. Pour $k = 1$, c'est exactement le Théorème ergodique de Von Neumann. Pour le montrer au rang k, il suffit de prouver que si

$$M_k(N) = \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^n f_1 T^{2n} f_2 \ldots T^{kn} f_k \right\|_2 \quad \text{et si} \quad \int f_k dm = 0 \text{ , alors } M_k(N) \longrightarrow 0$$

quand $N \longrightarrow +\infty$. Soit H un entier positif. Alors :

$$(M_k(N))^2 \leq O\left(\frac{H}{N}\right) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{H^2} \int \left(\sum_{j=n}^{n+H} T^j f_1 T^{2j} f_2 \ldots T^{kj} f_k \right)^2 dm$$

$$\leq O\left(\frac{H}{N}\right) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{|j| \leq H} \frac{H - |j|}{H^2} \int (f_1 T^j f_1) T^n (f_2 T^{2j} f_2) \ldots T^{(k-1)n} (f_k T^{kj} f_k)\, dm .$$

On a utilisé que x^2 est convexe, que les f_i sont uniformément bornées dans L^∞ et que T préserve la mesure.

Si $\varepsilon > 0$ est donné et si $N > N_1(H)$, l'hypothèse de récurrence entraîne :

$$(M_k(N))^2 \leq O\left(\frac{H}{N}\right) + \varepsilon + \sum_{|j| \leq H} \frac{H - |j|}{H^2} \cdot \int f_1 T^j f_1 dm \ldots \int f_k T^{kj} f_k dm .$$

Comme T est faiblement mélangeante et comme $\int f_k \, dm = 0$, on a que $\int f_k T^{kj} f_k \, dm \longrightarrow 0$ quand $j \longrightarrow +\infty$ sur un ensemble de densité 1. [Ce résultat "classique" se voit aisément en appliquant le Théorème de Von Neumann à $f_k(x) f_k(x')$ dans le carré cartésien de $(X, \mathfrak{A}, m, T)$.] On choisit H de façon que la dernière somme soit plus petite que ε. Il existe alors N_2 tel que $N > N_2$ entraîne $(M_k(N))^2 < 3\varepsilon$.

DÉFINITION 3.- Deux systèmes $(X, \mathfrak{A}, m, T)$ et $(\bar{X}, \bar{\mathfrak{A}}, \bar{m}, \bar{T})$ sont isomorphes s'il existe deux ensembles invariants X_1 dans X et $\bar{X}_1$ dans $\bar{X}$ tels que $m(X_1) = \bar{m}(\bar{X}_1) = 1$ et une bijection bimesurable ψ de X_1 sur $\bar{X}_1$ qui envoie m sur $\bar{m}$ et telle que pour tout x de X_1, $\bar{T}\psi(x) = \psi T(x)$.

Dans toute la suite, tous les systèmes que nous considèrerons seront définis sur un espace de Lebesgue : c'est-à-dire que $(X, \mathfrak{A}, m)$ sera isomorphe au segment $[0, 1]$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Le lemme suivant est dû à Rohlin ([1], [3]).

Lemme 3.- Soient $(X, \mathfrak{A}, m, T)$ un système ergodique et $\mathfrak{B}$ une sous-σ-algèbre T-invariante de $\mathfrak{A}$ (i.e. si $B \in \mathfrak{B}$, $TB \in \mathfrak{B}$). Alors, il existe un système $(X_1, \mathfrak{A}_1, m_1, T_1)$ et une application mesurable $x \rightarrow \psi_x$, $x \in X_1$, dans les bijections bimesurables préservant la mesure de $(X_2, \mathfrak{A}_2, m_2)$ telles que le système $(X_1 \times X_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2, m_1 \otimes m_2, \bar{T})$ où la transformation $\bar{T}$ est définie par

$\bar{T}(x_1, x_2) = (T_1(x_1), \psi_{x_1}(x_2))$ soit isomorphe à $(X, \mathfrak{A}, m, T)$ de telle manière que, dans cet isomorphisme, la tribu $\mathfrak{A}_1 \times X_2$ soit envoyée sur $\mathfrak{B}$.

[L'espace des transformations qui préservent la mesure sur $(X_2, \mathfrak{A}_2, m_2)$ est muni de la structure borélienne associée à la métrique $d(\psi_1, \psi_2) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} m_2(\psi_1 A_n \Delta \psi_2 A_n)$ où A_n désigne une suite dense d'ensembles dans $\mathfrak{A}_2$.]

Remarque.- Dans cette décomposition le système $(X_1, \mathfrak{A}_1, m_1, T_1)$ est canonique [on le notera $(X_{\mathfrak{B}}, \mathfrak{B}, m, T)$] mais la famille ψ_x ne l'est pas. [La sous-tribu de $\mathfrak{A}$ image de $\mathfrak{A}_2 \times X_1$ n'est pas canonique.]

Conservant les notations du lemme 3, on introduit la

DÉFINITION 4.- Etant donné $(X, \mathfrak{A}, m, T)$ un système ergodique et $\mathfrak{B}$ une sous-σ-algèbre T-invariante de $\mathfrak{A}$, on appelle produit cartésien $\mathfrak{B}$-fibré et on note $(X, \mathfrak{A}, m, T) \times_{\mathfrak{B}} (X, \mathfrak{A}, m, T)$ le système $(X_1 \times X_2 \times X'_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \otimes \mathfrak{A}'_2, m_1 \otimes m_2 \otimes m'_2, \bar{T})$ défini par

$\bar{T}(x_1, x_2, x'_2) = (T_1 x_1, \psi_{x_1}(x_2), \psi_{x_1}(x'_2))$. [$(X'_2, \mathfrak{A}'_2, m'_2)$ est une copie de $(X_2, \mathfrak{A}_2, m_2)$.]

Il est aisé de vérifier que ce système est bien défini indépendamment du choix de ψ_x. On dit maintenant que $(X, \mathfrak{A}, m, T)$ est $\mathfrak{B}$ relativement faiblement mélangeant si $(X, \mathfrak{A}, m, T) \times_{\mathfrak{B}} (X, \mathfrak{A}, m, T)$ est ergodique.

Lemme 4.- Si $(X, \mathfrak{A}, m, T)$ est $\mathfrak{B}$ relativement faiblement mélangeant, et si $f_1, f_2, \ldots, f_k$ sont k fonctions de $L^\infty(X, \mathfrak{A}, m)$ alors

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (T^n f_1 T^{2n} f_2 \ldots T^{kn} f_k - T^n \bar{f}_1 T^{2n} \bar{f}_2 \ldots T^{kn} \bar{f}_k) \right\|_2 \longrightarrow 0 \quad \text{quand } N \rightarrow +\infty .$$

[On note $\bar{f} = E^{\mathfrak{B}} f$.]

Démonstration

Pour $k = 1$, le lemme est vrai pour la même raison que précédemment. Or

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(T^n f_1 T^{2n} f_2 \ldots T^{kn} f_k - T^n \bar{f}_1 T^{2n} \bar{f}_2 \ldots T^{kn} \bar{f}_k\right) \right\|_2$$
$$\leq \sum_{j=0}^{k-1} \left(\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(T^n \bar{f}_1 \ldots T^{jn} \bar{f}_j T^{(j+1)n} f_{j+1} \ldots T^{kn} f_k \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - T^n \bar{f}_1 \ldots T^{(j+1)n} \bar{f}_{j+1} T^{(j+2)n} f_{j+2} \ldots T^{kn} f_k\right) \right\|_2 \right) .$$

Il suffit donc de prouver que

$$M_{k,j}(N) = \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^n \bar{f}_1 T^{2n} \bar{f}_2 \ldots T^{jn} \bar{f}_j T^{(j+1)n} f_{j+1} \ldots T^{kn} f_k \right\|_2$$

vérifie $M_{k,j}(N) \to 0$ quand $N \to +\infty$ et quand $\bar{f}_{j+1} = 0$, $0 \leq j \leq k-1$.

Un calcul identique à celui de la démonstration du lemme 2 nous donne (H est un entier positif)

$$(M_{k,j}(N))^2 \leq O\left(\frac{H}{N}\right) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{|\ell| \leq H} \frac{H - |\ell|}{H^2} \int (\bar{f}_1 T^{\ell} \bar{f}_1) T^n (\bar{f}_2 T^{2\ell} \bar{f}_2) \ldots T^{jn} (f_{j+1} T^{(j+1)\ell} f_{j+1}) \ldots$$
$$\ldots T^{(k-1)n} (f_k T^{k\ell} f_k) dm .$$

Si $\varepsilon > 0$ est donné et si le lemme est vrai jusqu'au rang $k-1$, alors il existe $N_1(H)$ tel que si $N > N_1$

$$(M_{k,j}(N))^2 \leq O\left(\frac{H}{N}\right) + \varepsilon + \sum_{|\ell| \leq H} \frac{H - |\ell|}{H^2} \int \|(\bar{f}_1 T^{\ell} \bar{f}_1)\|_\infty \ldots \|(\bar{f}_j T^{j\ell} \bar{f}_j)\|_\infty \left|\overline{(f_{j+1} T^{(j+1)\ell} f_{j+1})}\right| \ldots$$
$$\ldots \|\overline{(f_k T^{k\ell} f_k)}\|_\infty \, dm .$$

Mais comme T est $\mathfrak{B}$ relativement faiblement mélangeant,

$\overline{(f_{j+1} . T^{(j+1)\ell} f_{j+1})} \xrightarrow{L^2} 0$ $(\bar{f}_{j+1} = 0)$ quand $\ell \to +\infty$ sur un ensemble de densité 1 . [On le voit en appliquant le théorème ergodique dans le produit fibré à $f_{j+1}(x_1, x_2) f_{j+1}(x_1, x_2')$. Alors $\frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^{L} \int (\overline{f_{j+1} T^{\ell} f_{j+1}})^2 dm \to 0$.] La démonstration s'achève maintenant comme celle du lemme 2.

Remarques.- 1) Le lemme 4 est encore vrai dans le cas suivant :

Dans le système $(X,T) \times (X,T^2) \times \ldots \times (X,T^k)$, la tribu des ensembles invariants est contenue dans $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{B}$ (k fois).

2) Ce lemme dit que si tous les ensembles d'une sous-σ-algèbre $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ sont (L.B.) et si T est $\mathfrak{B}$ relativement faiblement mélangeant, alors T a la propriété (L.B.). [En particulier, le Théorème 2 est vrai si T est faiblement mélangeant.]

DÉFINITION 5.- Soit $(X, \mathfrak{A}, m, T)$ un système ergodique. Soit H un espace homogène d'un groupe compact métrisable muni sur sa tribu borélienne $\mathfrak{B}(H)$ de la mesure $\tilde{m}$ image de la mesure de Haar de G et Φ une application mesurable de X dans G ; le système $(X \times H, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}(H), m \otimes \tilde{m}, \tilde{T})$ défini par $\tilde{T}(x,h) = (T(x), \Phi(x)h)$ est appelé extension isométrique du système $(X, \mathfrak{A}, m, T)$.

Lemme 5.- Soit $(X, \mathfrak{A}, m, T)$ un système ergodique. Soit $\mathfrak{B}$ une sous-σ-algèbre T invariante de $\mathfrak{A}$. Si T n'est pas $\mathfrak{B}$ relativement faiblement mélangeant, il existe une sous-σ-algèbre $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{A}$, T-invariante contenant $\mathfrak{B}$ strictement, telle que le système $(X_{\mathfrak{C}}, \mathfrak{C}, m, T)$ soit isomorphe à une extension isométrique de $(X_{\mathfrak{B}}, \mathfrak{B}, m, T)$.

Démonstration

L'hypothèse entraîne que $(X, \mathfrak{A}, m, T) \times_{\mathfrak{B}} (X, \mathfrak{A}, m, T)$ est non ergodique. On reprend les notations du lemme 3 et de la définition 4. Soit I un ensemble $\bar{T}$-invariant de mesure positive différente de 1 dans $X_1 \times X_2 \times X_2'$. Si $x = (x_1, x_2)$ et $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ sont deux points de $X_1 \times X_2$, on pose :

$$d(x, \tilde{x}) = \int_{X_2'} \left| 1_I(x_1, x_2, x_2') - 1_I(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, x_2') \right| dm_2' .$$

$d(x, \tilde{x})$ définit une pseudo distance sur $X_1 \times X_2$. L'invariance de I entraîne : $d((x_1, x_2), (x_1, \tilde{x}_2)) = d((T_1 x_1, \psi_{x_1}(x_2)), (T_1 x_1, \psi_{x_1}(\tilde{x}_2)))$. [ψ_{x_1} est une isométrie de $x_1 \times X_2$ sur $T_1 x_1 \times X_2$.] Soit $B(x_1, x_2, \varepsilon)$ pour désigner la boule de centre (x_1, x_2) , de rayon ε , associée à d .

(1) Pour tout $n \geq 1$, la fonction $(x_1, x_2) \longrightarrow m_{x_1}(B(x_1, x_2, \frac{1}{n}))$ est T-invariante et égale presque partout à une constante positive, car T est ergodique et I n'est pas $\mathfrak{B}$-mesurable. [Par m_{x_1} , on désigne la désintégration de m suivant X_1 : $\int_{X_1} m_{x_1}(A) dm_1 = m(A)$.]

On prend X_1^1 tel que $m_1(X_1^1) = 1$ pour lequel toutes les fonctions précédentes sont constantes partout.

(2) Pour chaque $x_1 \in X_1^1$, la fibre $(x_1 \times X_2)$ est précompacte : soit $\varepsilon > 0$. Si $B_{x_1}(x_2^i, \frac{\varepsilon}{2})$, $i \in I$, est une famille maximale de boules disjointes, alors I est fini d'après (1), [$B_{x_1}(x_2^i, \frac{\varepsilon}{2}) = (x_1 \times X_2) \cap B(x_1, x_2^i, \varepsilon)$] et les $B_{x_1}(x_2^i, \varepsilon)$, $i \in I$, forment un recouvrement de $(x_1 \times X_2)$. Pour chaque x_1 dans X_1^1 , soit $(x_1, H(x_1))$ l'espace compact, qui est le séparé complété de (x_1, X_2) muni de la métrique d . Si (x_1, x_2) est dans (x_1, X_2) , on note $(x_1, \tilde{x}_2)$ sa classe dans $(x_1, H(x_1))$.

(3) Il existe un ensemble $X_1^2 \subset X_1^1$, $m(X_1^2) = 1$ tel que pour tout couple de points

(x_1,h_1) , (x_2,h_2) où x_1 , x_2 sont dans X_1^2 , il existe une isométrie Φ de $(x_1,H(x_1))$ sur $(x_2,H(x_2))$ telle que $\Phi(x_1,h_1) = (x_2,h_2)$: en effet, il existe un point $(x_o,\bar{x}_o)$, une suite de nombres positifs $\varepsilon_k \searrow 0$, et une suite d'ensembles A_k de mesures positives, contenant $(x_o,\bar{x}_o)$, de diamètres plus petits que ε_k et tels que si (x,y) est dans A_k , alors une partie de la fibre (x,X_2) de m_x mesure plus grande que $1 - \varepsilon_k$ soit contenue dans le voisinage V_{ε_k} de la fibre (x_o,X_2) .

[Pour voir celà, on note que

(1) il y a une suite $\eta_k \leq \frac{\varepsilon_k}{2}$ telle que $m_x(B(x,y, \frac{\varepsilon_k}{2})) > 10\, \eta_k$ $\forall$ (x,y) dans $X_1^1 \times X_2$;

(2) il y a pour tout k une réunion finie de cubes disjoints K_j^k , $j \in J$, tels que $m((\bigcup_j K_j^k) \,\Delta\, I) < \eta_k^4$;

(3) si E_k est l'ensemble des (x_1,x_2) dans $X_1^1 \times X_2$ tels que $m_{x_1,x_2}(I \,\Delta\, (\bigcup_j K_j^k)) < \eta_k$, $m(E_k) > 1 - \eta_k^3$;

(4) si F_k est l'ensemble des x dans X_1 tels que $m_x(E_k) > 1 - \eta_k$, $m_1(F_k) > 1 - \eta_k^2$;

(5) si $\tilde{K}_j^k$ est la partition de X_1^1 dont les éléments sont $pr_{X_1}(K_j^k)$, $(pr_{X_1}(K_j^k))^c$, la réunion $\tilde{P}_k$ des atomes p de $\bigvee_{j \in J} \tilde{K}_j^k$ tels que $m_1(p \cap F_k) > (1 - \eta_k)m_1(p)$ a une mesure plus grande que $1 - \eta_k$ et on prend $(x_o,\bar{x}_o)$ dans $\bigcap_k ((F_k \cap \tilde{P}_k) \times X_2 \cap E_k)$.]

Le théorème ergodique ponctuel entraîne qu'il existe un ensemble X_1^2 de mesure 1 tel que, pour tout x_1 de X_1^2 , pour tout k , pour m_{x_1} presque tout (x_1,x_2) , il existe un entier $n(k)$ tel que $T^n(x_1,x_2) = (T_1^n x_1 , \psi_{T_1^{n-1}x_1} \circ \psi_{T^{n-2}x_1} \circ \ldots \circ \psi_{x_1}(x_2))$ soit dans A_k . Soit (x_1,x_2) dans $(x_1 \times X_2)$. On peut alors définir Φ_n , application de (x_1,X_2) dans (x_o,X_2) telle que :

(a) $|d((x_o , \Phi_n(y)) , (x_o , \Phi_n(y'))) - d((x_1,y) , (x_1,y'))| < \varepsilon_k$ pour tout couple (x_1,y) , (x_1,y') dans $C_k \subset (x_1,X_2)$ avec $m_{x_1}(C_k) > 1 - \varepsilon_k$,

(b) $d((x_o , \Phi_n(x_2)) , (x_o,\bar{x}_o)) < \varepsilon_k$.

On construit alors par un procédé diagonal une isométrie Φ de (x_1,X_2) sur (x_o,X_2) telle que $\Phi(x_1,\tilde{x}_2) = (x_o,\tilde{\bar{x}}_o)$.

(4) Il y a donc un groupe compact G et un sous-groupe fermé K de G tels que si on fixe $(x_1,\tilde{x}_2)$ dans $(x_1,H(x_1))$, $(x_1 \in X_1^2)$, il y ait une unique identification $I_{x_1,\tilde{x}_2}$ de $(x_1,H(x_1))$ à $H = G/_K$ de façon que $I_{x_1,\tilde{x}_2}(x_1,\tilde{x}_2) = eK$ (e l'élément neutre de G). Soit $\tilde{m}$ l'unique mesure G-invariante sur $\mathfrak{B}(H)$. Soit $\mathfrak{C}$ la sous-σ-algèbre de $\mathfrak{A}$ obtenue à partir de la relation d'équivalence $x \sim x'$ si $x_1 = x_1'$ et $d((x_1,x_2),(x_1',x_2')) = 0$. Pour tout x dans X_2 , l'application $\Theta : (X_{\mathfrak{C}}, \mathfrak{C}, m) \longrightarrow (X_1 \times H, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}(H), m \otimes \tilde{m})$ définie par $\Theta(x_1,\tilde{x}_2) = (x_1, I_{x_1,\tilde{x}}(x_1,\tilde{x}_2))$ est une bijection bimesurable. [On le voit en examinant la construction précédente.] Soit L une section mesurable de $G/_K \longrightarrow G$. Soit $\Phi(x_1) = L(I_{(T_1x_1,\tilde{x})}(\widetilde{T_1x_1, \psi_{x_1}(x_1,\tilde{x})}))$. Φ est une application mesurable de X_1 dans G et Θ définit un isomorphisme entre T agissant sur $X_{\mathfrak{C}}$ et $\tilde{T}$ agissant sur $(X_1 \times H)$ par

$$\tilde{T}(x_1,h) = (T_1(x_1), \Phi(x_1)h) .$$

DÉFINITION 6.- <u>Un système</u> $(X, \mathfrak{A}, m, T)$ <u>ergodique est dit</u> distal <u>s'il existe une famille dénombrable de sous-tribus</u> T-<u>invariantes de</u> $\mathfrak{A}$ <u>indicées par des ordinaux</u> $\mathfrak{B}_\eta$, $\eta \leq \eta_o$ <u>telles que</u> $\mathfrak{B}_{\eta_o} = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_1 = \nu$ <u>(la tribu triviale)</u>, <u>pour tout</u> $\xi < \eta$, $\mathfrak{B}_\xi < \mathfrak{B}_\eta$, $(X_{\mathfrak{B}_{\eta+1}}, \mathfrak{B}_{\eta+1}, m, T)$ <u>est une extension isométrique de</u> $(X_{\mathfrak{B}_\eta}, \mathfrak{B}_\eta, m, T)$ <u>et si</u> ξ <u>est un ordinal limite</u> $\mathfrak{B}_\xi = \lim \uparrow \mathfrak{B}_\eta \quad \eta \nearrow \xi$.

Comme corollaire immédiat du lemme 5, nous avons le

THÉORÈME 3.- <u>Si</u> $(X, \mathfrak{A}, m, T)$ <u>est un système ergodique</u>, <u>il existe une sous-</u>σ-<u>algèbre</u> T-<u>invariante</u> $\mathfrak{B}$ <u>de</u> $\mathfrak{A}$ <u>telle que</u> :

(1) $(X_{\mathfrak{B}}, \mathfrak{B}, m, T)$ <u>est distal</u> ;

(2) $(X, \mathfrak{A}, m, T)$ <u>est</u> $\mathfrak{B}$-<u>relativement faiblement mélangeant</u>.

<u>Remarque</u>.- En fait, $\mathfrak{B}$ est canonique et peut s'identifier à la plus petite sous-σ-algèbre de $\mathfrak{A}$ telle que (2) soit vrai. On est donc ramené à étudier le "cas distal".

<u>Lemme</u> 6.- <u>Soient</u> $(X, \mathfrak{A}, m, T)$ <u>un système et</u> $\mathfrak{B}_n$, $n \geq 1$, <u>une suite croissante de sous-</u>σ-<u>algèbres</u> T-<u>invariantes de</u> $\mathfrak{A}$ <u>telles que</u>, <u>pour tout</u> $n \geq 1$, $(X_{\mathfrak{B}_n}, \mathfrak{B}_n, m, T)$ <u>ait la propriété</u> (L.B.) <u>et que</u> $\mathfrak{A} = \lim \uparrow \mathfrak{B}_n$. <u>Alors</u> $(X, \mathfrak{A}, m, T)$ <u>a la propriété</u> (L.B.).

Démonstration

Soit $k > 0$ et soit A dans $\mathfrak{A}$. Il existe $n > 0$ et A_n dans $\mathfrak{B}_n$ tels que $\frac{m(A \cap A_n)}{m(A_n)} > 1 - \frac{1}{100k^4}$. Soit $\bar{A}_n$ dans A_n l'ensemble des x de $X_{\mathfrak{B}_n}$ tels que $m_x(A \cap A_n) > 1 - \frac{1}{10k^2}$. [m_x est une désintégration de m suivant $\mathfrak{B}_n$.] Alors $m(\bar{A}_n) > \left(1 - \frac{1}{10k^2}\right) m(A_n)$ et si ε et L sont associés à $\bar{A}_n$ pour k, $\varepsilon\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ et L conviendront pour A.

Lemme 7.- Soit $(X, \mathfrak{A}, m, T)$ un système ayant la propriété (L.B.). Si $(\bar{X}, \bar{\mathfrak{A}}, \bar{m}, \bar{T})$ est une extension isométrique de $(X, \mathfrak{A}, m, T)$, ce système a aussi la propriété (L.B.).

Démonstration

On reprend les notations de la définition 4. Alors

$(\bar{X}, \bar{\mathfrak{A}}, \bar{m}, \bar{T}) = (X \times H, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}(H), m \otimes \tilde{m}, \tilde{T})$ avec $\tilde{T}(x,h) = (Tx, \Phi(x)h)$ où $X \to G$: $x \longrightarrow \Phi(x)$ est mesurable.

(1) Soit k positif et soit $\bar{A}$ dans $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}(H)$ tel que $m(\bar{A}) > 0$. Il existe deux ensembles mesurables $A_1 \in \mathfrak{A}$ et A_2 dans $\mathfrak{B}(H)$, de mesures positives, tels que, pour tout x de A_1, $\frac{\bar{m}_x(A \cap A_2)}{\bar{m}_x(A_2)} > 1 - \frac{1}{10k^2}$ (se démontre comme le lemme 6).

(2) Il existe un ouvert U_o de G, voisinage de l'élément neutre, tel que si $g \in U_o$, $\tilde{m}(g\, A_2 \,\Delta\, A_2) < \frac{\tilde{m}(A_2)}{10k^2}$.

(3) Il existe une partition finie de G^k, $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_s$ et des entiers positifs finis $m_1, m_2, \ldots, m_s$ tels que si $\tilde{g}_i$, $1 \leq i \leq m_j$, sont m_j éléments de R_j, alors $\tilde{g}_1 \tilde{g}_2 \ldots \tilde{g}_{m_j}$ est un élément du voisinage $U_o \times U_o \times \ldots \times U_o$ de G^k.

(4) Soit $\Phi_{k,n}(x)$ l'application de $X \to G^k$:

$$x \to (\Phi^{-1}(T^{-(n)}x)\Phi^{-1}(T^{-(n-1)}x)\ldots\Phi^{-1}(T^{-1}x), \Phi^{-1}(T^{-(2n)}x)\Phi^{-1}(T^{-(2n-1)}x)\ldots\Phi^{-1}(T^{-1}x),\ldots$$
$$\ldots, \Phi^{-1}(T^{-(k-1)n}x)\Phi^{-1}(T^{-(k-1)n-1}x)\ldots\Phi^{-1}(T^{-1}x)).$$

(5) On définit par récurrence une famille d'ensembles $A(j)$ dans $\mathfrak{A}$, et trois suites d'entiers $a(j)$, $b(j)$, $n(j)$, $j \geq 0$, de la manière suivante :

pour $j = 0$, $A(0) = A_1$, $a(0) = 1$, $b(0) = 0$, $n(0) = 0$.

Si B est un ensemble de $\mathfrak{A}$ et p un entier positif plus petit que s, on appelle

$Q(p,B)$ la question suivante : existe-t-il un entier n et un ensemble $\bar{B}$ de mesure positive dans $\mathfrak{A}$ tels que :

(a) pour tout x de $\bar{B}$, $\Phi_{k,n}(x) \in R_p$

(b) $\bar{B} \subset B \cap T^n B \cap T^{2n} B \cap \ldots \cap T^{(k-1)n} B$?

Si $b(j) \leq m_{a(j)} - 2$, on pose $Q(a(j), A(j))$. Si la réponse est positive, elle produit $n(j+1)$ et $A(j+1)$ et on pose $a(j+1) = a(j)$, $b(j+1) = b(j) + 1$. Sinon on pose $Q(a(j)+1, A(j))$, $Q(a(j)+2, A(j)), \ldots$ et le premier entier q tel que $Q(a(j)+q, A(j))$ soit positive, fournit $n(j+1)$ et $A(j+1)$. On pose alors $a(j+1) = a(j) + q$, $b(j+1) = 1$. Si $b(j) = m_{a(j)} - 1$, on pose $Q(a(j)+1, A(j))$ et si la réponse est positive, elle produit $n(j+1)$, $A(j+1)$ et on pose $a(j+1) = a(j) + 1$, $b(j+1) = 1$. Sinon, on continue comme précédemment. La récurrence s'arrête à l'indice t tel que ou bien $a(t) = s$, $b(t) = m_s - 1$, ou bien $b(t) = m_{a(t)} - 1$ et la réponse à $Q(a(t)+q, A(t))$ est négative pour tout q tel que $1 \leq q \leq s - a(t)$.

Soit J l'ensemble des entiers j dans $[1, s]$ tels qu'il existe un ℓ tel que $a(\ell) = j$, $b(\ell) = m_j - 1$. Comme $A(t)$ est (L.B.) par hypothèse, il existe $\varepsilon_1 > 0$ et L_1 entier tels que, pour tout entier n_0, il existe $\bar{n}_0$ tel que $|\bar{n}_0 - n_0| < L_1$ et si $\bar{A}(t) = A(t) \cap T^{\bar{n}_0}(A) \cap \ldots \cap T^{(k-1)\bar{n}_0} A(t)$, $m(\bar{A}(t)) > \varepsilon_1$ et la construction entraîne qu'il existe un ensemble $\bar{A}_1(t) \subset \bar{A}(t)$, $m(\bar{A}_1(t)) > \frac{\varepsilon_1}{s}$ et un entier $j \in J$ tel que, pour tout x de $\bar{A}_1(t)$, $\Phi_{k,\bar{n}_0}(x) \in R_j$. Soit $I(j)$ l'ensemble de tous les indices m tels que $a(m) = j$ et soit $N(j) = \sum_{m \in I(j)} n(m)$. Alors

$$\bar{m}_x((A_1 \times A_2 \cap A) \cap T^{\bar{n}_0 + N(j)} (A_1 \times A_2 \cap A) T^{2(\bar{n}_0 + N(j))} (A_1 \times A_2 \cap A) \ldots$$
$$\ldots T^{(k-1)(\bar{n}_0 + N(j))} (A_1 \times A_2 \cap A)) > \left(1 - \frac{1}{k}\right) \tilde{m}(A_2)$$

pour tout x de $\bar{A}_1(t)$.

Par conséquent, $\bar{A}$ est (L.B.) avec $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{s} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \tilde{m}(A_2)$ et $L = L_1 + \sup_{j \in J} N(j)$.

<u>Fin de la démonstration du Théorème ergodique de Szemerédi-Furstenberg</u>

Du Théorème 3, des lemmes 6, 7 et 4, il résulte que le Théorème est vrai quand $(X, \mathfrak{A}, m, T)$ est ergodique. [Il a en fait la propriété (L.B.).]

[Dans le Théorème 2, on ne considère que l'automorphisme d'espace de Lebesgue qui provient de la restriction de T à la σ-algèbre $\bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i P$, P la partition (A, A^c) .]

Si $(X, \mathfrak{A}, m, T)$ n'est pas ergodique, soit $\mathfrak{I}$ la tribu des invariants et soit m_x , $x \in \mathfrak{I}$, la désintégration de m suivant $\mathfrak{I}$. Soient A de mesure positive et k un entier positif. Comme T est ergodique sur chaque fibre, la propriété (L.B.) entraîne que dès que $m_x(A) > 0$,
$\liminf \frac{1}{N} \sum_1^N m_x(A \cap T^n A \cap \ldots \cap T^{(k-1)n} A) > 0$ et le lemme de Fatou entraîne

$$\liminf \frac{1}{N} \sum_1^N m(A_n T^n A \ldots T^{(k-1)n} A) > 0 .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. M. ABRAMOV, V. A. ROHLIN - The entropy of a skew product of measure preserving transformations, American Math. Society Trans., 48(1965), 255-265.

[2] H. FURSTENBERG - Ergodic Behavior of Diagonal Measures and a Theorem of Szemerédi on Arithmetic Progressions, Journ. d'Analyse Mathématique, 31 (1977), 204-256.

[3] V. A. ROHLIN - Selected Topics from metric theory of dynamical systems, Amer. Math. Soc. Trans., 2, 49(1966), 171-209 .

[4] K. F. ROTH - Sur quelques ensembles d'entiers, C.R. Acad. Sci. Paris, 234(1952), 388-390.

[5] E. SZMERÉDI - On sets of integers containing no k elements in arithmetic progressions, Acta Arithmetica, 27(1975), 199-245.