GENEVIÈVE POURCIN

Fibrés holomorphes dont la base et la fibre sont des espaces de Stein

Séminaire N. Bourbaki, 1979, exp. n° 517, p. 206-220

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1977-1978__20__206_0>

Séminaire BOURBAKI 517-01
30e année, 1977/78, n° 517 Février 1978

FIBRÉS HOLOMORPHES DONT LA BASE ET LA FIBRE SONT DES ESPACES DE STEIN

par Geneviève POURCIN

1. Introduction

En 1953, J.-P. Serre pose le problème suivant ([27]) : l'espace total d'un fibré holomorphe dont la base et la fibre sont des espaces de Stein est-il de Stein ? Une réponse affirmative a été donnée dans de nombreux cas particuliers, notamment lorsque la fibre est un ouvert de $\mathbb{C}$ ou un domaine borné convenable de $\mathbb{C}^n$; mais c'est seulement en 1977 que H. Skoda ([33]) construit un fibré holomorphe admettant pour base un ouvert de $\mathbb{C}$, pour fibre $\mathbb{C}^2$ et sur lequel toute fonction pluri-sous-harmonique est constante sur les fibres, donnant ainsi un cas où la réponse à la question de J.-P. Serre est négative. Nous nous proposons de donner un aperçu de ces résultats.

Tous les espaces analytiques que l'on considère sont dénombrables à l'infini.

Soient X un espace analytique et A un ensemble de fonctions analytiques sur X. Pour tout compact K de X on appelle A-enveloppe convexe de K dans X, notée $\hat{K}^A$, l'ensemble des points x de X vérifiant pour tout élément f de A

$$|f(x)| \leq \sup_{y \in K} |f(y)| .$$

On dit que X est A-<u>convexe</u> si pour tout compact K la A-enveloppe convexe $\hat{K}^A$ est compacte. On dit que X est A-<u>séparable</u> si les éléments de A séparent les points de X. Enfin, on note $O(X)$ l'espace des fonctions analytiques sur X. L'espace X est <u>de Stein</u> si et seulement si, il est $O(X)$-séparable et $O(X)$-convexe.

Toute surface de Riemann non compacte est de Stein ([4]) ; les sous-espaces analytiques de $\mathbb{C}^n$ sont de Stein et on obtient ainsi tous les espaces de Stein pour lesquels la dimension de l'espace tangent de Zariski en chaque point est bornée par un nombre fixe ([22]). Enfin, un espace X est de Stein si et seulement si pour tout faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ sur X et tout $q > 0$, on a $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ (cf. [8], [28]).

Soit F un espace analytique ; un <u>fibré holomorphe de fibre</u> F est la donnée d'un morphisme d'espaces analytiques $p : Y \longrightarrow B$ vérifiant la condition suivante : pour tout point b de B, il existe un voisinage ouvert U de b et un isomorphisme $\gamma : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ satisfaisant à $q \circ \gamma = p$ où $q : U \times F \longrightarrow U$ désigne la première projection.

Le problème posé est donc le suivant : soit $Y \longrightarrow B$ un fibré holomorphe de fibre F ; on suppose que B et F sont de Stein ; est-ce que Y est de Stein ?

2. Le contre-exemple de H. Skoda

On utilise de façon essentielle le théorème suivant dû à P. Lelong et dont la démonstration est une extension aux polydisques de $\mathbb{C}^n$ du théorème des trois cercles de Hadamard. Pour tout $z = (z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n$, on note $\|z\| = \max_i |z_i|$.

THÉORÈME 2.1 ([20] Théorème 6.5.4 et [33]).- Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}^p$ et $V : \Omega \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction pluri-sous-harmonique (p.s.h.) non constante sur au moins une fibre de la projection $\Omega \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \Omega$. Pour tout ouvert ω relativement compact dans Ω et tout nombre positif r soit

$$M(V,\omega,r) = \sup_{\substack{x \in \bar{\omega} \\ \|z\| \leq r}} V(x,z) .$$

(i) $M(V,\omega,r)$ est une fonction convexe strictement croissante de $\operatorname{Log} r$.

(ii) Pour tout couple (ω_1,ω_2) d'ouverts relativement compacts de Ω, il existe des constantes positives σ et τ ne dépendant que de Ω, ω_1, ω_2 et une constante r_o dépendant de V telle que, pour tout $r \geq r_o$, on ait

$$M(V,\omega_1,r) \leq M(V,\omega_2,r^\sigma)$$

$$M(V,\omega_2,r) \leq M(V,\omega_1,r^\tau) .$$

Supposons que Ω contienne l'origine de $\mathbb{C}^p$ et pour tout R positif, notons ω_R le polydisque de $\mathbb{C}^p$ de centre 0 et de rayon R.

a) Pour R assez petit, $M(V,\omega_R, r)$ est une fonction convexe de $(\operatorname{Log} R, \operatorname{Log} r)$; en effet si, pour tout (z,z') dans $\mathbb{C}^2$ vérifiant $\|z\| \leq R$ et $\|z'\| \leq r$, on pose

$$h(z,z') = \sup_{\substack{(\xi,\eta) \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^n \\ \|(\xi,\eta)\| \leq 1}} V(z\xi , z'\eta) = M(V,\omega_R, r) ,$$

la fonction h est p.s.h. et ne dépend que de $(|z|, |z'|)$; alors la fonction p.s.h. $(u,v) \longmapsto h(e^u,e^v)$ ne dépend que de $(\operatorname{Re} u , \operatorname{Re} v)$ et sa restriction à $\mathbb{R}^2$ est donc convexe ([20], 2.3.3). On en déduit aisément (i).

b) Démontrons (ii) : on se ramène facilement au cas où ω_1 et ω_2 sont deux polydisques concentriques de rayons respectifs R_1 et R_2 vérifiant $R_1 < R_2$; soient ρ et λ deux réels positifs vérifiant $\rho > R_2$ et

$$\lambda \operatorname{Log} R_1 + (1 - \lambda) \operatorname{Log} \rho = \operatorname{Log} R_2 .$$

On déduit alors de a) l'inégalité :

$$M(V,\omega_{R_2}, r^\lambda) \le \lambda M(V,\omega_{R_1}, r) + (1-\lambda)\, M(V,\omega_\rho, 1)$$
$$\le M(V,\omega_{R_1}, r) + (1-\lambda)\,(M(V,\omega_\rho, 1) - M(V,\omega_{R_1}, r)) .$$

Si V est non constante sur une fibre au-dessus de ω_{R_1}, $M(V,\omega_{R_1},r)$ tend vers l'infini avec r et pour r assez grand on obtient après avoir posé $\sigma = 1/\lambda$

$$M(V,\omega_{R_2}, r) \le M(V,\omega_{R_1}, r^\sigma) \qquad \text{q.e.d.}$$

2.2. Soient $N \ge 1$ et B un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ dont le groupe fondamental Π est un groupe libre à n générateurs $\alpha_1,\dots,\alpha_N$; on note $\widetilde{B}$ le revêtement universel de B. Soient G un groupe d'automorphismes de $\mathbb{C}^n$, $\varphi : \Pi \longrightarrow G$ un homomorphisme et $Y \xrightarrow{p} B$ le fibré holomorphe de groupe G naturellement associé à φ (tout élément α de Π opère sur $\widetilde{B}\times\mathbb{C}^n$ par $\alpha.(b,z) = (\alpha.b\,,\varphi(\alpha).z)$; Y est le quotient de $\widetilde{B}\times\mathbb{C}^n$ par l'action de Π et p l'application déduite de la projection $\widetilde{B}\times\mathbb{C}^n \longrightarrow \widetilde{B}$).

Il y a correspondance biunivoque entre les fonctions p.s.h. sur Y et les fonctions p.s.h. sur $\widetilde{B}\times\mathbb{C}^n$ invariantes sous l'action de Π.

Si h est un élément de Π et $V : \widetilde{B}\times\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction p.s.h. invariante sous l'action de Π, on note V_h la fonction p.s.h. définie sur $\widetilde{B}\times\mathbb{C}^n$ par $V_h(b,z) = V(b\,,\varphi(h).z)$.

PROPOSITION 2.2.1.- <u>Soit</u> $V : \widetilde{B}\times\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ <u>une fonction</u> p.s.h. <u>invariante sous l'action de</u> Π <u>et non constante sur au moins une fibre</u>. <u>Soit</u> ω <u>un ouvert relativement compact dans</u> $\widetilde{B}$ <u>et</u> $h_1,\dots,h_q$ <u>des éléments de</u> Π .

<u>Alors, il existe une constante strictement positive</u> σ <u>indépendante de</u> V <u>et</u> $r_o \ge 0$ <u>tels que, pour tout</u> $r \ge r_o$, <u>on ait</u>

$$\sup_{1\le j\le q} M(V_{h_j}, \omega, r) \le M(V,\omega,r^\sigma) .$$

<u>Démonstration</u>

Si f et g sont deux fonctions positives définies sur R^+, nous dirons que f et g sont équivalentes s'il existe $\sigma > 0$, $\tau > 0$ et $r_o \gtrsim 0$ tels que, pour tout r supérieur à r_o, on ait :

$$f(r) \le g(r^\sigma)$$
$$g(r) \le f(r^\tau)$$

et on note alors $f \sim g$. Pour tout j dans $\{1,\dots,q\}$, on déduit de (2.1 (ii))

$$M(V,\omega,r) \sim M(V\,, h_j^{-1}(\omega)\,, r)$$

et

$$M(V,\omega,r) \sim M(V_{h_j}, \omega\,, r) ,$$

d'où la proposition.

Soient V , ω , $H = \varphi\{h_1,\dots,h_q\}$ comme dans (2.2) ; pour tout r désignons

D_r le polydisque fermé de $\mathbb{C}^n$ de centre 0 et de rayon r et par r_H le rayon du plus grand polydisque contenu dans la $O(\mathbb{C}^n)$-enveloppe convexe de $\bigcup_{j\in\{1,\dots,q\}} \varphi(h_j)(D_r)$. On a alors ([16] Théorème 4.3.4) :

$$\sup_{\substack{b\in\bar{\omega}\\ z\in D_{r_H}}} V(b,z) \leq \sup_{\substack{b\in\bar{\omega}\\ z\in \bigcup_j \varphi(h_j)(D_r)}} V(b,z) .$$

Il résulte alors de la proposition 2.2.1 l'existence d'une constante strictement positive σ indépendante de V et d'une constante positive r_o telles que, pour tout $r \geq r_o$, on ait :

$$M(V,\omega,r_H) \leq M(V,\omega,r^\sigma) .$$

Alors, pour tout $r \geq r_o$, on déduit de (2.1 (i)) l'inégalité $r_H \leq r^\sigma$. On a donc la

PROPOSITION 2.2.2.- <u>Les notations sont celles de</u> (2.2). <u>S'il existe sur</u> Y <u>une fonction</u> p.s.h. <u>non constante sur au moins une fibre</u>, <u>alors pour tout sous-ensemble fini</u> H <u>de</u> Π <u>il existe des constantes</u> $\sigma > 0$ <u>et</u> $r_o \geq 0$ <u>telles que l'on ait pour tout</u> $r \geq r_o$

$$r_H \leq r^\sigma .$$

r_H est donc une fonction de r à croissance au plus polynomiale.

2.3. <u>Le contre-exemple</u>

On prend $n = 2$; soient h_1, h_2, h_3, h_4 les automorphismes de $\mathbb{C}^2$ définis par

$$h_j(z_1,z_2) = (z_1,z_2e^{a_jz_1}) \qquad j = 1 ,\dots, 4$$

avec $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = i$, $a_4 = -i$.

On vérifie aisément que $\bigcup_{1\leq j\leq 4} h_j(D_r)$ contient la marmite :

$$\{(w_1,w_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |w_1| = r ,\ |w_2| \leq re^{r\sqrt{2}/2}\} \cup \{(w_1,w_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |w_1|\leq r ,\ |w_2| \leq re^{-r}\} .$$

L'enveloppe d'holomorphie de $\bigcup_{1\leq j\leq 4} h_j(D_r)$ contient donc le polydisque

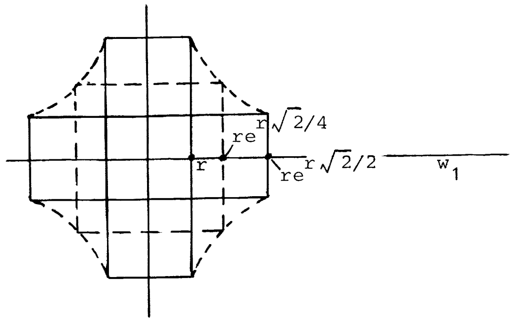
$$\{(w_1,w_2)\in\mathbb{C}^2 \mid |w_1| \leq r ,\ |w_2| \leq re^{r\sqrt{2}/2}\} .$$

Soient alors les quatre automorphismes h_5, h_6, h_7, h_8 de $\mathbb{C}^2$ définis par

$$h_j(z_1,z_2) = h_{j-4}(z_2,z_1) \qquad 5 \leq j \leq 8 .$$

L'enveloppe d'holomorphie de $\bigcup_{1\le j\le 8} h_j(D_r)$ contient le polydisque de rayon moyenne géométrique $re^{r\sqrt{2}/4}$ ([16] théorème 2.4.3) ; donc si on pose $H = \{h_j \mid 1 \le j \le 8\}$, on obtient

$$r_H \ge re^{r\sqrt{2}/4} .$$



Il résulte alors de (2.3) que tout fibré holomorphe sur B dont le groupe structural contient H ne possède pas de fonctions p.s.h. non constante sur les fibres. On remarque de plus que pour obtenir un tel fibré il suffit de prendre $N = 2$, pour G le groupe engendré par les automorphismes g_1 et g_2 de $\mathbb{C}^2$ définis par

$$g_1(z_1,z_2) = (z_1,z_2e^{z_1})$$

$$g_2(z_1,z_2) = (iz_2,z_1)$$

et de définir φ par $\varphi(\alpha_i) = g_i$, $i = 1 , 2$. En effet, le groupe G contient alors les automorphismes h_j définis ci-dessus.

Autres contre-exemples

J.-P. Demailly ([9]) a depuis montré que si B est la couronne $\{z\in\mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2\}$ et G le groupe engendré par l'automorphisme algébrique g de $\mathbb{C}^2$ défini par $g(z_1,z_2) = (z_1 , z_1^k - z_2)$ alors l'espace total du fibré $Y \to B$ associé est de Stein si et seulement si on a $k \le \exp(2\pi^2 / \operatorname{Log}(r_2/r_1))$.

J.-P. Demailly a aussi construit un contre-exemple où la base B est simplement connexe.

3. Cas où la réponse au problème de Serre est positive

Nous allons maintenant exposer les principaux cas où l'on peut donner une réponse affirmative au problème posé.

C'est évidemment le cas des fibrés vectoriels : soit $Y \to B$ un fibré vectoriel ; pour tout b dans B , toute forme linéaire sur la fibre Y_b provient d'une section globale du fibré dual de $Y \to B$ ([8] théorème B) ; on en déduit aisément que si B est de Stein il en est de même de Y .

Y. Matsushima et A. Morimoto ([21]) donnent en 1960 une réponse affirmative dans le cas où le groupe structural du fibré est un groupe de Lie complexe connexe, puis K. Stein ([35]) en 1961 dans le cas où la fibre est de dimension zéro. Bien que le cas où la fibre est un domaine borné quelconque de $\mathbb{C}^n$, $n \ge 2$, ne soit pas encore résolu, de nombreux travaux ont été entrepris dans ce sens ; c'est ce problème que nous allons aborder maintenant en exposant tout d'abord les résultats de G. Fischer ([11] [12] [13]) qui introduisit en 1970 la notion d'espace de Banach-Stein.

3.1. Espaces de Banach-Stein

Soit F un espace analytique ; on munit $O(F)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts ; c'est alors un espace de Fréchet. De plus, pour tout automorphisme φ de F, on note $\varphi^* : O(F) \longrightarrow O(F)$ l'application définie par $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$.

DÉFINITION 3.1.1.- On dit que F est un espace de Banach-Stein, s'il existe un espace de Banach A et une injection linéaire continue $i : A \longrightarrow O(F)$ satisfaisant aux conditions suivantes : (i) F est $i(A)$-séparable et pour toute suite (y_n) de F sans point adhérent il existe $f \in i(A)$ vérifiant $\sup |f(y_n)| = +\infty$.
(ii) Pour tout automorphisme φ de F, $i(A)$ est stable par φ^* et φ^* induit un endomorphisme de A (noté encore φ^*).
(iii) Pour tout espace analytique S et tout S-automorphisme Φ de $S \times F$, l'application $\tilde{\Phi} : S \longrightarrow L(A)$ définie par $\tilde{\Phi}(s) = (\Phi_s)^*$ est analytique (on note Φ_s l'automorphisme de F défini par restriction de Φ à $\{s\} \times F$).

On remarque que si F est un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, la condition 3.1.1 (iii) est vérifiée, car il résulte de ([7]) que tout S-automorphisme de $S \times F$ est localement constant sur S.

THÉORÈME 3.1.2 (G. Fischer [13] et Ancona-Speder [1]).- Soit $Y \xrightarrow{p} B$ un fibré holomorphe dont la base B est un espace de Stein et dont la fibre F est un espace de Banach-Stein. Alors Y est un espace de Stein.

Démonstration

Soit A un espace de Banach vérifiant les conditions 3.1.1 ; on peut alors associer de façon naturelle au fibré $Y \longrightarrow B$ un fibré vectoriel banachique $V_A \longrightarrow B$ de fibre A (les ouverts trivialisants sont les mêmes pour les deux fibrés et si U et V sont deux tels ouverts et $\gamma : U \cap V \longrightarrow \mathrm{Aut}(F)$ un changement de cartes du fibré Y alors l'application $\tilde{\gamma} : U \cap V \longrightarrow L(A)$ définie par $\tilde{\gamma}(s) = (\gamma(s))^*$ est un changement de cartes du fibré V_A).

La démonstration du théorème utilise alors de façon essentielle le résultat suivant dû à L. Bungart qui a généralisé au faisceau des germes de sections d'un fibré vectoriel banachique le théorème B de H. Cartan.

PROPOSITION 3.1.3 ([6]).- Soient E un fibré vectoriel banachique sur un espace de Stein B et $\mathcal{E}$ le faisceau des germes de sections de E. Soit T un sous-

<u>espace analytique fermé de</u> B . <u>Alors l'application de restriction</u>
$H^{O}(B, \mathcal{E}) \longrightarrow H^{O}(T, \mathcal{E})$ <u>est surjective</u>.

On déduit aisément des hypothèses et de 3.1.3 que Y est $O(Y)$-séparable. Montrons que Y est $O(Y)$-convexe, et pour cela, que pour toute suite (y_n) de Y sans point adhérent il existe une fonction analytique sur Y satisfaisant à $\sup_n |f(y_n)| = +\infty$. Si la suite $(p(y_n))$ n'admet pas de point adhérent dans B , cela résulte du fait que B est de Stein. On se ramène donc au cas où tous les $p(y_n)$ sont dans un même ouvert trivialisant U et où on a $\lim_n p(y_n) = b_o$.

On munit l'espace vectoriel $\Gamma = H^{O}(B, V_A)$ des sections globales du fibré V_A d'une structure de Fréchet induisant la topologie de la convergence uniforme sur les compacts et pour tout G dans Γ , on note $\hat{G}$ l'image de G par l'application linéaire continue naturelle de Γ dans $O(Y)$.

On considère alors la suite (B_r) de fermés de Γ définie par

$$B_r = \{G \in \Gamma \mid \sup_n |\hat{G}(y_n)| \leq r\}$$

et on montre que, pour tout r , le complémentaire de B_r est dense dans Γ ; le théorème résulte alors du théorème de Baire. On vérifie aisément qu'il suffit de montrer que, pour tout p , tout voisinage de O dans Γ rencontre $\complement B_r$.

<u>Lemme</u> 3.1.4.- <u>Soient</u> W <u>un voisinage de</u> O <u>dans</u> Γ <u>et</u> b_o <u>un point de</u> B . <u>Il existe un voisinage</u> U <u>de</u> b_o <u>et un voisinage</u> N <u>de la section nulle de la restriction</u> $V_{A|U}$ <u>du fibré</u> V_A <u>au-dessus de</u> U <u>vérifiant la condition suivante</u> :

<u>pour tout</u> b <u>dans</u> U <u>et tout</u> v <u>dans</u> $N \cap p^{-1}(b)$, <u>il existe un élément</u> $G_{b,v}$ <u>de</u> W <u>vérifiant</u> $G_{b,v}(b) = v$.

Soient $g : U \times A \longrightarrow V_{A|U}$ une carte au voisinage de b_o , $\pi : U \times B \longrightarrow B$ la projection et Δ la diagonale de $U \times B$. On note $\mathbf{L}(A, \pi^* V_A)$ le fibré vectoriel banachique sur $U \times B$ des applications linéaires continues de A dans $\pi^* V_A$; g définit une section de ce fibré au-dessus de Δ qui se prolonge par (3.1.3) en une section globale G ; la section G vérifie pour tout b dans U et tout f dans A

$$G(b,b)(f) = g(b,f)$$

et l'élément $G_{b,g(b,f)}$ de Γ défini par $G_{b,g(b,f)}(b') = G(b,b')(f)$ dépend continuement de (b,f) et linéairement de f d'où le lemme.

<u>Fin de la démonstration du théorème</u>

Fixons r et un voisinage W de O dans Γ ; soient U et N vérifiant (3.1.4) et tels qu'il existe une carte $\gamma : Y_{|U} \longrightarrow U \times F$, une carte $g : U \times A \longrightarrow V_{A|U}$ et $\varepsilon > 0$ satisfaisant à $g(U \times \{f \in A \mid \|f\|_A < \varepsilon\}) \subset N$. Enfin, notons $q : U \times F \longrightarrow F$ la projection. On déduit de la A-convexité de F l'existence d'un élément f de A vérifiant

$$\sup_n |f(q \circ \gamma(y_n))| = +\infty$$

et

$$\|f\|_A < \varepsilon ,$$

soit alors n vérifiant $p(y_n) \in U$ et $|f(q \circ \gamma(y_n))| > r$; il suffit alors d'appliquer le lemme 3.1.4 à $b = p(y_n)$ et $v = g(p(y_n), f)$ pour obtenir l'existence d'un élément G de W satisfaisant à

$$|\hat{G}(y_n)| > r .$$

3.2. Exemples d'espaces de Banach-Stein

Soit D un domaine de $\mathbb{C}^n$ possédant une distance d invariante par les automorphismes de D ; soit z_o dans $\mathbb{C} - D$, on considère alors l'espace de Banach A défini par

$$(*) \qquad A = \{f \in O(D) \mid \sup_{z\in D} |f(z)|e^{-d(z,z_o)} < +\infty\} ,$$

il vérifie 3.1.1 (ii).

Utilisant la pseudo-distance de Carathéodory ([17]), N. Sibony ([29], [30]) et A. Hirschowitz ([15]) ont montré que tout espace analytique c-fortement complet est de Banach-Stein (on dit qu'un espace Y est c-fortement complet si les fonctions holomorphes bornées séparent les points de Y et si tout sous-ensemble borné pour la métrique de Carathéodory est relativement compact dans Y). C'est le cas notamment des domaines bornés homogènes de $\mathbb{C}^n$, des domaines strictement pseudo-convexes à frontière $\mathscr{C}^2$, des polyèdres généralisés, des produits, intersections et sous-variétés de tels domaines.

N. Sibony et A. Hirschowitz ont utilisé ce résultat pour donner une réponse affirmative au problème de Serre dans le cas où la fibre est un ouvert de $\mathbb{C}$; Y. T. Siu en a simultanément donné une très élégante démonstration ; c'est celle que nous allons exposer.

THÉORÈME 3.2.1 (Y. T. Siu [31]).- Tout ouvert connexe de $\mathbb{C}$ est un espace de Banach-Stein.

Démonstration

Dans le cas $D = \mathbb{C}$, il suffit de prendre pour espace A l'espace des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 1. Supposons désormais D différent de $\mathbb{C}$. On va définir sur D un écart d invariante par les automorphismes et telle que l'espace A défini par $(*)$ contienne pour tout a dans $\mathbb{C} - D$ les fonctions f et g définies par $f(z) = z - a$ et $g(z) = 1/(z - a)$; il en résulte immédiatement que D est A-séparable et A-convexe. Enfin, le revêtement universel de D étant soit $\mathbb{C}$ soit le disque unité, on vérifie aisément la condition 3.1.1 (iii).

<u>Définition de</u> d : on sait que si $f : D_o \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe injective sur le disque unité de $\mathbb{C}$, alors l'image de f contient le disque de centre $f(0)$ et de rayon $(1/4)\,|f'(0)|$ (Théorème de Koebe-Biberbach [3]). On pose alors pour tout z dans D

$$a(z) = \inf_{\substack{f\,:\,D_o \longrightarrow D \\ f(o)=z \\ f \text{ holomorphe injective}}} \frac{1}{|f'(o)|^2}$$

et on note $\delta_D(z)$ la distance de z au complémentaire de D ; on a alors

(**) $$a(z) \geq 1/(4\delta_D(z))^2 .$$

Soit alors h_D la métrique définie par $h_D(z) = 16\, a(z)\, dz \otimes d\bar{z}$ et d la distance associée à h_D ; cette métrique est invariante par les automorphismes de D et on déduit aisément de (**) que, pour tout couple (z_1,z_2) de points de D, on a

(***) $$d(z_1,z_2) \geq \operatorname{Log}(\delta_D(z_1)/\delta_D(z_2)) .$$

Soient a dans $\mathbb{C} - D$ et f la fonction définie par $f(z) = z - a$; on pose $D' = \mathbb{C} - \{a\}$ et on note d' la distance associée à $h_{D'}$; on a $d \geq d'$ et $\delta_{D'} \geq \delta_D$; on obtient alors pour tout z dans D

$$d'(z_o, z) \geq \operatorname{Log}(\delta_{D'}(z)/\delta_{D'}(z_o)) = \operatorname{Log}\frac{|z-a|}{|z_o-a|}$$

et

$$|f(z)|e^{-d'(z,z_o)} \leq |f(z)|\,\frac{|z_o-a|}{|z-a|} = |z_o - a| < +\infty ,$$

la fonction f est donc dans A. Enfin, il résulte immédiatement de (***) que la fonction g définie par $g(z) = 1/(z-a)$ est dans A.

COROLLAIRE 3.2.2 ([31]).- <u>Soit</u> $Y \xrightarrow{p} B$ <u>un fibré holomorphe dont la base</u> B <u>est de Stein et dont la fibre est un ouvert</u> U <u>de</u> $\mathbb{C}$. <u>Alors</u> Y <u>est un espace de Stein.</u>

<u>Démonstration</u>

On se ramène aisément au cas où la fibre a toutes ses composantes connexes isomorphes à un même ouvert V de $\mathbb{C}$; il existe alors un revêtement $B' \xrightarrow{f} B$ et un fibré holomorphe $Y \xrightarrow{p'} B'$ de fibre V vérifiant $f \circ p' = p$. Le corollaire résulte alors du fait que B' est de Stein ([35]) et du théorème 3.2.1.

<u>Remarque</u>.- J.-L. Stehlé ([34]) a remarqué que si F est un espace de Banach-Stein, il existe sur F une fonction φ continue strictement p.s.h. propre et peu perturbée par les automorphismes de F, i.e. telle que pour tout automorphisme g de F la fonction $\varphi \circ g - \varphi$ soit bornée : il suffit de poser :

$$\varphi(x) = \operatorname{Log}\left[\sup_{\substack{f \in A \\ \|f\|_A \leq 1}} |f(x)|\right] .$$

Généralisant un résultat de K. Konigsberger ([18]), J.-L. Stehlé a montré que si $Y \to B$ est un fibré holomorphe dont la base est de Stein et dont la fibre admet une fonction continue strictement p.s.h. propre et peu perturbée par les automorphismes, alors Y est de Stein.

3.3. Espaces hyperconvexes

On sait qu'un espace analytique est de Stein si et seulement s'il admet une fonction continue strictement p.s.h. et propre (R. Narasimhan [23]). On dit qu'un espace de Stein est hyperconvexe s'il admet une fonction p.s.h. propre et négative. Cette notion a été introduite par J.-L. Stehlé qui a donné une réponse affirmative à la question de Serre dans le cas où la fibre est hyperconvexe. ([34])

THÉORÈME (3.3) (K. Diederich et E. Fornaess [10]).- *Soit* X *une variété de Stein ; soit* D *un domaine relativement compact pseudo-convexe à frontière* $\mathcal{C}^2$ *dans* X. *Alors* D *est hyperconvexe.*

Comme on vérifie aisément que le produit de deux espaces hyperconvexes est hyperconvexe, que l'intersection de deux sous-espaces ouverts hyperconvexes d'un espace analytique est hyperconvexe, on obtient ainsi une réponse affirmative au problème posé dans de nombreux cas.

3.4. Domaine de $\mathbb{C}^n$ dont le premier nombre de Betti est nul

Les domaines de $\mathbb{C}^n$ pour lesquels nous avons pu conclure vérifiaient certaines conditions analytiques ou des conditions de régularité de la frontière ([10], [25]). Dans le dernier résultat que nous allons mentionner la seule restriction imposée à la fibre est de nature topologique.

THÉORÈME 3.4.1 (Y. T. Siu [32]).- *Soit* $Y \to B$ *un fibré holomorphe dont la base* B *est de Stein et dont la fibre* F *est un ouvert borné de Stein de* $\mathbb{C}^n$ *vérifiant* $H^1(F, \mathbb{C}) = 0$. *Alors* Y *est de Stein.*

Donnons les idées essentielles de la démonstration. Les changements de cartes étant localement constants sur la base ([7]), on se ramène tout d'abord comme dans ([35]) au cas où B est un ouvert d'un espace $\mathbb{C}^k$: en effet les fibrés de base B et de fibre F sont classés par $\mathrm{Hom}(\Pi_1(B), \mathrm{Aut}\, F)/\mathrm{Aut}\, F$, le groupe $\mathrm{Aut}\, F$ opérant par automorphismes intérieurs, et si B est un sous-espace analytique de $\mathbb{C}^k$ c'est un rétracte par déformation d'un de ces voisinages et on peut prendre ce voisinage de Stein ([23]). On se ramène de plus comme dans (3.2.2) au cas où F est connexe.

Soient donc F un domaine borné de Stein $\mathbb{C}^n$, B un ouvert de Stein de $\mathbb{C}^k$ et $Y \xrightarrow{p} B$ un fibré holomorphe de fibre F . Soient enfin $(z_1,\dots,z_n)$ les coordonnées de $\mathbb{C}^n$ et $(w_1,\ldots,w_k)$ les coordonnées de $\mathbb{C}^k$.

Condition (V)

On dit qu'un champ de vecteurs holomorphe sur Y est vertical s'il est tangent aux fibres de p .

On dit que le fibré $Y \xrightarrow{p} B$ vérifie la condition (V) si, pour tout b dans B et tout isomorphisme analytique $i : p^{-1}(b) \longrightarrow F$, il existe un n-champ de vecteurs vertical sur Y dont la restriction à $p^{-1}(b)$ est $i^*(\frac{\partial}{\partial z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial z_n})$

Les deux étapes essentielles de la démonstration du théorème 3.4.1 sont les deux lemmes suivants.

Lemme 1.- Supposons que le fibré $Y \xrightarrow{p} B$ vérifie la condition (V). Soient b_o un point de B et (a_q) une suite de $p^{-1}(b_o)$ sans points adhérents. Alors il existe une fonction p.s.h. continue ℓ sur Y vérifiant $\sup_q \ell(a_q) = +\infty$.

Lemme 2.- Si F est un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ vérifiant $H_1(F, \mathbb{C}) = 0$, alors le fibré $Y \longrightarrow B$ vérifie la condition (V).

Démonstration du lemme 1

Soit $\gamma : U \times F \longrightarrow p^{-1}(U)$ une carte du fibré sur un voisinage U de b_o . Il existe n éléments $f_1,\ldots,f_n$ de $O(Y)$ vérifiant, pour tout i ,

$f_i \circ \gamma(b_o, (z_1,\ldots,z_n)) = z_i$ et tels que le morphisme

$\theta = (w_1,\ldots,w_k, f_1,\ldots,f_n) : Y \longrightarrow \mathbb{C}^{k+n}$ soit fini ([32] § 2.4). On note Z l'hypersurface de ramification de θ . Soit alors $\tilde{B} \xrightarrow{\chi} B$ le revêtement universel de B ; le pull-back $\tilde{Y} = \tilde{B} \times F$ de Y par χ est de Stein et si $\rho : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ désigne la projection naturelle, $\tilde{Y} - \rho^{-1}(Z)$ est de Stein. Soit d la fonction distance du domaine de Riemann $Y - Z \longrightarrow \mathbb{C}^{k+n}$; l'espace $\tilde{Y} - \rho^{-1}(Z)$ étant de Stein, la fonction $-\mathrm{Log}\, d$ est p.s.h. sur $Y - Z$ (Théorème d'Oka [14]-IX-D).

D'autre part, soit v un n-champ de vecteurs vertical sur Y dont la restriction à $p^{-1}(b_o)$ coïncide avec $\gamma_*(\frac{\partial}{\partial z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial z_n})$ et soit g l'élément de $O(Y)$ défini par

$$g = \langle df_1 \wedge \ldots \wedge df_n , v \rangle .$$

On pose alors, pour tout y dans $Y - Z$

$$h(y) = -\mathrm{Log}\, d(y) + 3\,\mathrm{Log}|g(y)| .$$

On a $\sup_q h(a_q) = +\infty$, car par construction $\mathrm{Log}|g|$ reste borné sur la suite (a_q) et d vérifie $\lim_q d(a_q) = 0$. On va maintenant vérifier que, pour tout z_o dans Z , on a

(*) $$\lim_{y \to z_o} h(y) = -\infty ,$$

ce qui permet de prolonger h en une fonction p.s.h. sur Y et alors la fonction $\ell = e^h$ est la fonction continue p.s.h. cherchée.

On peut se borner au cas où z_o est un point régulier de Z ; alors au voisinage de z_o et dans un système convenable de coordonnées locales le morphisme θ s'exprime par

$$\theta(y) = \theta(y_1,\dots,y_{k+n}) = (y_1^s, y_2, \dots, y_{k+n}) ,$$

avec $s \geq 2$, le point z_o étant l'origine des coordonnées. Alors la fonction g s'écrit

$$g(y) = s\, y_1^{s-1}\, k(y)$$

où k est une fonction holomorphe au voisinage de z_o . On en déduit l'existence de deux constantes positives M et C vérifiant pour tout y dans $Y - Z$ assez voisin de z_o

$$|g(y)|^2 \leq M s^2 |y_1|^{2s-2} \leq M s^2 |y_1|^s$$

$$|y_1|^s \leq C\, d(y) ,$$

d'où (*).

Démonstration du lemme 2

Pour tout automorphisme g de F , on note D_g le jacobien de g ; c'est un élément de $O(F)^*$ et il résulte de l'hypothèse faite sur F que l'on peut choisir une détermination de $\operatorname{Log} D_g$ sur F ; soit y_o un point de F fixé dans tout ce qui suit, on note f_g la détermination de $\operatorname{Log} D_g$ qui vérifie $f_g(y_o) = \operatorname{Log} |D_g(y_o)|$.

On va définir sur F un écart d telle que si A désigne l'espace de Banach des fonctions analytiques f sur F vérifiant

$$\sup_{y \in F} \frac{|f(y)|}{1 + d(y,y_o)} < +\infty ,$$

alors A est stable par les automorphismes de F et contient pour tout automorphisme g la fonction f_g .

Il suffit de considérer la pseudo métrique qui, pour tout y dans F , induit sur l'espace tangent $T_y F$ la longueur

$$\| u \| = \sup_{g \in \operatorname{Aut} F} \frac{1}{1 + |f_g(y_o)|} \left| \left\langle \frac{dD_g(y)}{g} , u \right\rangle \right|$$

([32] § 3.3 - 3.7). Enfin, on note $E \longrightarrow B$ le fibré vectoriel banachique de fibre A associé au fibré $Y \longrightarrow B$ (3.1) et $\mathcal{E}$ le faisceau des germes de sections de E .

Vérifions la condition (V) : soient b_o un point de B et $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de B par des ouverts convexes tel que b_o soit dans un seul ouvert U_i noté U_o . Pour tout i , soit $\gamma_i : p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times F$ une carte du fibré $Y \longrightarrow B$ au-dessus de U_i ; soient (g_{ij}) les changements de cartes et

$p_{ij} : U_i \cap U_j \times F \longrightarrow F$ la projection. Pour tout couple (i,j), on considère l'application

$$s_{ij} = f_{g_{ij}} \circ p_{ij} \circ \gamma_i : p^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow \mathbb{C} ,$$

et au-dessus de $U_i \cap U_j \cap U_k$, on pose $c_{ijk} = 1/2i\pi\ (s_{ij} + s_{jk} + s_{ki})$.
Il résulte de la définition des s_{ij} que (c_{ijk}) définit un 2-cocycle à valeurs entières sur B ; on note c sa classe dans $H^2(B,Z)$. L'espace B étant de Stein, c est la classe de Chern d'un fibré en droites L sur B que l'on peut représenter par un élément de $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_B^*)$ de la forme $(e^{t_{ij}})$ vérifiant pour tout triplet (i,j,k)

$$s_{ij} + s_{jk} + s_{ki} = 2i\pi\ (t_{ij} \circ p + t_{jk} \circ p + t_{k\ell} \circ p) .$$

Pour tout i et tout j, on pose alors $s'_{ij} = s_{ij} - 2i\pi\ (t_{ij} \circ p)$ et on obtient ainsi un 1-cocycle (s'_{ij}) du faisceau E. Il résulte alors de $H^1(\mathcal{U}, E) = 0$ ([6]) l'existence d'une cochaîne $(s_i) \in \prod_i H^0(U_i, E)$ vérifiant $s'_{ij} = s_i - s_j$ et on vérifie aisément que l'on peut imposer de plus

$$(*) \qquad s_o(b_o) = 0 .$$

On note $\tilde{s}_i$ l'élément de $\mathcal{O}(p^{-1}(U_i))$ défini par s_i. Soit alors $\omega = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$ et pour tout i

$$\omega_i = e^{\tilde{s}_i}\, \gamma_i^* \omega ,$$

on vérifie alors que l'on a sur $p^{-1}(U_i \cap U_j)$

$$(**) \qquad \omega_i = e^{2i\pi(t_{ij} \circ p)}\, \omega_j .$$

L'espace B étant de Stein, le fibré L admet une section globale non nulle en b_o ; il résulte alors de (*) et (**) l'existence d'un champ de vecteurs vertical sur Y induisant sur $p^{-1}(b_o)$ le champ $\gamma_o^*(\frac{\partial}{\partial z_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial z_n})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ANCONA, J. P. SPEDER - Espaces de Banach-Stein, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 25 (1971), 683-690.

[2] A. ANDREOTTI, R. NARASIMHAN - Oka's Heftunglemma and the Levi problem for complex spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 111 (1964), 345-366.

[3] H. BEHNKE, F. SOMMER - Theorie der funktionen einer complexen veränderlichen 3, Auflage, Springer-Verlag, 1965.

[4] H. BEHNKE, K. STEIN - Entwicklung analitischer funktionen auf Riemanschen flächen, Math. Ann., 120 (1948), 430-461.

[5] L. BUNGART - Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas, Trans. Amer. Math. Soc., 111 (1964), 317-344.

[6] L. BUNGART - On analytic fiber bundles I, Topology, 7 (1968), 55-68.

[7] H. CARTAN - Les transformations du produit topologique de deux domaines bornés, Bull. Soc. Math. de France, 64 (1936), 37-48.

[8] H. CARTAN - Funzioni e varietà complesse, Faisceaux analytiques cohérents, C.I.M.E., 1964.

[9] J.-P. DEMAILLY - Différents exemples de fibrés holomorphes non de Stein, Sém. P. Lelong, 1976/77.

[10] K. DIEDERICH, J. FORNAESS - Pseudoconvex domains, bounded strictly p.s.h. exhaustion functions, Inventionnes Math., 39 (1977), 129-141.

[11] G. FISCHER - Holomorph-vollständige Faserbundel, Math. Ann., 180 (1969), 341-348.

[12] G. FISCHER - Hilbert spaces of holomorphic functions on bounded domains, Manuscripta Math., 3 (1970), 305-314.

[13] G. FISCHER - Fibrés holomorphes au-dessus d'un espace de Stein, Espaces analytiques, Bucarest, Acad. Rep. Soc. Roumanie, 1971.

[14] R. C. GUNNING, H. ROSSI - Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965.

[15] A. HIRSCHOWITZ - Domaines de Stein et fonctions holomorphes bornées, Math. Ann., 213 (1975), 185-193.

[16] L. HÖRMANDER - An introduction to complex analysis in several variables, Van Nostrand, 1966.

[17] S. KOBAYASHI - Hyperbolic manifolds and holomorphic mapping, N.Y. Dekker, 1970.

[18] K. KONIGSBERGER - Uber die Holomorphie-vollständigkeit lokal-trivialer Faserräume, Math. Ann., 189 (1970), 178-184.

[19] P. LE BARZ - A propos des revêtements ramifiés d'espaces de Stein, Math. Ann., 222 (1976), 63-69.