JACQUES STERN

Le problème des cardinaux singuliers

Séminaire N. Bourbaki, 1978, exp. nº 494, p. 59-72
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1976-1977__19__59_0>

Séminaire BOURBAKI
29e année, 1976/77, n° 494

Novembre 1976

LE PROBLÈME DES CARDINAUX SINGULIERS

[d'après R. B. JENSEN et J. SILVER]

par Jacques STERN

§ 1. Introduction

Le but du présent exposé est de rendre compte des progrès récents réalisés sur le problème des cardinaux singuliers. Pour formuler exactement ce problème on va préciser quelque peu la terminologie ensembliste employée.

Par ordinal, on entend, conformément à l'usage en théorie des ensembles, un ensemble α bien ordonné par la relation d'appartenance et transitif (tout élément de α est un sous-ensemble de α). Il s'agit là d'un moyen canonique de représenter tous les bons ordres : à chaque type de bon ordre est associé un unique ordinal et deux ordinaux différents ont des types d'ordre distincts. A tout ordinal α est associé son successeur $\alpha+1 = \alpha \cup \{\alpha\}$. Les ordinaux qui ne sont pas des successeurs sont dits ordinaux limite.

Par induction transfinie, on définit la relation

$$\beta = \aleph_\alpha$$

où α et β sont des ordinaux par les clauses suivantes :

- $\aleph_0$ est le plus petit ordinal infini ;
- $\aleph_\alpha$ est le plus petit ordinal qui n'est en bijection avec aucun des ordinaux $\aleph_\beta$, $\beta < \alpha$.

On note fréquemment ω pour $\aleph_0$, Ω pour $\aleph_1$.

Si on admet l'axiome du choix, ce qui sera fait tout au long de cet exposé, tout ensemble est en bijection avec un ordinal et, par suite, avec un ordinal de la forme $\aleph_\alpha$; à chaque ensemble correspond donc un unique $\aleph_\alpha$ qu'on appelle cardinal de X et qu'on désigne par $|X|$. Plus généralement, on appelle cardinaux les ensembles de la forme $\aleph_\alpha$.

Soit α un ordinal et soit X un ensemble d'ordinaux strictement plus petits que α (c'est-à-dire un sous-ensemble de α) ; on dit que X est cofinal en α si

$$\sup X = \alpha$$

c'est-à-dire si α est le plus petit ordinal plus grand que tous les ordinaux de X .

Si α est un ordinal, on appelle cofinalité de α et on note $cf(\alpha)$ le plus petit cardinal $\varkappa$ tel que α admette un ensemble cofinal de cardinal $\varkappa$.

On a donc

$$cf(\alpha) = \inf\{|X| : X \text{ est cofinal en } \alpha\} .$$

Un cardinal $\varkappa$ est régulier si sa cofinalité est exactement $\varkappa$. Dans le cas contraire, il est dit singulier.

On démontre que tout cardinal de la forme $\aleph_{\alpha+1}$ est régulier. Si α est limite, la cofinalité de $\aleph_\alpha$ est la même que celle de α ; le plus petit cardinal singulier est $\aleph_\omega$: sa cofinalité est ω . Le plus petit cardinal singulier de cofinalité $> \omega$ est $\aleph_\Omega$.

Si $\varkappa$ est un cardinal, on note $2^\varkappa$ le cardinal de l'ensemble $P(\varkappa)$ et $\varkappa^+$ le plus petit cardinal strictement plus grand que $\varkappa$.

L'un des problèmes les plus naturels et les plus anciens de la théorie des ensembles est celui de décrire la relation fonctionnelle F définie par

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{F(\alpha)} .$$

Pour $\alpha = 0$, c'est le célèbre problème du continu de Cantor : quelle est la valeur de $2^{\aleph_0}$?

Comme on le sait, l'hypothèse du continu a été reconnue indépendante des axiomes de la théorie des ensembles. Plus précisément, Gödel [4] et Cohen [2] ont établi (respectivement), que pourvu que la théorie des ensembles ne soit pas contradictoire, on pouvait ajouter aux axiomes l'hypothèse du continu (ou sa négation) sans obtenir pour autant une contradiction.

En ce qui concerne le problème général, c'est-à-dire la description de F , certaines lois ont été établies à savoir :

1.1. Loi de croissance : Si $\alpha \leq \beta$, alors $F(\alpha) \leq F(\beta)$.

1.2. Loi de König : $cf(\aleph_{F(\alpha)}) > \aleph_\alpha$.

A la suite des travaux de Cohen, Easton [3] a montré qu'on ne pouvait mettre en évidence d'autres lois qui gouvernent le comportement de la relation fonctionnelle F , au moins pour les ordinaux α tels que $\aleph_\alpha$ soit régulier. Plus précisément, Easton a établi la non contradiction de la théorie des ensembles à laquelle on ajoute l'axiome :

- Si $\aleph_\alpha$ est régulier, alors $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{F(\alpha)}$

ce pour une large classe de relations fonctionnelles vérifiant la loi de croissance et la loi de König (et comprenant celles qui ont une expression mathématique "simple"). Ainsi, si la théorie des ensembles est non contradictoire, on peut lui ajouter l'axiome :

Pour tout cardinal régulier $\aleph_\alpha$, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+2}$.

En effet, la relation $F(\alpha) = \alpha + 2$ vérifie la loi de König puisque $\aleph_{\alpha+2}$ est régulier.

Il restait donc à élucider le "problème des cardinaux singuliers" c'est-à-dire à déterminer le comportement de F en les ordinaux α tels que $\aleph_\alpha$ soit singulier. Dans les situations étudiées par Easton, la relation fonctionnelle F vérifiait toujours la relation supplémentaire suivante (pour $\aleph_\alpha$ singulier) :

$$F(\alpha) \leq (\sup_{\beta<\alpha} F(\beta)) + 1 .$$

Cette relation jointe aux lois de croissance et de König permet de calculer la valeur de $F(\alpha)$ pour $\aleph_\alpha$ singulier à partir des valeurs $F(\alpha)$, $\aleph_\alpha$ régulier.

Elle a en particulier pour conséquence l'hypothèse des cardinaux singuliers qui s'énonce :

1.3. Hypothèse des cardinaux singuliers (H.C.S.) : Si $\aleph_\alpha$ est singulier et si pour tout ordinal $\beta < \alpha$, on a

$$2^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha ,$$

alors

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} .$$

L'opinion la plus répandue était que les obstacles qui s'opposaient à ce qu'on étende convenablement le théorème d'Easton (par exemple, à des relations fonctionnelles F contredisant H.C.S.) étaient de nature technique. On pourra donc apprécier l'effet de surprise produit par le résultat suivant de Silver [11] mettant en évidence une nouvelle loi vérifiée par F .

1.4. Loi de Silver : Si $\aleph_\alpha$ est un cardinal singulier de cofinalité $> \omega$ et si

$$\forall \beta < \alpha , \qquad 2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$$

alors

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} .$$

Ce résultat conduisit Jensen à aborder la question de l'hypothèse H.C.S. sous un angle nouveau. Pour apprécier l'originalité du résultat de Jensen, il convient de rappeler rapidement, à la lumière de certains exemples, de quelle information on peut disposer sur le statut métamathématique d'une hypothèse H donnée. Dans tout ce qui suit, on supposera – le plus souvent implicitement – que la théorie des ensembles est non contradictoire. Trois situations apparaissent :

1) On connait une démonstration de H ou de sa négation. C'était là la seule possibilité satisfaisante dans la conception traditionnelle des mathématiciens.

2) On connait une démonstration d'indépendance de H , c'est-à-dire qu'on a une preuve de la non contradiction de H et aussi une preuve de la non contradiction de la négation de H . Comme on l'a rappelé plus haut, c'est le cas pour l'hypothèse du continu. C'est le cas également pour d'autres hypothèses comme l'hypothèse de Suslin.

3) On sait qu'il n'existe pas de démonstration d'indépendance de H ; par exemple, on sait qu'il n'existe pas de preuve de la non contradiction de H (et donc pas de preuve de H).

On dit alors que H est une hypothèse plus forte que la théorie des ensembles.

La situation d'une telle hypothèse est alors la suivante : il se peut qu'il existe une preuve de la négation de H mais s'il n'en existe pas, il n'y a aucun moyen mathématique de s'en assurer.

Admettre qu'une telle hypothèse est vraie ou simplement en étudier les conséquences relève donc de l'intuition mathématique. Un exemple simple d'hypothèse connue qui soit plus forte que la théorie des ensembles est l'hypothèse des cardinaux inaccessibles qui s'énonce ainsi :

1.5. Hypothèse des cardinaux inaccessibles (H.I.). Il existe un cardinal régulier différent de $\aleph_0$ et qui n'est pas de la forme $\aleph_{\alpha+1}$.

La non contradiction de l'hypothèse H.I. est couramment admise par les mathématiciens. Il n'en est pas de même pour une autre hypothèse, qui implique H.I., l'hypothèse d'Ulam qui s'énonce :

1.6. Hypothèse d'Ulam. Il existe un ensemble non dénombrable X tel que la σ-algèbre $P(X)$ porte une mesure de probabilité diffuse.

Les résultats de Jensen établissent que la négation de l'hypothèse H.C.S. est plus forte que la théorie des ensembles. Plus précisément :

1.7. THÉORÈME (Jensen [9]).- Si la négation de l'hypothèse des cardinaux singuliers est non contradictoire, alors l'hypothèse d'Ulam est également non contradictoire.

§ 2. Le théorème de Silver

La preuve du théorème de Silver utilise de façon essentielle la notion d'ensemble stationnaire qu'on va d'abord présenter.

2.1. Ensembles stationnaires

On rappelle, qu'avec la terminologie adoptée, un ordinal α a exactement pour éléments les ordinaux plus petits que α. On confondra donc les notions de sous-ensemble de α et d'ensemble d'ordinaux plus petits que α.

2.1.1. DÉFINITION.- Soient α un ordinal et A un sous-ensemble de α. On dit que A est <u>clos cofinal</u> si

(i) A est cofinal (i.e. $\sup A = \alpha$)

(ii) Si β est élément de α et si $A \cap \beta$ est cofinal en β, alors $\beta \in A$.

Les ensembles clos cofinaux sont les parties fermées non compactes de A muni de la topologie de l'ordre.

2.1.2. DÉFINITION.- Un sous-ensemble A de α est <u>stationnaire</u> s'il rencontre tous les sous-ensembles clos cofinaux de α.

On va indiquer (sans démonstration) les principaux résultats de la théorie des ensembles clos cofinaux et stationnaires.

2.1.3. PROPOSITION.- <u>Soit $\varkappa$ un cardinal régulier, $\varkappa > \omega$. L'intersection de moins de $\varkappa$ sous-ensembles clos cofinaux de $\varkappa$ est encore un sous-ensemble clos cofinal de $\varkappa$.</u>

2.1.4. COROLLAIRE.- <u>Soit B un sous-ensemble stationnaire d'un cardinal régulier $\varkappa > \omega$ et soit A une partie de B ; l'un des deux ensembles A ou $B - A$ est stationnaire.</u>

En effet, si C_1 et C_2 sont deux ensembles clos cofinaux de $\varkappa$ tels que

$$C_1 \cap A = \emptyset$$
$$C_2 \cap (B - A) = \emptyset ,$$

on en déduit que $C_1 \cap C_2$ est un ensemble clos cofinal disjoint de B ce qui n'est pas possible.

Le résultat suivant est essentiel pour la preuve du théorème de Silver :

2.1.5. THÉORÈME.- <u>Soit $\varkappa$ un cardinal régulier $> \omega$ et soit $f : \varkappa \to \varkappa$ une fonction telle que</u>

$$\{\alpha : f(\alpha) < \alpha\} \text{ est stationnaire.}$$

Alors, il existe un ordinal $\xi < \varkappa$ tel que

$$\{\alpha : f(\alpha) = \xi\} \text{ est stationnaire.}$$

2.2. Lois de Silver

A la suite du résultat de Silver (1.4), d'autres lois gouvernant le calcul de $2^{\aleph_\alpha}$ pour $\aleph_\alpha$ singulier de cofinalité $> \omega$, furent mises en évidence par Silver [11], et aussi par d'autres auteurs [5]. Sans englober tout ce qui est connu, l'énoncé suivant est une version assez générale des lois de Silver.

2.2.1. THÉORÈME.- *Soit* $\aleph_\alpha$ *un cardinal singulier de cofinalité* $\varkappa > \omega$ *et soit* μ *un ordinal* $\mu < \varkappa$; *on suppose que* $\{\beta < \alpha : 2^{\aleph_\beta} \leq \aleph_{\beta+\mu}\}$ *est un sous-ensemble stationnaire de* α ; *alors on a* $2^{\aleph_\alpha} \leq \aleph_{\alpha+\mu}$.

La preuve de ce théorème donnée à l'origine par Silver [11] utilisait les techniques les plus récentes de la théorie des ensembles, en particulier la méthode de Cohen. La démonstration qu'on va présenter est élémentaire même si l'intuition qui la sous-tend ne l'est pas ; elle a été découverte indépendemment par plusieurs auteurs.

Dans le souci de simplifier les notations, on va donner la preuve du théorème 2.2.1 dans le cas où $\mu = 1$ et $\alpha = \Omega$. On pose

$$B = \{\beta < \Omega : 2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}\} ;$$

par hypothèse, B est un sous-ensemble stationnaire de Ω .

Pour chaque ordinal β de B , on choisit une bijection ρ_β de $P(\aleph_\beta)$ sur $\aleph_{\beta+1}$. A tout sous-ensemble X de $\aleph_\Omega$, on associe alors la fonction φ_X définie sur B par

$$\varphi_X(\beta) = \rho_\beta(X \cap \aleph_\beta) \quad .$$

Enfin, on note $R(X,Y)$ la relation

$$\{\beta : \varphi_X(\beta) < \varphi_Y(\beta)\} \text{ est stationnaire.}$$

2.2.2. *Lemme*.- *Si* X *et* Y *sont des sous-ensembles distincts de* $\aleph_\Omega$, *l'une au moins des relations* $R(X,Y)$ *ou* $R(Y,X)$ *est vérifiée.*

Preuve. Si X et Y sont distincts, il existe un ordinal β_0 tel que $X \cap \beta_0 \neq Y \cap \beta_0$. Si on a $\beta > \beta_0$, alors

$$X \cap \beta \neq Y \cap \beta$$

et aussi $$\varphi_X(\beta) \neq \varphi_Y(\beta) \ .$$

L'ensemble $B - \beta_0$ est alors la réunion disjointe des ensembles B_1 et B_2 définis par

$$B_1 = \{\beta \in B-\beta_o : \varphi_X(\beta) < \varphi_Y(\beta)\}$$

$$B_2 = \{\beta \in B-\beta_o : \varphi_Y(\beta) < \varphi_X(\beta)\} .$$

Comme $B-\beta_o$ est stationnaire, le corollaire 2.1.4 montre que l'un au moins des deux ensembles B_1, B_2 est stationnaire, d'où le lemme.

2.2.3. Lemme.- Soit X une partie donnée de $\aleph_\Omega$, alors $\{Y : R(Y,X)\}$ est de cardinal au plus $\aleph_\Omega$.

Avant de donner la preuve du lemme, on va voir comment le théorème s'en déduit.

Soit $\mathfrak{X} \subseteq P(\aleph_\Omega)$ un ensemble de cardinal $\aleph_{\Omega+1}$ exactement ; il résulte du lemme que $\mathfrak{X}' = \{Y : \exists X \in \mathfrak{X} \quad R(Y,X)\}$ est de cardinal au plus $\aleph_{\Omega+1}$. Donc $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{X}'$ est de cardinal $\aleph_{\Omega+1}$. On va voir qu'on a $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{X}' = P(\aleph_\Omega)$, ce qui termine la preuve du théorème. S'il n'en est pas ainsi, on fixe $Y_o \in P(\aleph_\Omega) - (\mathfrak{X} \cup \mathfrak{X}')$. Si X est élément de $\mathfrak{X}$, on n'a pas $R(Y_o,X)$ puisque $Y_o \notin \mathfrak{X}'$, donc par le lemme 2.2.2, on a $R(X,Y_o)$. Par suite :

$\{X : R(X,Y_o)\} \supseteq \mathfrak{X}$ et est donc de cardinal $\aleph_{\Omega+1}$
ce qui contredit le lemme 2.2.3.

Il reste à établir le lemme 2.2.3. Pour chaque ordinal $\beta \in B$, on choisit une injection μ_β de $\varphi_X(\beta)$ dans $\aleph_\beta$ (c'est possible puisque $\varphi_X(\beta) < \aleph_{\beta+1}$). Soit Y une partie de $\aleph_\Omega$ telle qu'on ait $R(Y,X)$. Par définition, l'ensemble B_Y défini par

$$B_Y = \{\beta \in B : \varphi_Y(B) < \varphi_X(\beta)\}$$

est stationnaire.

Soit h_Y la fonction définie sur B_Y par

$$h_Y(\beta) = \gamma \qquad \text{si} \quad \aleph_\gamma = |\mu_\beta(\varphi_Y(\beta))| .$$

Il est clair que pour tout élément β de B_Y, on a

$$h_Y(\beta) < \beta .$$

Par suite, d'après le théorème 2.1.5, il existe un ensemble stationnaire S_Y et un ordinal ξ_Y tels que

$$\{\beta : h_Y(\beta) = \xi_Y\} \supseteq S_Y .$$

Soit ζ une fonction qui, à toute partie Y de $\aleph_\Omega$ telle qu'on ait $R(Y,X)$, associe un triplet (ξ_Y, S_Y, θ_Y) où ξ_Y et S_Y ont les propriétés énoncées ci-dessus et où θ_Y est l'application $\theta_Y : S_Y \to \aleph_{\xi_Y+1}$ définie par

$$\theta_Y(\beta) = \mu_\beta(\varphi_Y(\beta)) .$$

La fonction ζ est injective ; si, en effet, sur un ensemble stationnaire S_Y $(= S_{Y'})$, on a

$$\mu_\beta(\varphi_Y(\beta)) = \mu_\beta(\varphi_{Y'}(\beta)) \ ;$$

on a aussi $\quad \varphi_Y(\beta) = \varphi_{Y'}(\beta) \quad$ ou encore $\quad Y \cap \aleph_\beta = Y' \cap \aleph_\beta$

soit $\quad Y = Y'$.

Or l'ensemble image de la fonction ζ a pour cardinal celui de $\bigcup_{\substack{S \subseteq \Omega \\ \xi \in \Omega}} \aleph_{\xi+1}^S$

soit $\aleph_\Omega$, ce qui établit le lemme.

§ 3. Le théorème de Jensen

Il n'est pas question de donner ici la preuve du théorème 1.7 qui repose sur une théorie extrêmement technique et profonde développée par Jensen depuis plusieurs années dans le but d'étudier la structure "fine" de l' "univers constructible" . On se bornera à présenter les ensembles constructibles de façon à donner une version précise du théorème 1.7, puis on expliquera, autant que possible, la structure de la preuve et la façon dont s'introduit la théorie de Jensen en s'intéressant, d'ailleurs, à une version légèrement affaiblie du théorème.

3.1. Ensembles constructibles

La notion d'ensemble constructible a été introduite par Gödel [4] dans sa preuve de la non contradiction de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu. D'une façon heuristique, on peut définir les ensembles constructibles comme les membres du plus petit univers L qui satisfasse les axiomes de la théorie des ensembles, soit transitif et contienne tous les ordinaux. (Une définition dorrecte de L sera donnée dans la section 3.3.) De même, si A est un ensemble d'ordinaux, L^A est le plus petit univers transitif qui contienne tous les ordinaux ainsi que l'ensemble A et satisfasse les axiomes de la théorie des ensembles.

Parmi les propriétés de L , on peut citer :

3.1.1. THEORÈME (Gödel [4]).- <u>L'hypothèse généralisée du continu est vraie dans</u> L .

3.1.2. THÉORÈME (Scott [10]).- <u>L'hypothèse d'Ulam est fausse dans</u> L .

3.2. Versions affaiblies de l'hypothèse d'Ulam

On va énoncer deux versions affaiblies de l'hypothèse d'Ulam (H.U.) qui seront utiles dans l'énoncé précis des résultats de Jensen. La première de cette hypothèse est l'hypothèse suivante :

3.2.1. <u>Hypothèse</u> H.U'.: Il existe un ensemble d'ordinaux A tel que L^A vérifie l'hypothèse d'Ulam.

Il n'est pas difficile de voir que H.U. implique H.U'. .

Une autre version affaiblie de H.U. est l'hypothèse suivante :

3.2.2. <u>Hypothèse</u> ($\#$) : Il existe un ensemble constructible non dénombrable X et une σ-algèbre de parties de X , $\mathfrak{A}$ tels que

(i) $\mathfrak{A}$ contient $P(X) \cap L$

(ii) $\mathfrak{A}$ porte une mesure de probabilité diffuse .

Il est clair que l'hypothèse ($\#$) est conséquence de H.U'. comme de H.U. .

L'hypothèse ($\#$) est souvent symbolisée dans la littérature de théorie des ensembles par " $0^{\#}$ existe " pour des raisons qu'il serait long d'expliciter (cf. [12]). Tout comme H.U. , elle est plus forte que la théorie des ensembles. Elle a de nombreuses conséquences qui ne peuvent être établies dans la théorie des ensembles seule :

- la détermination de certains jeux analytiques (voir [6] pour la définition des jeux analytiques) ,

- la mesurabilité de certains ensembles P C A (images continues du complémentaire d'un analytique).

Les théorèmes de Jensen établissent un lien profond entre l'hypothèse des cardinaux singuliers (ou plutôt sa négation) et des hypothèses du type H.U'. ou ($\#$).

3.2.3 THÉORÈME (Jensen [9]).- <u>La négation de l'hypothèse des cardinaux singuliers implique l'existence d'un ensemble d'ordinaux</u> A <u>tel que</u> L^A <u>vérifie l'hypothèse d'Ulam</u>.

Ce théorème a été établi tout récemment par un raffinement considérable de la preuve du théorème plus faible suivant :

3.2.4. THÉORÈME (Jensen [8]).- <u>La négation de l'hypothèse des cardinaux singuliers implique</u> ($\#$).

On ne va plus s'intéresser dans la suite qu'à la forme faible du théorème de Jensen (soit 3.2.4.). Elle est, elle-même, conséquence du lemme suivant :

3.2.5. Lemme de recouvrement (Jensen [8]).- <u>On suppose la négation de l'hypothèse</u> ($\#$) : <u>alors, tout ensemble non dénombrable</u> $X \subseteq L$ <u>est inclus dans un ensemble constructible</u> Y <u>tel que</u> $|X| = |Y|$.

On va déduire de ce lemme le théorème 3.2.4. Il s'agit de voir que si $\aleph_\alpha$ est un cardinal singulier tel que

$$\forall \beta < \alpha \qquad 2^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha ,$$

alors $$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} .$$

On fixe un ensemble cofinal en $\aleph_\alpha$ et de cardinal $< \aleph_\alpha$ et $\geq \aleph_1$, soit B . Pour chaque élément β de B , on fixe une bijection φ_β de $P(\beta)$ sur $2^{|\beta|}$. A tout ensemble $X \subseteq \aleph_\alpha$, on associe la fonction φ_X définie sur B par

$$\varphi_X(\beta) = \varphi_\beta(X \cap \beta) .$$

Il est clair que l'application qui à X associe φ_X est injective. Il suffit donc d'établir que l'ensemble $\mathfrak{F}$ des fonctions définies sur un sous-ensemble de $\aleph_\alpha$ de cardinal $|B|$ à valeurs dans $\aleph_\alpha$ est tel que $|\mathfrak{F}| \leq \aleph_{\alpha+1}$. Comme toute fonction de $\mathfrak{F}$ a, d'après le lemme de recouvrement, son graphe inclus dans un sous-ensemble constructible de $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ de cardinal $|B|$, le cardinal de $\mathfrak{F}$ est majoré par celui de

$$\mathcal{A} = \bigcup_{\substack{Y \subseteq \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \\ Y \in L \\ |Y| = |B|}} P(Y)$$

$\{Y : Y \subseteq \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ et $Y \in L$ et $|Y| = |B|\}$ est un sous-ensemble de $L \cap P(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha)$ et est donc de cardinal $\aleph_{\alpha+1}$ au plus. Comme chaque ensemble $P(Y)$ est de cardinal $2^{|B|}$, $\mathcal{A}$ est de cardinal au plus $\aleph_{\alpha+1} \times 2^{|B|} = \aleph_{\alpha+1}$.

3.3. Sur la preuve du lemme de recouvrement

Pour donner une idée du lemme de recouvrement et de la façon dont s'introduit la théorie de Jensen, il est nécessaire de donner une définition précise de L . Pour cela on considère les relations fonctionnelles $\mathfrak{F}_i$ $(1 \leq i \leq 5)$ définies par :

$$\mathfrak{F}_1(x,y) = \{x,y\}$$
$$\mathfrak{F}_2(x,y) = x - y$$
$$\mathfrak{F}_3(x,y) = x$$
$$\mathfrak{F}_4(x,y) = y$$
$$\mathfrak{F}_5(x) = \bigcup_{z \in x} z .$$

3.3.1. DÉFINITION.- On appelle fonction rudimentaire toute relation fonctionnelle $\mathfrak{F}$ obtenue à partir des $\mathfrak{F}_i$, $1 \leq i \leq 5$, par composition et par application de l'opération $\mathfrak{I}$ qui à $\mathfrak{F}$ associe la relation fonctionnelle $\mathfrak{I}_{\mathfrak{F}}$ définie par

$$\mathfrak{I}_{\mathfrak{F}}(y_1,\dots,y_n) = \mathrm{Im}\, \mathfrak{F} \restriction (y_1 \times \dots \times y_n) .$$

3.3.2. DÉFINITION.- Soit β un ordinal ; on définit par induction transfinie la relation

$$x = J_\beta$$

par les clauses suivantes :

(i) $J_0 = \emptyset$

(ii) J_β est la clôture de $\bigcup_{\alpha<\beta} J_\alpha \cup \{J_\alpha\}$ par les fonctions rudimentaires.

Un ensemble x est <u>constructible</u> s'il existe un ordinal β tel que $x \in J_\beta$.

3.3.3. DÉFINITION.- Soient $y_1,\ldots,y_k$ des ensembles fixés ; on appelle <u>équation ensembliste</u> à paramètres $y_1,\ldots,y_k$ toute équation de la forme

$$\mathfrak{F}(u , y_1,\ldots,y_k) = \emptyset$$

où u est l'inconnue et $\mathfrak{F}$ une fonction rudimentaire.

3.3.4. DÉFINITION.- Soient Y , Y' des ensembles stables par les fonctions rudimentaires et soit $\pi : Y \to Y'$ une injection donnée ; on dit que π est Σ_1 si

(i) Pour toute fonction rudimentaire $\mathfrak{F}$ et pour tout n-uple d'éléments de Y soit $y_1,\ldots,y_n$, on a

$$\mathfrak{F}(\pi y_1,\ldots,\pi y_n) = \pi\mathfrak{F}(y_1,\ldots,y_n) .$$

(ii) Pour toute équation ensembliste (E) à paramètres dans Y soit

$$\mathfrak{F}(x , y_1,\ldots,y_k) = \emptyset$$

si l'équation (πE) définie par

$$\mathfrak{F}(x , \pi y_1,\ldots,\pi y_k) = \emptyset$$

a une solution dans Y' alors (E) a une solution dans Y .

<u>Remarques</u>.- 1) Il n'est pas difficile de voir que si $\pi : Y \to Y'$ est une injection Σ_1 et si E est une équation à plusieurs variables telle que πE a une solution dans Y' , E a une solution dans Y .

2) Si $Y \subseteq Y'$, on dit que Y est un Σ_1-<u>sous-ensemble</u> de Y' si l'identité est Σ_1 .

3.3.5. PROPOSITION.- <u>Soient τ un ordinal donné et x une partie de J_τ ; il existe un plus petit sous-ensemble Σ_1 de J_τ soit $\Sigma(x)$ tel que $x \subseteq \Sigma(x)$. Si x est constructible, $\Sigma(x)$ est constructible et de cardinal égal à</u> $\sup(\aleph_0 , |x|)$. <u>De plus, si $\pi : J_\tau \to J_{\tau'}$ est une injection Σ_1 et si $x \in J_\tau$, alors, l'image de $\pi \restriction \Sigma(x)$ est incluse dans $\Sigma(\pi x)$</u> .

On peut maintenant présenter la structure de la preuve du cas particulier suivant du lemme de recouvrement

3.3.6. <u>Lemme</u>.- <u>On suppose la négation de l'hypothèse (#). Alors, si X est une partie de $\aleph_\Omega$ telle que $|X| < \aleph_\Omega$, il existe un ensemble Y constructible tel que $|Y| < \aleph_\Omega$ et $X \subseteq Y$</u> .

Ainsi que le lecteur peut facilement le vérifier en reprenant la section 3.2, le lemme 3.3.6 suffit à établir que la négation de H.C.S. en $\aleph_\Omega$ implique l'hypothèse (#).

On définit pour chaque ordinal dénombrable α un ensemble Z_α par application de la proposition 3.3.5 (avec $\tau = \aleph_\Omega$) :

$$Z_o = \Sigma(X \cup \{\aleph_\alpha : \alpha < \Omega\})$$

$$Z_\alpha = \Sigma(\bigcup_{\beta<\alpha} Z_\beta \cup Z^*_\beta)$$

où Z^*_β est l'ensemble des ordinaux θ tels que $Z_\beta \cap \theta$ est cofinal en θ .

On pose $Z_\Omega = \bigcup_{\alpha<\Omega} Z_\alpha$;

Z_Ω est alors un sous-ensemble Σ_1 de $J_{\aleph_\Omega}$.

3.3.7. Lemme.- Il existe un ordinal $\bar{\tau}$ et une injection Σ_1 , $\pi : J_{\bar{\tau}} \to J_\tau$, telle que $\pi(J_{\bar{\tau}}) = Z_\Omega$.

Ceci est un lemme classique ; $\pi^{-1} \upharpoonright Z_\Omega$ est l'application qui transitivise Z_Ω.

3.3.8. Lemme.- L'ordinal $\bar{\tau}$ n'est pas un cardinal dans L .

C'est là qu'intervient le fait que l'hypothèse (#) n'est pas vérifiée. Si $\bar{\tau}$ était un cardinal de L , on aurait, en désignant par γ le premier ordinal, tel que $\pi\gamma \neq \gamma$,

$$P(\gamma) \cap L \subseteq J_{\bar{\tau}}$$

et on obtiendrait une mesure finiment additive sur $P(\gamma) \cap L$ en posant

$$\mu(A) = 1 \qquad \text{si } \gamma \in \pi A$$

$$\mu(A) = 0 \qquad \text{sinon.}$$

A partir de μ , il serait en fait possible de définir une autre mesure finiment additive à deux valeurs μ' , se prolongeant en une mesure sur la plus petite σ-algèbre contenant $P(\gamma) \cap L$.

La fin de la preuve utilise les idées clefs de la théorie de Jensen. Puisque $\bar{\tau}$ n'est pas un cardinal dans L , il existe un premier ordinal $\bar{\beta}$ tel qu'une surjection f d'un ordinal $\bar{\sigma} < \bar{\tau}$ sur $\bar{\tau}$ existe dans $J_{\bar{\beta}+1} - J_{\bar{\beta}}$. L'idée de Jensen est de s'intéresser non seulement à ce plus petit $\bar{\beta}$ mais aussi au degré de complication de la fonction rudimentaire qui permet d'obtenir f à partir d'éléments de $J_{\bar{\beta}} \cup \{J_{\bar{\beta}}\}$ mesuré avec l'échelle suivante :

3.3.9. DÉFINITION.- Un sous-ensemble U de $(J_{\bar{\beta}})^k$ est de degré 1 s'il existe une fonction rudimentaire $\mathfrak{F}$ et des éléments $p_1,\ldots,p_s$ de $J_{\bar\beta}$ tels que U soit l'ensemble des $y_1,\ldots,y_k$ tels que l'équation

$$\mathfrak{F}(u\,,\,y_1,\ldots,y_k\,,\,p_1,\ldots,p_s) = \emptyset$$

ait une solution dans $J_{\bar\beta}$.

Un sous-ensemble U de $(J_{\bar\beta})^k$ est de <u>degré</u> $n+1$ s'il existe un sous-ensemble V de $(J_{\bar\beta})^{k+1}$ de degré n tel que U soit la projection de $(J_{\bar\beta})^{k+1} - V$ sur les k premières coordonnées.

On démontre que le graphe de f a un degré fini n . On va indiquer comment se termine la preuve dans le cas où $n = 1$.

3.3.10. <u>Lemme</u>.- <u>Il existe un ordinal</u> $\beta \geq \aleph_\Omega$ <u>tel que</u> π <u>admet un prolongement</u> Σ_1 , $\tilde\pi : J_{\bar\beta} \to J_\beta$.

On suppose maintenant que $f(\zeta) = \xi$ est vrai si et seulement si

$$\mathfrak{F}(u\,,\,\xi\,,\,\zeta\,,\,p_1,\ldots,p_s) = \emptyset \quad \text{a une solution dans } J_{\bar\beta} \;,$$

et on considère le plus petit sous-ensemble Σ_1 de $J_{\bar\beta}$, soit Y_o , tel que

$$\{p_1\} \cup \ldots \cup \{p_s\} \cup \bar\sigma \subseteq Y_o \;.$$

On a $\bar\tau \subseteq Y_o$; en effet, si ξ est élément de $\bar\tau$, $\xi = f(\zeta)$, $\zeta < \bar\sigma$, l'équation (à deux inconnues u , ξ)

$$\mathfrak{F}(u\,,\,\xi\,,\,\zeta\,,\,p_1,\ldots,p_s) = \emptyset$$

a une solution $u_o\,\xi_o$ dans Y_o et on a nécessairement $\xi_o = f(\zeta)$.

On a alors

$$X \subseteq \mathrm{Image}(\pi \restriction \bar\tau) \subseteq \mathrm{Image}(\tilde\pi \restriction Y_o) = Y_1 \;.$$

Or d'après la proposition 3.3.5, Y_1 est inclus dans le plus petit Σ_1 sous-ensemble de J_β , Y , tel que

$$\{\tilde\pi p_1\} \cup \ldots \cup \{\tilde\pi p_s\} \cup \pi(\bar\sigma) \subseteq Y$$

et, d'après 3.3.5, on a $Y \in L$ et $|Y| < \aleph_\Omega$, ce qui termine la preuve.

Le cas où $n \neq 1$ est beaucoup plus délicat : il ne suffit pas que l'application $\tilde\pi$ qui prolonge π soit Σ_1 . Or la proposition 3.3.5 ne s'étend pas à des classes d'applications autres que la classe des injections Σ_1 . La théorie de Jensen, dont la complication technique est telle qu'il est impossible d'en rendre compte ici permet d'une certaine façon de ramener le cas $n > 1$ au cas $n = 1$.

Pour terminer, il faut dire que la preuve de la version la plus générale du lemme de recouvrement nécessite un raisonnement un peu plus élaboré que celui présenté ici : ainsi le lemme 3.3.8 n'est plus vrai si on part de $\aleph_\omega$ au lieu de $\aleph_\Omega$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI - Théorie des Ensembles, Hermann, Paris, 1970.

[2] P. J. COHEN - Set theory and the continuum hypothesis, Benjamin, New York, 1966.

[3] W. B. EASTON - Powers of regular cardinals, Ann. of Math. Logic, 1(1970), 139-178.

[4] K. GÖDEL - The consistency of the continuum hypothesis, Princeton Univ. Press, Princeton, 1940.

[5] F. GALVIN, A. HAJNAL - Inequalities for cardinal powers, Ann. of Math., 101 (1975), 491-498.

[6] S. GRIGORIEFF - Détermination des jeux boréliens et problèmes logiques associés (d'après D. Martin), Sém. Bourbaki, 1975/76, exposé 478, Lecture Notes in Math, Vol. , Springer, 1977.

[7] R. B. JENSEN - The fine structure of the constructible hierarchy, Ann. of Math. Logic, 4(1972), 239-308.

[8] R. B. JENSEN, K. J. DEVLIN - Marginaliato a theorem of Silver, Proc. of the Logic Conference Kiel 1974, Lecture Notes in Math., Vol. 499, Springer, 115-142.

[9] R. B. JENSEN, T. DODD - The core Model, notes manuscrites, 1976.

[10] D. SCOTT - Measurable cardinals and constructible sets, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 9(1961), 521

[11] J. SILVER - On the singular cardinals problem, Proc. of the Intern. Congress of Mathematicians, Vancouver, 1974, 265-268.

[12] R. M. SOLOVAY - A non-constructible Δ^1_3 set of integers, Trans. Amer. Math. Soc., 127(1967), 50-75.