SÉMINAIRE N. BOURBAKI

MICHEL RAYNAUD

Faisceaux amples et très amples

Séminaire N. Bourbaki, 1978, exp. nº 493, p. 46-58

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1976-1977__19__46_0>

FAISCEAUX AMPLES ET TRÈS AMPLES
[d'après T. MATSUSAKA]

par Michel RAYNAUD

1. Enoncé du théorème de Matsusaka

Soient κ un corps algébriquement clos, V une variété algébrique lisse et propre sur κ, L un faisceau inversible sur V. Rappelons que L est très ample sur V, s'il existe une immersion fermée i de V dans un espace projectif $\mathbb{P}$, tel que $L \simeq i^* O_{\mathbb{P}}(1)$, où $O_{\mathbb{P}}(1)$ est le faisceau fondamental sur $\mathbb{P}$. Intrinsèquement, L est très ample s'il possède assez de sections globales pour séparer les points et les points proches de V. On dit que L est ample sur V, s'il existe $m > 0$, tel que $L^{\otimes m}$ soit très ample. Lorsque $\kappa = \mathbf{C}$, les faisceaux amples correspondent aux fibrés en droites positifs de la géométrie kählérienne.

A un faisceau ample L est associé son polynôme de Hilbert

$$P(m) = \chi(V, L^{\otimes m}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i h^i(V, L^{\otimes m}) \qquad (m \in \mathbb{Z})$$

où $h^i(V, L^{\otimes m}) = \dim_\kappa H^i(V, L^{\otimes m})$. Pour $m \gg 0$, $P(m) = h^0(V, L^{\otimes m})$.

Soient $n = \dim V$ et ω le faisceau des formes différentielles de degré n sur V. Dans la notation au moyen des diviseurs, on pose $\omega = O_V(K_V)$, $L = O_V(C)$. D'après le théorème de Riemann-Roch, le polynôme de Hilbert est de la forme

$$(1) \qquad P(m) = (C^n)\frac{m^n}{n!} - (K_V . C^{n-1})\frac{m^{n-1}}{2(n-1)!} + \text{termes de degré} < m-1 .$$

Par exemple, si V est une surface,

$$P(m) = (C^2)\frac{m^2}{2} - (K.C)\frac{m}{2} + \chi(V) .$$

Le coefficient (C^n) est le degré du faisceau ample L.

THÉORÈME 1 (Matsusaka [4] et [5]).- Soit $P : Z \to \mathbb{Z}$ une fonction polynomiale. Il existe un entier k_0 tel que pour toute variété complexe, propre et lisse V, et tout faisceau ample L sur V, de polynôme de Hilbert P, $L^{\otimes k}$ soit très ample sur V pour $k \geq k_0$.

Seuls des cas très particuliers de ce théorème étaient connus auparavant.

Pour les courbes $P(k) = k\deg(L) + 1 - g$ et $L^{\otimes k}$ est très ample dès que $k\deg(L) \geq 2g + 1$. Si V est une variété abélienne, où une surface K3 , $L^{\otimes 3}$ est très ample (Weil [10], Mayer [7], Saint-Donat [9]). Si V est une surface de type général, sans courbes de deuxième espèce, $O_V(5K_V)$ est très ample (Kodaira [2], Bombieri [1]). Enfin, Matsusaka et Mumford ont prouvé le théorème 1, pour les surfaces, en toutes caractéristiques [6].

COROLLAIRE.- Les couples (V,L) formés d'une variété propre et lisse V et d'un faisceau ample L , de polynôme de Hilbert donné P , forment une famille limitée.

En fait ce corollaire est prouvé au cours de la démonstration du th. 1.

Les notes qui suivent sont directement extraites de l'exposé de Lieberman et Mumford donné à Arcata [3].

2. Utilisation du théorème de Kodaira

On n'est pas en mesure de montrer directement que $L^{\otimes k}$ a suffisamment de sections pour $k \geq k_o$, ne dépendant que de P . Aussi, à la place de $L^{\otimes k}$, on étudie $L^{\otimes k} \otimes \omega$. En effet, d'après le vanishing theorem de Kodaira, on a $H^i(L^{\otimes k} \otimes \omega) = 0$ pour $i > 0$ et donc $\chi(V, L^{\otimes k} \otimes \omega) = h^o(V, L^{\otimes k} \otimes \omega)$. Par ailleurs, $H^i(V, L^{\otimes -k})$ et $H^{n-i}(V, L^{\otimes k} \otimes \omega)$ sont en dualité de sorte que l'on obtient :

$$(2) \qquad h^o(V, L^{\otimes k} \otimes \omega) = \chi(V, L^{\otimes k} \otimes \omega) = P'(k) \qquad \text{où } P'(m) = (-1)^n P(-m) .$$

Fixons m_1 , avec $P'(m_1) > 0$, de sorte que $L^{\otimes m_1} \otimes \omega = O_V(D_1)$, $D_1 > 0$.

Fixons $m_o \geq m_1$. On a $L^{\otimes m_o} \otimes \omega = O_V(D)$, avec $D = (m_o - m_1)C + D_1 \simeq m_o C + K$.

Commençons par évaluer $h^o(V, kD)$ en terme de (C^n) et du nombre rationnel t (degré relatif de D par rapport à C) défini par :

$$(*) \qquad t = \frac{(D.C^{n-1})}{(C^n)} = m_o + \frac{(K.C^{n-1})}{(C^n)} .$$

On a :

$$kD = k(m_oC + K) = (k-1)(m_1C + K) + ((m_1 + k(m_o - m_1))C + K) ,$$

d'où, comme $m_1C + K \simeq D_1 > 0$,

$$h^o(V, O_V(kD)) \geq P'(k(m_o - m_1) + m_1) = (C^n)\,\frac{[k(m_o - m_1) + m_1]^n}{n!} + \text{termes degré} < n$$

$$= (kC)^n\,\frac{(m_o - m_1)^n}{n!} \qquad + \text{termes degré} < n$$

$$= \left(\frac{(kC)^n}{n!}\right) [t - \frac{(K.C^{n-1})}{(C^n)} - m_1]^n + \text{termes degré} < n\,.$$

D'après (1), $\frac{(K.C^{n-1})}{(C^n)}$ est déterminé par P . Donc, pour $m_o \gg 0$, t sera assez grand pour que l'on ait $[t - \frac{(K.C^{n-1})}{(C^n)} - m_1]^n \geq \frac{3}{4}\, t^n$. Il existe alors k_o , tel que, pour $k \geq k_o$, on ait :

(3) $$h^o(V, O_V(kD)) \geq \frac{((kC)^n)}{n!}\,\frac{5}{8}\,t^n\,.$$

On applique alors le théorème suivant, dont la démonstration donnée plus loin, représente l'essentiel du travail :

THÉORÈME 2.- Soient donnés un réel $\varepsilon > 0$, des entiers γ , k_o , n et un nombre rationnel t . Alors il existe un entier $k_1 = k_1(\varepsilon, \gamma, k_o, n, t)$ tel que :

Pour tout schéma V propre et normal, de dimension n , défini sur un corps algébriquement clos, tout diviseur ample C sur V et tout cycle D sur V , de codimension 1 , vérifiant la condition

(4) $$h^o(V, O_V(kD)) \geq \frac{(\frac{1}{2} + \varepsilon)}{n!}\, t^n k^n \gamma \quad , \quad \text{pour } k \geq k_o\,,$$

(où l'on a posé $\gamma = (C^n)$ et $t = \frac{(D.C^{n-1})}{(C^n)}$), alors, pour tout $k \geq k_1$, on peut trouver un sous-espace vectoriel Λ de $H^o(V, O_V(kD))$, tel que, si $\varphi_\Lambda : V \to \mathbb{P}(\Lambda)$ est l'application rationnelle associée à Λ et U l'image fermée de φ_Λ dans $\mathbb{P}(\Lambda)$, on ait :

a) $\varphi_\Lambda : V \to U$ est birationnelle.

b) Pour toute sous-variété Σ de V , de codimension 1 , $\dim \varphi_\Lambda(\Sigma) = n - 1$.

c) $\text{degré}(U) \leq \gamma\, k^n t^n$.

3. Les cycles $\Lambda^{[j]}$

Soient V une variété propre et normale, E un cycle effectif sur V , de codimension 1 , et Λ un sous-espace vectoriel de $H^o(V, O_V(E))$. Si B est le fermé des points fixes du système linéaire Λ , on a donc un morphisme

$$\varphi_\Lambda : V - B \to \mathbb{P}(\Lambda) .$$

Matsusaka introduit, dans ce contexte, les cycles $\Lambda^{[j]}$ (j-ème self-intersection de la partie mobile du système linéaire Λ) comme suit :

Soit L un sous-espace linéaire général de $\mathbb{P}(\Lambda)$, de codimension j ; alors $\Lambda^{[j]}$ est le cycle de V , adhérence dans V , de $\varphi_\Lambda^{-1}(L)$. Si $s_1,\ldots,s_j$ sont des éléments généraux de Λ , $\Lambda^{[j]}$ est aussi le cycle, adhérence dans V , du cycle des zéros communs des sections $s_1,\ldots,s_j$ de $O_{V-B}(E)$.

Le cycle $\Lambda^{[j]}$ est défini a équivalence rationnelle près. Lorsque $\Lambda = H^0(V, O_V(E))$, on écrit aussi $E^{[j]}$ pour $\Lambda^{[j]}$. Si $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, on a, à équivalence rationnelle près, $\Lambda_2^{[j]} \simeq \Lambda_1^{[j]} + (\text{cycle} \geq 0)$.

PROPOSITION 1.- Soient V une variété propre, normale, de dimension n , C un diviseur ample, E un cycle de codimension 1 sur V , et soit $i \leq \dim \varphi_{kE}(V)$ pour $k \gg 0$. Alors

$$(5) \qquad (E^{[i]}.C^{n-i}) \leq (C^n)\left(\frac{(C^{n-1}.E)}{(C^n)}\right)^i .$$

Par homogénéité, on peut remplacer C par un multiple et donc supposer C très ample. Soit V' l'intersection dans V de $(n-i)$ sections hyperplanes générales. Remplaçant C par $C.V'$ et E par $E.V'$, on se ramène au cas où $i = n$.

On a $(kE)^{[n]} \geq k^n(E)^{[n]}$, de sorte que l'on peut remplacer E par kE , $k \gg 0$, ce qui nous ramène au cas où φ_E est une application birationnelle entre V et son image W . On a alors $E^{[n]} = \deg W$, d'où :

$$\begin{aligned} h^0(V, O_V(kE)) \geq h^0(W, O_W(k)) &= (\deg W)\frac{k^n}{n!} + o(k^n) \\ &= E^{[n]}.\frac{k^n}{n!} + o(k^n) . \end{aligned}$$

En comparant cette inégalité avec la minoration de $h^0(V, O_V(kE))$, $k \gg 0$, déduite de la proposition suivante, on obtient la proposition 1.

PROPOSITION 2.- Soient V un schéma propre intègre, de dimension n , C un diviseur très ample sur V , M un faisceau cohérent sur V , de rang 1 , sans torsion, tel que $H^0(V,M) \neq 0$. Posons $\gamma = (C^n)$, t = degré de M relatif à C [i.e. si $\bar{V}$ est le normalisé de V , $\bar{C}$ l'image réciproque de C sur V , $\bar{M} \simeq O_{\bar{V}}(\bar{E})$ le le faisceau réflexif sur $\bar{V}$ déduit de l'image réciproque de M , on a

$t = \dfrac{(\bar{C}^{n-1}.\bar{E})}{(\bar{C}^n)}$]. Posons $[t]$ = partie entière de t . Alors, on a :

$$h^o(V,M) \leq \binom{[t]+n}{n}\gamma + \binom{[t]+n-1}{n-1} . \tag{6}$$

Pour $n = 1$, on a évidemment :

$$h^o(V , O_V(E)) \leq \deg(E) + 1 = t\gamma + 1 \leq ([t] + 1)\gamma + 1 .$$

Supposons $n > 1$. Si C est une section hyperplane assez générale, C est encore intègre et $O_C \otimes M$ est un O_C-Module sans torsion de rang 1 , ayant une section non nulle. Des suites exactes :

$$0 \to M(-k-1) \to M(-k) \to M \otimes O_C(-k) \to 0 ,$$

on déduit $h^o(M(-k)) \leq h^o(M(-k-1)) + h^o(M \otimes O_C(-k))$. Mais $h^o(M(-k)) \neq 0$, entraîne que M contient un sous-faisceau isomorphe à $O_V(kC)$, donc que $[t] \geq k$. Par suite

$$h^o(M) \leq \sum_{k=0}^{[t]} h^o(M \otimes O_C(-k)) .$$

D'où par récurrence sur n

$$h^o(M) \leq \sum_{k=0}^{[t]} \binom{[t]-k+n-1}{n-1} + \binom{[t]-k+n-2}{n-2}$$
$$= \binom{[t]+n}{n} + \binom{[t]+n-1}{n-1} .$$

4. Démonstration du théorème 2

1ère étape. Il existe $k_2 = k_2(\varepsilon , \gamma , k_o , t)$ tel que pour $k \geq k_2$, on ait

$$\dim \varphi_{kD}(V) = n .$$

Plus précisément :

Lemme 1.- Soit $\Lambda \subset H^o(V , O_V(kD))$, tel que $\dim \Lambda > \max\limits_{1 \leq i \leq n-1} (i + \gamma t^i k^i)$. Alors $\dim \varphi_\Lambda(V) = n$.

L'existence de k_2 en résulte, compte tenu de (4) .

Rappelons le lemme suivant, conséquence facile de Bertini ([6], th. 3) :

Lemme 2.- Soit M un faisceau ample, de degré d , sur un schéma propre et intègre W , de dimension m . On a :

$$h^o(W,M) \leq d + m .$$

Soit alors W, l'image fermée dans $\mathbb{P}(\Lambda)$, de V par φ_Λ et i sa dimension. Pour établir le lemme 1, il suffit de montrer que l'on a

$$\dim(\Lambda) \leq \gamma t^i k^i + i$$

ce qui, d'après le lemme 2, sera conséquence de $\deg(W) \leq \gamma t^i k^i$. Or on a :

$$\begin{aligned} \deg(W) &\leq (\text{nombre de composantes de } \Lambda^{[i]}) \\ &\leq (C^{n-i}.\Lambda^{[i]}) \leq (C^{n-i}.(kD)^{[i]}) \\ &\leq \gamma t^i k^i \quad (\text{prop. } 1). \end{aligned}$$

Remarque.- Toujours d'après la proposition 1, on a pour $k \geq k_2$:

(7) $$\deg(W) \deg \varphi_\Lambda = \Lambda^{[n]} \leq (kD)^{[n]} \leq \gamma t^n k^n .$$

2ème étape. Il existe $k_3 = k_3(\varepsilon, \gamma, k_o, t)$, tel que pour $k \geq k_3$, φ_{kD} est birationnel.

On va établir l'existence de ℓ_o, tel que $\varphi_{\ell_o k_2 D}$ est birationnelle et on pourra prendre $k_3 = \ell_o k_2 + k_o$.

Soient $k \geq k_2$ et $\ell > 1$. On a un triangle commutatif d'applications rationnelles

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\varphi_{kD}"'] \arrow[dr, "\varphi_{k\ell D}"] & \\ W_k & & W_{k\ell} \arrow[ll, "g_{k,\ell}"] \end{tikzcd}$$

et donc $\deg(\varphi_{kD}) = \deg(\varphi_{k\ell D}) \deg(g_{k,\ell})$.

Lemme 3.- Il existe un entier $\ell = \ell(\varepsilon, n, t)$ tel que si $\deg(\varphi_{kD}) > 1$ et $\deg(g_{k,\ell}) = 1$, on a :

$$\frac{(k\ell D)^{[n]}}{k^n \ell^n} \geq (1+\varepsilon)^{1/n} \frac{(kD)^{[n]}}{k^n} .$$

En fait, on va voir qu'il suffit de prendre ℓ tel que

$$\binom{\ell(1+\varepsilon)^{1/n} + n}{n} + \frac{2}{t^n} \binom{\ell(1+\varepsilon)^{1/n} + n - 1}{n-1} < \frac{1+2\varepsilon}{n!} \ell^n .$$

(Ce choix est possible car, pour $\ell \gg 0$, le premier membre est équivalent à $\ell^n(1+\varepsilon)/n!$.)

Par hypothèse, $g_{k,\ell}$ est birationnelle ; soit U le domaine de définition de $g_{k,\ell}^{-1} = h$ et soit M le faisceau sur W_k , sans torsion, de rang 1 , égal à $h^*(O_{W_{k\ell}}(1))$ sur U , et engendré par

$$h^*\, H^o(V\,,\, O_V(k\ell D)) \subset h^*(H^o(W_{k\ell}\,,\, O_{W_{k\ell}}(1))) \subset H^o(U\,,\, h^*(O_{W_{k\ell}}(1)))\ .$$

On a donc $h^o(W_k\,,M) \geq h^o(V\,,\, O_V(k\ell D))$.

Considérons $\deg(M)$, degré de M relatif à $O_{W_k}(1)$ (cf. prop. 2). On a : $\deg(\varphi_{kD})\ \deg(M) =$ (nombre de points d'intersection, dans le complémentaire des points fixes de (kD) , d'une section de $O_V(k\ell D)$ avec $(n-1)$ sections assez générales de $O_V(kD)$). Par suite :

$$\ell^{n-1}\ \deg(\varphi_{kD})\ \deg(M) \ \leq\ (k\ell D)^{[n]}\ , \tag{8}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{2}+\varepsilon}{n!}\, t^n (k\ell)^n \gamma \ &\leq\ h^o(V\,,\, O_V(k\ell D) & \text{(d'après (4))}\\
&\leq\ h^o(W_k\,,M)\\
&\leq \binom{\left[\frac{\deg M}{\deg W_k}\right] + n}{n} \deg(W_k) + \binom{\left[\frac{\deg M}{\deg W_k}\right] + n-1}{n-1} & \text{(d'après (6))}.
\end{aligned}$$

De plus, d'après (7) et l'hypothèse $\deg \varphi_{kD} \geq 2$, on a :

$$\deg(W_k) = \frac{(kD)^{[n]}}{\deg \varphi_{kD}} \leq \gamma\, \frac{t^n k^n}{2}\ ,$$

et d'après (8) :

$$\left[\frac{\deg(M)}{\deg W_k}\right] \ \leq\ \frac{(k\ell D)^{[n]}}{\ell^{n-1}(kD)^{[n]}} \ =\ \ell R \qquad \text{avec} \qquad R = \frac{(k\ell D)^{[n]}}{\ell^n (kD)^{[n]}}\ .$$

Finalement

$$\frac{\frac{1}{2}+\varepsilon}{n!}\, t^n k^n \ell^n \gamma \ \leq\ \binom{\ell R + n}{n} \frac{t^n k^n \gamma}{2} + \binom{\ell R + n - 1}{n-1}\ ,$$

d'où

$$\frac{1+2\varepsilon}{n!}\, \ell^n \ \leq\ \binom{\ell R + n}{n} + \frac{2}{t^n} \binom{\ell R + n - 1}{n-1}\ .$$

Vu le choix de ℓ , ceci n'est possible que si $R > (1+\varepsilon)^{1/n}$, d'où le lemme.

Notons que d'après (7), on a pour tout entier $f > 0$

$$\frac{(k_2 \ell^f D)^{[n]}}{\ell^n (k_2 \ell^{f-1} D)^{[n]}} \ \leq\ \gamma\, \frac{k_2^n t^n \ell^{fn}}{\ell^{fn}(k_2 D)^{[n]}} \ \leq\ \gamma k_2^n t^n\ .$$

Il en résulte que, pour tout entier $f > 0$, si $\deg \varphi_{k_2(\ell^f)D} > 1$, on a

$\deg \varphi_{k_2 \ell}(f+e)_D < \deg \varphi_{k_2 \ell} f_D$, dès que $e \geq n \dfrac{\log(\gamma t^n k_2^n)}{\log(1+\varepsilon)}$. Comme $\deg \varphi_{k_2 D} \leq \gamma t^n k_2^n$, toujours d'après (7), on voit que $\varphi_{k_2 \ell} f_D$ est birationnelle, dès que $f \geq n\, \gamma\, t^n k_2^n \; \dfrac{\log(\gamma t^n k_2^n)}{\log(1+\varepsilon)}$.

3ème étape. Montrons qu'il existe $k_4 = k_4(\varepsilon, \gamma, n, t)$ tel que pour $k \geq k_4$, on peut trouver $\Lambda \subset H^0(V, kD)$ tel que φ_Λ vérifie la condition b) du théorème 2.

Si alors on prend $k \geq k_3 + k_4 = k_1$ et pour $\Lambda \subset H^0(V, O_V(kD))$, le plus petit sous-espace engendré par les produits des éléments de $H^0(V, O_V(k_3 D))$ et des éléments de $\Lambda' \subset H^0(V, O_V(k-k_4)D)$, tel que $\varphi_{\Lambda'}$ vérifie b), alors φ_Λ vérifie a) et b) ; d'autre part, c) résulte de (7), d'où le théorème 2.

Lemme 4.- Soit $k \geq k_0$ avec

$$tk \geq 2n.n!(1+\frac{1}{\gamma}) \quad .$$

Alors, il existe $\Lambda \subset H^0(V, O_V(kD))$ tel que $\dim \varphi_\Lambda(V) = n$ et tel que φ_Λ vérifie la condition b) du théorème 2.

De l'hypothèse sur k et de (4), résulte :

$$n\gamma(tk)^{n-1} + n \leq \gamma(tk)^{n-1}(n+\frac{n}{\gamma}) \leq \gamma \frac{(tk)^n}{2n!} \leq h^0(V, O_V(kD)) \; .$$

On a aussi $tk \geq 1$, de sorte que pour $\dim(\Lambda) > n + \gamma(tk)^{n-1}$, on a $\dim \varphi_\Lambda(V) = n$ (lemme 1). On voit que cette condition est réalisée pour tout sous-espace Λ de $H^0(V, O_V(kD))$ de codimension $< (n-1)\gamma(tk)^{n-1}$.

Partant de $\Lambda_0 \subset H^0(V, O_V(kD))$, on va construire une suite décroissante de sous-espaces

$$\Lambda_0 \supset \Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \dots$$

avec $\dim \Lambda_i / \Lambda_{i+1} = 1$, jusqu'à satisfaire la condition b).

Supposons avoir construit Λ_r et qu'il existe encore E sous-schéma fermé intègre de V , de codimension 1 , tel que

$$\dim \varphi_{\Lambda_r}(E) = i-1 \qquad \text{avec } n-1 \geq i \geq 1 \; .$$

Soit $M \subset O_V(kD)$, le plus petit sous-faisceau réflexif, tel que $\Lambda_r \subset H^0(V,M)$. Alors, sur le domaine de définition de l'application rationnelle φ_{Λ_r} , donc en particulier au point générique de E , M est un faisceau inversible, engendré par Λ_r .

Soit Λ_{r+1} l'hyperplan de Λ_r formé des sections de M qui s'annulent sur

E et soit Z une fibre générale de la restriction à E de φ_{Λ_r}. On a donc $\dim(Z) = n-i$.

Alors Z est dans les points fixes de Λ_{r+1}, alors qu'il n'est pas dans les points fixes de Λ_r. Il en résulte que, pour l'équivalence rationnelle, on a

$$(\Lambda_r)^{[i]} \simeq (\Lambda_{r+1})^{[i]} + Z + (\text{cycle effectif}) .$$

Donc $$(\Lambda_r^{[i]} \,.\, C^{n-i}) > (\Lambda_{r+1}^{[i]} \,.\, C^{n-i}) .$$

Par ailleurs, pour tout j,

$$(\Lambda_r^{[j]} \,.\, C^{n-j}) \geq (\Lambda_{r+1}^{[j]} \,.\, C^{n-j}) .$$

On voit que si l'on pose

$$\delta(\Lambda) = \sum_{j=1}^{n-1} (\Lambda^{[j]} \,.\, C^{n-j}) .$$

On a $\delta(\Lambda_{r+1}) < \delta(\Lambda_r)$. Mais, de par la prop. 1, on a

$$\delta(\Lambda) \leq \delta(kD) \leq \sum_{j=1}^{n-1} \gamma(kt)^j \leq (n-1)\gamma(kt)^{n-1} .$$

Vu les remarques suivant l'énoncé du lemme 4, on peut donc construire une chaîne de Λ_i, assez longue, jusqu'à satisfaire la condition b).

<u>Remarque</u>.- Cette jolie démonstration est inspirée de la méthode d'Albanese pour construire, partant d'une variété projective X de dimension n, un sous-espace Λ de $H^o(\mathcal{O}_X(k))$, tel que φ_Λ soit birationnelle et $\varphi_\Lambda(X)$ n'ait pas de points de multiplicité $> n!$.

5. Fin de la démonstration du théorème 1

Soient donc V, $L = \mathcal{O}_V(C)$ et $P(k)$ comme dans le n° 1 et soit k_o tel que si $D = k_o C + K$, on ait (3) pour $k \geq k_o$. D'après le théorème 2, il existe k_1, fonction du polynôme P, et pour $k \geq k_1$ un sous-espace $P(\Lambda)$ de $H^o(V, kD)$, tel que φ_Λ satisfait aux conditions a), b), c). Donc si U est l'image fermée de V, on a $\dim U = n$ et $\deg(U) \leq \gamma t^n k^n$. Posons $\deg(U) + n - 1 = N$, de sorte que $N \leq \gamma t^n k^n + n - 1$. D'après le lemme 2, on a $\dim \mathbb{P}(\Lambda) \leq N$. Alors, les variétés intègres U se plongent dans un espace projectif de dimension bornée, avec un degré borné, donc forment une famille limitée (cf. coordonnées de Chow). La famille des normalisées $\bar{U}$ est, elle aussi, limitée et il existe k_2, tel que l'image réciproque de $\mathcal{O}_U(k_2)$ sur $\bar{U}$ soit très ample sur $\bar{U}$. Remplaçant k_1 par $k_1 k_2$ et Λ par $H^o(\bar{U}, \mathcal{O}_{\bar{U}}(k_2)) \subset H^o(V, \mathcal{O}_V(k_1 k_2 D))$, on peut supposer U normal.

En passant par le graphe de φ_Λ, on définit un morphisme (noté encore φ_Λ), du groupe $\mathrm{Div}(V)$ des diviseurs (de Cartier) sur V, dans le groupe $Z^1(U)$ des cycles de codimension 1 sur U. L'application φ_Λ est injective, compte tenu de la condition b) du théorème 2. De plus, $\varphi_\Lambda((f)_V) = (f)_U$ et pour tout $E \in \mathrm{Div}(V)$, on a :

(i) $\varphi_\Lambda(E) > 0 \Leftrightarrow E > 0$.

(ii) $H^0(V, \mathcal{O}_V(E)) \xrightarrow{\sim} H^0(U, \mathcal{O}_U(\varphi_\Lambda(E)))$.

(iii) Concernant les diviseurs canoniques, $\varphi_\Lambda(K_V) \leq K_U$.

Si, alors, $E \in |\ell C + K_V|$, on trouve :

$$\begin{aligned} \deg \varphi_\Lambda(E) &= \ell \deg \varphi_\Lambda(C) + \deg \varphi_\Lambda(K_V) \\ &\leq \ell(C \cdot \Lambda^{[n-1]}) + \deg(K_U) \\ &\leq \ell\gamma\, t^{n-1} k_1^{n-1} + \deg(K_U) \qquad \text{d'après la prop. 1.} \end{aligned}$$

Par ailleurs, la famille des U étant limitée, $\deg(K_U)$ reste borné ; soit b un majorant.

Considérons les ensembles A, B, C et les flèches

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ A & & C \end{tikzcd}$$

définis comme suit :

. A est l'ensemble des classes de couples (V,L), V lisse, L ample sur V, de polynôme de Hilbert P ;

. B est l'ensemble des $(V, L, s_0, \ldots, s_N, E_0, E_1)$ avec (V,L) comme dans A, $E_0 \in |m_1 C + K_V|$, $E_1 \in |(m_1 + 1)C + K_V|$, $s_0, \ldots, s_N \in H^0(V, \mathcal{O}_V(k_1 D))$ (où $D = k_0 C + K_V$) engendrent un sous-espace Λ, tel que φ_Λ vérifie les conditions a), b), c) du théorème 2 avec $\varphi_\Lambda(V)$ normal.

La flèche α consiste à oublier les s_j et les E_i. On a vu qu'il est possible de choisir les constantes k_0, k_1, m_1 et des valeurs bornées de N, telles que α soit surjectif.

. C est l'ensemble des (U, F_0, F_1) avec $U \subset \mathbb{P}^N$, U normal de dimension n, F_i, $(i = 1,2)$, $\in Z^1(U)$; ces données étant soumises aux conditions suivantes :

$$\deg(U) \leq \gamma\, k_1^n\, t^n, \quad \deg(F_i) \leq \gamma\, k_1^{n-1} t^n (m_1 + i) + b \ \text{ pour } i = 0, 1,$$

$$h^0(F_0 + \ell(F_1 - F_0)) \geq P'(\ell + m_1), \quad \forall\, \ell \geq 0.$$

Enfin, l'application β est définie par $U = \varphi_\Lambda(V)$, $F_i = \varphi_\Lambda(E_i)$. Notons que la dernière condition numérique, imposée dans la définition de C , provient du fait que

$$H^o(U\,,\,O_U(F_o+\ell(F_1-F_o))) = H^o(V\,,\,O_V(E_o+\ell(E_1-E_o))) = H^o(V\,,\,O_V(m_1+\ell)D) =$$
$$= P'(m_1+\ell)\ .$$

Notons que C est une famille limitée, paramétrée par un sous-schéma réduit S , d'un produit de trois variétés de Chow : c'est clair pour les triplets $(U\,,F_1\,,F_o)$ vérifiant les conditions de degré ci-dessus ; de plus chacune des conditions $h^o(F_o+\ell(F_1-F_o)) \geq P'(m_1+\ell)$ est fermée.

Le lemme suivant entraîne que B , (donc A) est une famille limitée, d'où le théorème 1.

Lemme 5.- " β est représentable par un morphisme de type fini ".

Soit donc $(\mathcal{U},\,\mathcal{F}_o\,,\,\mathcal{F}_1)$ une famille relative plate sur S qui paramètre (C) et soit $s \in S$, tel que la fibre au-dessus de s : $(U\,,F_1\,,F_o)$ soit de la forme $\beta(V\,,L\,,\ldots\,\bar{s}_i\,\ldots,E_i)$. Notons R l'anneau local de S en s et $\mathcal{W}$ l'ouvert de $\mathcal{U}$ formé des points lisses sur S .

Soit $\ell \gg 0$, tel que $N = L^{\otimes(\ell+m_1)} \otimes \omega_V$ soit très ample sur V et que, pour $m > 0$, $H^o(V\,,N^{\otimes m})$ soit engendré par $H^o(V,N)$.

Sur $\mathcal{W}$, on a le faisceau inversible $O_{\mathcal{W}}(\mathcal{F}_o+\ell(\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_o)) = \mathcal{M}$; soit M sa restriction à $W = \mathcal{W}\otimes_S k(s)$. Pour tout $m \geq 0$, $H^o(V,N^{\otimes m}) \simeq H^o(W,M^{\otimes m})$. Lorsque $m = 1$, $h^o(V,N) = P'(\ell + m_1)$. Il résulte alors de la dernière condition imposée dans la définition de (C) et des propriétés de semi-continuité de h^o , ([8], chap. II), que $H^o(\mathcal{W}\otimes_S R\,,\mathcal{M})$ est un R-module libre, dont la formation commute au passage aux fibres. Pour $m > 0$, $H^o(V,N^{\otimes m})$ est engendré par $H^o(V,N)$; donc l'application canonique $H^o(\mathcal{W}\otimes_S R\,,\,\mathcal{M}^{\otimes m}) \to H^o(W,M^{\otimes m})$ est surjective. Il en résulte encore que $H^o(\mathcal{W}\otimes_S R\,,\mathcal{M}^{\otimes m})$ est un R-module libre dont la formation commute au passage aux fibres. Finalement, $\bigoplus_{m\geq 0} H^o(\mathcal{W}\otimes_S R\,,\,\mathcal{M}^{\otimes m})$ est une R-algèbre graduée, plate, engendrée par ses éléments de degré 1 , donc de type fini. Son spectre homogène $\mathcal{V}$ est alors un R-schéma projectif et plat, muni d'un faisceau très ample $O_{\mathcal{V}}(1)$; $\mathcal{V}$ relève V , donc est lisse sur R , et $O_{\mathcal{V}}(1)$ relève $N = L^{\otimes(\ell+m_1)} \otimes \omega_V$. De plus, on a une application rationnelle relative

$\Psi : \mathcal{U} \otimes_S R \to \mathcal{V}$ qui relève φ_Λ^{-1}. Par construction Ψ a une factorisation de Stein triviale et par suite Ψ est birationnelle ; soit Φ l'application rationnelle inverse de Ψ ; donc Φ relève φ.

Il existe un unique faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{V}$, qui relève L et tel que $O_{\mathcal{V}}(1) = \mathcal{L}^{\otimes(\ell + m_1)} \otimes \omega_{\mathcal{V}/R}$ (l'obstruction à relever infinitésimalement L est annulée par $\ell + m_1$, donc est nulle). Le graphe de l'application rationnelle Ψ permet alors de définir des homomorphismes

$$\Psi : \mathrm{Pic}(\mathcal{W} \times_S R) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{V})$$

$$\Phi : \mathrm{Pic}(\mathcal{V}) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{W} \times_S R)$$

qui relèvent les applications analogues déduites de φ^{-1} et φ (bien que la formation du graphe ne commute pas nécessairement au passage aux fibres). De plus, Ψ et Φ induisent des bijections réciproques sur les classes de faisceaux inversibles algébriquement équivalent à zéro, et Φ est injectif puisqu'il en est ainsi de φ. On en déduit qu'il existe des faisceaux $\mathcal{R}_i$ sur $\mathcal{V}$ $(i = 0,1)$, algébriquement équivalent à zéro, tels que :

$$\Phi(\mathcal{L}^{\otimes m_1} \otimes \omega_{\mathcal{V}/S} \otimes \mathcal{R}_0) = O_{\mathcal{W}}(\mathcal{F}_0) \otimes_S R$$

$$\Phi(\mathcal{L}^{\otimes(m_1 + 1)} \otimes \omega_{\mathcal{V}/S} \otimes \mathcal{R}_1) = O_{\mathcal{W}}(\mathcal{F}_1) \otimes_S R .$$

Etendant $\mathcal{V}$, Ψ, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}_i$ au-dessus d'un voisinage de s, on en déduit d'abord que, quitte à restreindre $S = \mathrm{Spec}(A)$, on peut supposer que la A-algèbre $\bigoplus_{m \geq 0} H^0(\mathcal{W}, \mathcal{M}^{\otimes m})$ est plate sur A, de type fini, a une formation qui commute aux changements de base et un spectre homogène lisse sur A, noté encore $\mathcal{V}$. De plus, sachant que pour $\ell' \geq \ell$, $\mathcal{L}^{\otimes(m_1 + \ell')} \otimes \omega_{\mathcal{V}/S} \otimes \mathcal{R}_0^{\otimes(1 - \ell')} \otimes \mathcal{R}_1^{\otimes \ell'}$ est S-ample sur $\mathcal{V}$, on voit que si on remplace ℓ par $\ell' \geq \ell$ dans la construction précédente, on obtient le même couple $(\mathcal{V}, \Psi)$.

Finalement, pour représenter β, il suffit de rendre $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$ triviaux ce qui définit un sous-schéma fermé de S, puis d'identifier $(s_0, \ldots, s_N)$ à des sections de $O_{\mathcal{V}}(k_1 D) = \mathcal{L}^{\otimes k_1 m_0} \otimes \omega_{\mathcal{V}/S}^{k_1}$, via Φ, ce qui revient à paramétrer les sections de $O_{\mathcal{V}}(k_1 D) \otimes \Phi^*(O_{\mathcal{W}}(-1))$ et conduit à un fibré projectif, d'où le lemme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BOMBIERI - Canonical models of surface of general type, Publ. I.H.E.S., 42(1973), p. 171-220.

[2] K. KODAIRA - Pluricanonical systems on algebraic surfaces of general type, J. Math. Soc. Japan, 20(1968), p. 170-192.

[3] D. LIEBERMAN and D. MUMFORD - Matsusaka's big theorem, Proc. of the AMS Summer Institute 1974, Arcata,

[4] T. MATSUSAKA - On canonically polarized varieties II, Amer. Journ. Math., 92(1970), p. 283-292.

[5] T. MATSUSAKA - Polarized varieties with a given Hilbert polynomial, Amer. Journn. Math., 94(1972), p. 1027-1077.

[6] T. MATSUSAKA and D. MUMFORD - Two fundamental theorems on deformations of polarized varieties, Amer. Journ. Math., 86(1964), p. 668-683.

[7] A. MAYER - Families of K3 surfaces, Nagoya Math. Journ., 48(1972), p. 1-17

[8] M. RAYNAUD - Faisceaux amples sur les schémas en groupes, Lecture Notes in Math., n° 119, Springer, 1970.

[9] B. SAINT-DONAT - Projective models of K-3 surfaces, Thèse

[10] A. WEIL - Variétés kählériennes, Paris, Hermann, 1958.