PAUL MALLIAVIN

Travaux de H. Skoda sur la classe de Nevanlinna

Séminaire N. Bourbaki, 1978, exp. n° 504, p. 201-217

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1976-1977__19__201_0>

TRAVAUX DE H. SKODA SUR LA CLASSE DE NEVANLINNA

par Paul MALLIAVIN

Il y a une cinquantaine d'années, R. Nevanlinna [15] étudiait la classe $\mathcal{N}$ des fonctions $f(z)$ holomorphes dans le disque unité vérifiant

0.1 $$\limsup_{r \to 1} \int \log^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta < +\infty \quad .$$

Cette classe $\mathcal{N}$ coïncide avec celle des fonctions holomorphes qui peuvent s'écrire comme le quotient de deux fonctions holomorphes bornées : $f = \frac{u}{v}$ avec $u , v \in H^\infty$. Par suite caractériser l'ensemble des zéros d'une fonction de $\mathcal{N}$ est équivalent à caractériser celui d'une fonction de H^∞ ; ceci est obtenu par la condition de Blaschke : un ensemble S contenu dans le disque ouvert est un ensemble de zéros si et seulement si la famille

0.2 $$(1 - |s|) \ , \qquad s \in S \ ,$$ est sommable.

La construction d'une fonction nulle sur S s'effectue par un produit de Blaschke. Pour l'étude de l'espace de Hilbert H^2 , A. BEURLING a introduit [1] les fonctions intérieures qui sont l'analogue continu des produits de Blaschke.

En plusieurs variables complexes, W. RUDIN [18] a démontré que la caractérisation de l'ensemble des zéros d'une classe H^p du bidisque (c'est-à-dire de la puissance p-ième intégrable sur $|z_1| = |z_2| = 1$) doit nécessairement dépendre de p , comme la classe de Nevanlinna contient H^1 , il en résulte que l'ensemble des zéros d'une fonction de la classe $\mathcal{N}$ ne peut pas être caractérisé à partir des fonctions de H^∞ . Rudin a ensuite [19] étendu ces exemples à la boule de $\mathbf{C}^2$; ceci montre qu'il est peu vraisemblable d'obtenir une caractérisation explicite des zéros d'une fonction de la classe H^p .

Toutefois une caractérisation explicite pour la classe de Nevanlinna de tout ouvert strictement pseudo-convexe de $\mathbf{C}^n$ $(n > 1)$ vient d'être obtenu par H. SKODA et G. M. HENKIN dans deux travaux indépendants.

1. Enoncé du théorème principal

On note

$$\Omega = \{z \in \mathbf{C}^n \ ; \rho(z) < 0\}$$

où $\rho(z)$ est une fonction à valeur réelle, de classe C , strictement plurisousharmonique au voisinage de $\rho^{-1}(0)$, c'est-à-dire dont le Hessien de ρ soit défini positif. On suppose de plus que sur $\rho^{-1}(0)$ le gradient de ρ est différent de zéro.

On note $\Omega_\varepsilon = \{z \ ; \ \rho(z) < -\varepsilon\}$ et par $\partial\Omega_\varepsilon$ l'hypersurface $\rho^{-1}(-\varepsilon)$ (ε assez petit) ; on équipe $\partial\Omega_\varepsilon$ de la mesure $(2n-1)$ dimensionnelle induite par la métrique euclidienne de $\mathbb{C}^n \sim \mathbb{R}^{2n}$. La classe $\mathcal{N}(\Omega)$ est alors définie par

1.1. $\mathcal{N}(\Omega) = \{f \ ; \ f$ holomorphe dans Ω , $\limsup\limits_{\substack{\varepsilon>0 \\ \varepsilon\to 0}} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \log^+|f(\sigma)|\,d\sigma^{2n-1} < +\infty\}$.

On note par $Z(\Omega)$ la famille des sous-ensembles analytiques V de Ω , de codimension 1 , vérifiant la condition de Blaschke

1.2. $$\int_V |\rho(z)|\, d\sigma^{2n-2}(z) < +\infty$$

σ^{2n-2} étant l'aire $2n-2$ dimensionnelle sur les points réguliers de V . On note par $c[V]$ la classe de cohomologie définie par V dans $H^2(D, \mathbb{R})$ et on suppose

1.3. $$c[V] = 0 .$$

1.4. THÉORÈME PRINCIPAL.- Soit $f \in \mathcal{N}(\Omega)$; posons $V_1 = f^{-1}(0)$, alors V_1 satisfait 1.2 et 1.3.

Réciproquement, soit $V \in Z(\Omega)$ et satisfaisant 1.3, alors il existe $h \in \mathcal{N}(\Omega)$, tel que
$$h^{-1}(0) = V .$$

Ce résultat a été annoncé par H. SKODA dans [20], [21] et la démonstration complète a paru dans [22].

G. M. HENKIN a obtenu indépendamment ce même résultat qu'il a annoncé dans [6], la démonstration complète a paru dans [7].

Des résultats partiels avaient été obtenus auparavant dans [9], [4], [10].

La partie directe du théorème se démontre par la démonstration classique pour une variable complexe qui s'étend mot pour mot. Le problème difficile est de construire la fonction h de la réciproque.

Pour faciliter l'exposé et éviter des difficultés techniques nous effectuerons certains points de la démonstration dans le cas où D est un ouvert strictement convexe. Il existe alors une quasi-norme p ,

$$1.5. \quad \begin{aligned} & p(z+z') \leq p(z) + p(z') \\ & p(\alpha z) = \alpha p(z) \qquad \text{avec } \alpha > 0 \end{aligned}$$

telle que $\rho(z) = p(z) - 1$.

2. Un problème de Poincaré-Lelong à croissance

2.1. Les formes différentielles extérieures de degré total p s'écrivent suivant la décomposition de Hodge comme somme de formes différentielles de bidegré (q,r) : $\Lambda^p(D) = \bigoplus_{q+r=p} \Lambda^{q,r}(D)$ avec $\Lambda^{q,r}(D) = \{\pi \in \Lambda^p(D) \; ; \; \pi = \Sigma\, a_{I,J}\, dz^I \wedge d\bar{z}^J\}$ où I varie dans les parties à q éléments de $[1,n]$, J dans des parties à r éléments de $[1,n]$.

Le cobord d se décompose alors : $d = d' + d''$ avec

$$d'\pi = \Sigma \frac{\partial}{\partial z^k} a_{I,\bar{J}}\, dz^k \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J \quad , \qquad d''\pi = \Sigma \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} a_{I,\bar{J}}\, d\bar{z}^k \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J \; .$$

Si φ est de classe C^2 alors

$$d'd''\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^k \partial \bar{z}^\ell}\, dz^k \wedge d\bar{z}^\ell \; .$$

Si $\varphi = \log|f|$, avec f une fonction holomorphe, on a

$$d'd''\varphi = \sum_{k,\ell} \theta_{k,\bar{\ell}}\, dz^k \wedge d\bar{z}^\ell \qquad \text{au sens des distributions}$$

où les $\theta_{k,\ell}$ sont des mesures de Radon, portées par le support de $V_1 = f^{-1}(0)$.

On définit une forme linéaire sur les $(n-1\,,\,n-1)$ formes différentielles ω à coefficients C^∞ à support compact dans D en posant

$$\langle \omega \,,\, d'd''\varphi \rangle = \int \omega \wedge d'd''\varphi \; .$$

Cette forme linéaire est un courant de type $(1,1)$, il s'écrit ([12]) également

$$2.1.0. \qquad i\langle \omega \,,\, d'd''\varphi \rangle = \int_{V_1} \omega$$

où l'intégration est prise sur les points réguliers de V_1 muni de son orientation canonique. Le courant d'intégration sur V_1 détermine ainsi les $\theta_{i,\bar{k}}$. On appelle équation de Poincaré-Lelong l'équation

$$2.1.1. \qquad d'd''\psi = \sum_{k,\bar{\ell}} \theta_{k,\bar{\ell}}\, dz^k \wedge d\bar{z}^\ell$$

où ψ est une fonction réelle. Lorsque l'on a une solution de l'équation de Poincaré-Lelong, on sait [11] que l'on peut construire une fonction holomorphe f

2.1.2. $$f^{-1}(0) = V_1 \ , \qquad |f(z)| = e^{\psi(z)} \ .$$

2.1.3. La construction de la fonction h du théorème 1.4 est équivalente à la construction d'une solution de 2.1.1 vérifiant $\psi \in L^1(\partial\Omega)$.

2.2. Croissance du courant d'intégration

On va transférer la condition de Blaschke 1.2 sur les coefficients $\theta_{k,\bar{\ell}}$ du courant d'intégration.

A deux champs de vecteurs continus λ , μ on associe la mesure de Radon

$$\theta(\lambda\,,\mu) = \Sigma\, \lambda^k\, \bar{\mu}^{\ell}\, \theta_{k,\bar{\ell}} \ .$$

Une propriété importante du courant d'intégration est qu'il est positif [12] c'est-à-dire

2.2.1. $\theta(\lambda\,,\lambda)$ est une mesure de Radon positive.

On choisit localement un champ de repères orthonormés $e_1,\dots,e_n$ adapté à Ω_ε c'est-à-dire vérifiant

$$\langle e_k\,, d'\rho\rangle = 0 \qquad\qquad k \geq 2 \ .$$

Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par $e_2,\dots,e_n$ est l'espace tangent complexe à Ω_ε soit $T^{\mathbb{C}}(\Omega_\varepsilon)$. On peut aussi le définir par

2.2.2. $$T^{\mathbb{C}}(\Omega_\varepsilon) = T(\Omega_\varepsilon) \cap iT(\Omega_\varepsilon) \ .$$

Soit m_b , m les mesures de Radon positives définies par

2.2.3. $$m_b = \sum_{k=2}^{n} \theta(e_k\,, e_k)$$
$$m = \theta(e_1\,, e_1) + m_b \ .$$

On appelle m la masse totale du courant θ , m_b la masse tangentielle.

On peut lire m comme la trace de la matrice hermitienne associée à la forme hermitienne $\theta(\lambda\,,\lambda)$. Cette trace est indépendante du champ de repère orthonormé. De plus la positivité de θ entraîne

$$|\theta(e_k\,, e_\ell)| \leq \theta(e_k\,, e_k) + \theta(e_\ell\,, e_\ell) \leq m \ .$$

Enfin en choisissant un champ de repères orthonormés $\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_n$ tels que $\tilde{e}_1$ et $i\tilde{e}_1$ engendrent le plan réel normal à V , on obtient alors 2.1.0 ou encore :

2.2.4. m est la mesure de Radon définie par l'intégration V de la mesure $2n-2$ superficielle.

Ainsi on a d'après 1.2

2.2.5. $$\int |\rho| dm = \int_V |\rho| d\sigma^{2n-2} = I < +\infty \ .$$

De même, m_b apparaissant comme la trace de la forme quadratique $\theta(.\ .)$ restreinte à $T^{\mathbb{C}}(\partial\Omega)$, est indépendante du choix du champ de repères adaptés.

PROPOSITION.- Il existe une constante $C = C(\Omega, \rho)$ telle que

2.2.6. $$\int dm_b \leq C I \ .$$

Preuve. Etant donnée une forme différentielle de classe C^0 et de bidegré (1,1),

$$\tilde{\theta} = \Sigma \tilde{\theta}_{k,\bar{\ell}} dz^k \wedge d\bar{z}^{\ell} \quad ;$$

on définit de même la notion de positivité comme la positivité de la fonction $\tilde{\theta}_{k,\bar{\ell}} \lambda^k \bar{\lambda}^{\ell}$. En régularisant par convolution avec des fonctions C^∞ à support compact, on obtient :

2.2.7. On peut approcher le courant θ d'intégration sur V par une suite de formes différentielles $\tilde{\theta}^n$, de classe C^∞ , de type (1,1) , positives et fermées, de telle sorte que $\tilde{\theta}^n_{k,\bar{\ell}}$ converge vaguement vers $\theta_{k,\ell}$.

Par passage à la limite, il suffit de démontrer 2.2.7 pour les formes $\tilde{\theta}$ de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$. La formule de Stockes donne l'identité

$$\int_\Omega d[\rho d''\rho \wedge (d'd''\rho)^{n-2} \wedge \theta] = 0$$

ou encore

2.2.8. $$\int_\Omega (d'\rho \wedge d''\rho \wedge \theta) \wedge (d'd''\rho)^{n-2} = -\int_\Omega \rho(\theta \wedge (d'd''\rho)^{n-1}) \ .$$

Comme ρ est strictement plurishousharmonique, λ notant l'élément de volume sur $\mathbb{C}^n$, on a

$$C_1(\text{Trace } \theta) d\lambda < \theta \wedge (d'd''\rho)^{n-1} < C_2(\text{Trace } \theta) d\lambda \ .$$

Le premier membre de 2.2.8 majore à un facteur constant près le premier membre de 2.2.6 ; en effet, le produit extérieur par $d'\rho \wedge d''\rho$ est équivalent à prendre la composante tangentielle m_b . On considère l'énoncé suivant :

2.3. THÉORÈME.- Il existe une constante $C = C(\Omega, \rho)$ telle que pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ et pour toute forme différentielle $\theta \in \Lambda^{1,1}(\Omega_\varepsilon)$, de classe C^1 sur $\bar{\Omega}_\varepsilon$, fermée et positive, il existe une fonction réelle ψ de classe C^2 sur $\bar{\Omega}$, vérifiant

2.3.1. $$d'd''\psi = \theta$$

2.3.2. $$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} |\psi| d\sigma^{2n-1} \leq C \int_{\Omega_\varepsilon} \mathrm{Trace}(\theta)\, d\lambda .$$

On a alors :

2.4. PROPOSITION DE RÉGULARISATION.- Le théorème 2.3 entraîne le théorème 1.2.

Preuve. Etant donné un ensemble analytique V, satisfaisant la condition de Baschke, on note $V_\varepsilon = V \cap \Omega_\varepsilon$. On régularise le courant d'intégration θ_ε sur V_ε et on obtient $\theta_\varepsilon^n \in \Lambda^{1,1}(\Omega_{2\varepsilon})$, de classe C^1 sur $\Omega_{2\varepsilon}$ et θ_ε^n positif sur $\Omega_{2\varepsilon}$ pour n assez grand. Appliquons 2.3, on obtient ψ_ε^n vérifiant

$$d'd''\psi_\varepsilon^n = \theta_\varepsilon^n \quad , \qquad \int_{\partial\Omega_{2\varepsilon}} |\psi_\varepsilon^n| d\sigma < C_1 \quad ,$$

ψ_ε^n converge dans $L^1_{loc}(\Omega_{2\varepsilon})$ vers une fonction plurisousharmonique ψ_ε vérifiant

$$d'd''\psi_\varepsilon = \theta_\varepsilon .$$

Par les inégalités de convexité pour une fonction sousharmonique

2.4.1. $$\sup_{\varepsilon_o > \varepsilon' > 2\varepsilon} \int_{\partial\Omega_{\varepsilon'}} |\psi_\varepsilon| d\sigma^{2n-1} < C_2 .$$

D'après 2.1.2, il existe une fonction f_ε holomorphe dans $\Omega_{2\varepsilon}$, telle que $f_\varepsilon^{-1}(0) = V_{2\varepsilon}$ et vérifiant

$$\log|f_\varepsilon(z)| = \psi_\varepsilon(z) .$$

Utilisons la décomposition de Riesz pour la fonction sousharmonique $\psi_\varepsilon(z)$:

$$\psi_\varepsilon(z) = G_\varepsilon(z) + P_\varepsilon(z) \quad ,$$

où G_ε est le potentiel de Green :

$$G_\varepsilon(z) = \int_{V_\varepsilon} g_{\Omega_{2\varepsilon}}(z, \zeta) d\sigma^{2n-2}$$

et P_ε l'intégrale de Poisson

$$P_\varepsilon(z) = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} K_{\Omega_{2\varepsilon}}(z,u)\psi_\varepsilon(u) d\sigma^{2n-1}(u) .$$

En vertu de 2.4.1, les $P_\varepsilon(z)$ forment une famille précompacte pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de Ω. D'autre part, d'après 1.2, G_ε converge vers G_o. Ainsi la famille $f_\varepsilon(z)$ est localement uniformément bornée.

On peut extraire d'après le théorème de Montel une sous-suite convergente vers une fonction h . Si $z_0 \notin V$, on a

$$\liminf |f_\varepsilon(z_0)| > 0$$

d'où $h(z_0) \neq 0$. D'autre part les inégalités de convexité montrent comme en 2.4.1 que $h \in \mathcal{N}$.

3. Opérateur d'homotopie

On va chercher un inverse à l'opérateur $d'd''$ en inversant d'abord d' puis d'' . La première étape de cette résolution sera obtenue par un opérateur conique de POINCARÉ. L'opérateur conique, sur un ouvert Ω convexe, s'écrit

3.0.
$$(\mathcal{C} g)(z) = \int_0^1 g(tz)dt \ .$$

On construit $v \in \Lambda^{1,0}(\Omega)$, $w \in \Lambda^{0,1}(\Omega)$ par

3.1.
$$v = \sum_{k,\ell} \{(\mathcal{C}\theta_{k,\ell})(z)\}\bar{z}_1 dz^k \ , \qquad w = \sum_{k,\ell} \{(\mathcal{C}\theta_{k,\ell})(z)\} z^k d\bar{z}^\ell \ .$$

Alors

$$d''v = d'w = \theta \ .$$

3.2. PROPOSITION.- <u>Supposons θ nulle au voisinage de l'origine, alors 2.2.3 et 2.2.4 entraînent que</u>

3.2.1.
$$\int_\Omega \|w\| \, d\lambda = I_1(w) < +\infty$$

3.2.2.
$$\int_\Omega |\rho|^{-1/2} \|w \wedge d''\rho\| d\lambda = I_2(w) < +\infty \ .$$

<u>Preuve</u>. Théorème de Fubini combiné avec 2.2.5 et 2.2.6 (cf. [22], p. 279). On utilise l'inégalité de Schwarz sur la forme hermitienne positive associée au courant θ pour majorer le terme mixte figurant dans le premier membre de 3.2.2.

3.3. <u>Théorème de résolution de</u> d'' <u>cohomologie à croissance</u>

<u>Il existe une constante $C = C(\Omega)$ telle que, pour tout $w \in \Lambda^{0,1}(\Omega)$ de classe C^1, vérifiant $d''w \equiv 0$ ainsi que $I_1(w)$ et $I_2(w) < +\infty$, on peut trouver une fonction f de classe C^1 telle que</u>

$$d''f = w \ ,$$

$$\int_{\partial\Omega} |f| d\sigma^{2n-1} \leq C_1(I_1(w) + I_2(w)) \ .$$

3.4. PROPOSITION.- Le théorème 3.3 entraîne le théorème 2.3.

Preuve. On prend $\psi = \frac{1}{2i}\{f - \bar{f}\}$ en remarquant que

$$d'd''\bar{f} = -d''d'\bar{f} = -\overline{d'd''f} = -d''\bar{w} = -d''v = -\theta .$$

Les trois prochains paragraphes seront consacrés à la preuve de 3.3 qui constitue le point principal de la démonstration.

4. Résolution au bord

Il sera avantageux de transformer un problème aux limites elliptiques en un problème elliptique sur la variété compacte constitué par le bord.

4.1. L'opérateur d''_b

On note par $r^*\omega$ la restriction d'une $(0,1)$ forme à $\partial\Omega$; pour tout $e \in T^{\mathbf{C}}_{z_0}(\partial\Omega)$, on définit $\langle e , r^*\omega_{z_0} \rangle = \langle e , \omega_{z_0} \rangle$. Ainsi ω_{z_0} est une application linéaire antiholomorphe de $T^{\mathbf{C}}_{z_0}(\partial\Omega)$ dans $\mathbf{C}$. Plus généralement, on appelle $\Lambda^{0,1}(\partial\Omega)$ les sections du fibré des formes linéaires antiholomorphes sur $T^{\mathbf{C}}(\partial\Omega)$.

On définit si $\theta \in \Lambda^{0,1}(\partial\Omega)$, $d''_b\theta$ par

$$d''_b\theta = r^*\, d''\omega \qquad\qquad \text{avec} \quad r^*\omega = \theta .$$

Cette définition se justifie en montrant $r^*(\omega) = r^*(\tilde{\omega})$ entraîne $(d''\omega) = r^*(d''\tilde{\omega})$ (d''_b ne met en jeu que des dérivations du premier ordre tangentielles). Le problème de d''_b tangentiel s'énonce alors ainsi (cf. [2], [3]).

Etant donné $\psi \in \Lambda^{0,1}(\partial\Omega)$, vérifiant $d''_b\psi = 0$, trouver $h : \partial\Omega \to \mathbf{C}$, de classe C^1, tel que $d''_b h = \psi$.

4.2. Le problème de d''_b au sens faible

Donnons-nous $f \in \Lambda^{0,1}(\Omega)$, on appelle solution au sens faible de l'équation

$$d''_b u = f$$

(cette équation est un abus de langage pour $d''_b\, u = r^*f$) une fonction continue u définie sur $\partial\Omega$ telle que

4.2.1. $$\int_\Omega f \wedge \varphi = \int_{\partial\Omega} u\varphi \qquad \forall\, \varphi \in \Lambda^{n,n-1}(\bar{\Omega}) , \quad d''\varphi = 0 .$$

D'après la formule de Stockes, si $u = r^*g$ avec g de classe C^1 et si $d''g = f$, alors

4.2.2. $$\int_\Omega d''g \wedge \varphi = \int_\Omega d''(g\varphi) = \int_{\partial\Omega} g\varphi = \int_{\partial\Omega} u\varphi .$$

Ainsi, une solution du problème de d'' sur Ω conduit à une solution au sens faible du d''_b. La réciproque est établie au paragraphe suivant.

4.3. Construction d'une solution du d'' à partir d'une solution du d''_b

On note K le noyau de Bochner-Martinelli en bidegré $(0,0)$ et $(n, n-1)$:

4.3.1. $$K(z, \zeta) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\bar\zeta_k - \bar z_k}{|\zeta - z|^{2n}} \bigwedge_{j\neq k} d\bar\zeta^j \bigwedge_q d\zeta^q .$$

Alors, au sens des courants, on a

4.3.2. $$dK = d''K = c_n[\Delta] ,$$

où c_n est une constante, où $[\Delta]$ est le courant d'intégration le long de la diagonale $z = \zeta$ et où les opérateurs d et d'' sont calculés sur l'ensemble des variables (z, ζ).

Notons par $\tilde f$ le prolongement de f par zéro à l'extérieur de Ω et par $[\partial\Omega]_{0,1}$ la composante de type $[0,1]$ du courant d'intégration sur $\partial\Omega$. Alors 4.2.1 s'écrit :

$$\langle \tilde f - u[\partial\Omega]_{0,1}, \varphi\rangle = 0 \quad , \qquad \forall \varphi \text{ vérifiant } d''\varphi = 0 ,$$

où le crochet est celui de la dualité entre les courants et les formes différentielles C^∞ ; on en déduit

4.3.3. $$d''\{\tilde f - u[\partial\Omega]_{0,1}\} = 0$$

au sens des courants. Posons

$$c_n U(z) = \langle f - u[\partial\Omega]_{0,1}, K\rangle ,$$

c'est-à-dire

4.3.4. $$c_n U(z) = \int_\Omega K(z, \zeta) \wedge f(\zeta) - \int_{\partial\Omega} u(\zeta) K(z, \zeta) .$$

Notons par $\chi_1(z, \zeta) = z$, $\chi_2(z, \zeta) = \zeta$ les projections canoniques de $\mathbb{C}^{2n}$ sur $\mathbb{C}^n$. Soit $F(z)$ une fonction C^∞, à support compact, Λ un courant en ζ, d'' fermé

$$\langle K\wedge\chi_2^* \Lambda, d''(\chi_1^* F)(z, \zeta)\rangle = \langle d''(K\wedge\chi_2^* \Lambda), \chi_1^* F(z, \zeta)\rangle = c_n\langle \Lambda_\zeta, F(\zeta)\rangle_\zeta .$$

Par suite

4.3.5. $$d''_z\{\langle K, \Lambda\rangle_\zeta\} = c_n \Lambda_z \qquad \text{si } d''\Lambda = 0 .$$

En particulier,

4.3.6. $$d''U = \tilde{f} - u[\partial\Omega]_{0,1}$$

au sens des courants.

Appliquons la relation 4.2.1 avec $\varphi(\zeta) = K(z, \zeta)$, $z \notin \bar{\Omega}$. Alors $d''\varphi = 0$ au voisinage de $\bar{\Omega}$ et

$$\int_\Omega f \wedge K(z, \zeta) = \int_{\partial\Omega} uK .$$

D'après 4.3.4 ceci se lit

4.3.7. $$U(z) = 0 \qquad , \qquad z \notin \bar{\Omega} ,$$

donc U est à support dans $\bar{\Omega}$. La formule 4.3.6 montre que U admet u comme valeur au bord au sens de la formule de Stockes

4.3.8. $$-\int U \wedge d''\psi = \int_\Omega f \wedge \psi - \int_{\partial\Omega} u\psi , \qquad \forall \psi \in \Lambda^{n,n-1}(\bar{\Omega}) .$$

4.4. Passage d'une solution faible de d''_b à une solution forte du d''

PROPOSITION.- Supposons f continue sur $\bar{\Omega}$ et u continue sur $\partial\Omega$, alors U construit en 4.3.4 a un prolongement continu à $\bar{\Omega}$ et $U|_{\partial\Omega} = u$.

Preuve. On note $z \to z^* = z(1 + \rho(z))^{-1}$ la symétrisation envoyant Ω dans le complémentaire de Ω et définie au voisinage du bord. En tenant compte, d'après 4.3.7 et 4.3.2 que $U(z^*) = 0$ et

$$\int_{\partial\Omega_\zeta} K(z, \zeta) = c_n \begin{cases} 1 & \text{si } z \in \Omega \\ 0 & \text{si } z \notin \bar{\Omega} , \end{cases}$$

on obtient :

$$c_n(U(z) - u(z_0)) = \int_{\Omega_\zeta} [K(z, \zeta) - K(z^*, \zeta)]\wedge f(\zeta) + \int_{\partial\Omega_\zeta} [K(z, \zeta) - K(z^*, \zeta)](u(\zeta) - u(z_0)).$$

On démontre enfin (cf. [22], p. 438) que $(K - K^*)(z, \zeta)$ a le même comportement qualitatif que le noyau de Poisson ce qui établit la proposition.

5. Construction d'un noyau de Cauchy-Leray

On utilisera la méthode de RAMIREZ [17], HENKIN [5], ØVRELID [16] de construction d'une solution d'un problème de d'' à croissance à partir d'un noyau de Cauchy-Leray. Le fibré de Leray est défini par

$$E = \{(\xi, \zeta, z) \in \mathbb{C}^{3n} \ ; \ \langle \xi, \zeta - z\rangle \neq 0\} .$$

La forme différentielle de Leray [13] est définie sur E par

5.0. $$\mu = \frac{1}{[\langle \xi , \zeta - z\rangle]^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \xi_k \bigwedge_{j\neq k} d\xi_j \wedge \omega(\zeta - z) ,$$

où $\omega(\zeta - z) = \bigwedge_j (d\zeta_j - dz_j)$. Alors

5.1. $$d\mu = 0 .$$

Soit
$$H = \mathbb{C}^{2n} \setminus \Delta = \{(\zeta , z) \in \mathbb{C}^{2n} ; \zeta \neq z\} .$$

On note par π la projection de E sur H . Soit S une section de π . Alors $S^*\mu$ définira une forme différentielle noyau. Un premier choix possible de S est la <u>section de Bochner-Martinelli</u>

$$s_b : (\zeta , z) \mapsto (\xi_b = \bar{\zeta} - \bar{z} , \zeta , z) ;$$

5.2. $$s_b^*\mu = \sum_k (-1)^{k-1} \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}} \bigwedge_{j\neq k} d\bar{\zeta}_j \wedge \omega(\zeta - z) .$$

En prenant la composante de bidegré $(0,0)$ en z et de bidegré $(n , n-1)$ en ζ on retrouve K défini en 4.3.1.

5.3. THÉORÈME.- <u>Soit</u> $s_h = (\xi_h , \zeta , z)$ <u>une section de classe</u> C^1 <u>de</u> π, <u>définie sur</u> $\partial(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}) \setminus \Delta$, <u>vérifiant</u>

5.3.1. $$\mathrm{Re}(\langle \xi_h , \zeta - z\rangle) > 0 .$$

5.3.2. s_h <u>est holomorphe en</u> z <u>lorsque</u> $\zeta \in \partial\Omega$.

<u>Posons</u>

5.3.3. $$u(z) = \int_{\Omega_\zeta} (s_h^*\mu) \wedge f(z) ;$$

<u>alors</u> f <u>satisfait l'équation</u>

$$d_b'' u = f \qquad \underline{\text{sur}}\ \partial\Omega .$$

[Moyennant une hypothèse technique supplémentaire de contrôle des singularités dans l'homotopie $(1 - t)s_b + ts_h$ (cf. [22], p. 244, 3.1 (iii)).]

<u>Preuve</u>. Soit φ une $(n , n-1)$ forme d" fermée de classe C^1 dans $\bar{\Omega}$; on note $f(\zeta) \wedge \varphi(z)$ la forme $\chi_1^* f \wedge \chi_2^* \varphi$. On a, si Δ dénote le courant d'intégration sur la diagonale (cf. 4.3.2)

$$d(s_b^*\mu) = d''(s_b^*\mu) = c_n[\Delta] ,$$

d'où, par Stockes

$$- \int_{\Omega\times\Omega} (s_b^*\mu) \wedge d(\chi_1^* f \wedge \chi_2^*\varphi) + c_n \int_{\Delta\cap\Omega\times\Omega} \chi_1^* f \wedge \chi_2^*\varphi = \int_{\partial(\bar\Omega\times\bar\Omega)} (s_b^*\mu) \wedge \chi_1^* f \wedge \chi_2^*\varphi \ .$$

Comme $\chi_1^* f \wedge \chi_2^*\varphi$ est d" fermée et $s_b^*\mu \wedge d'(\chi_1^* f \wedge \chi_2^*\varphi)$ est nulle (de degré $2n+1$ dans les différentielles en dz) la première intégrale est nulle et on obtient :

$$c_n \int_\Omega f \wedge \varphi = \int_{\partial(\bar\Omega\times\bar\Omega)} (s_b^*\mu) \wedge \chi_1^* f \wedge \chi_2^*\varphi \ .$$

On définit une homotopie $\xi_t = t\xi_h + (1-t)\xi_b$ entre les deux sections s_h et s_b ; pour toute valeur $t \in [0,1]$, on a d'après 5.3.1 et 5.2, $\mathrm{Re}[\langle \xi_t , \zeta - z\rangle] > 0$ d'où ξ_t définit une section s_t de π au-dessus de $\partial(\bar\Omega \times \bar\Omega)$. Comme $\mu \wedge \pi^*(\chi_1^* f \wedge \chi_2^*\varphi)$ est fermé dans E et $\partial(\bar\Omega\times\bar\Omega)$ est un bord, on obtient

$$c_n \int_\Omega f \wedge \varphi = \int_{\partial(\bar\Omega\times\bar\Omega)} (s_h^*\mu) \wedge \chi_1^* f \wedge \chi_2^*\varphi \ .$$

D'autre part $\partial(\bar\Omega\times\bar\Omega) = \{\partial\Omega_\zeta \times \Omega_z\} \cup \{\Omega_\zeta \times \partial\Omega_z\}$; comme s_h est holomorphe en z lorsque $\zeta \in \partial\Omega_\zeta$, sur le premier ensemble, on intègre une forme de degré holomorphe $(n+1)$ en z donc nulle, d'où

$$c_n \int_\Omega f \wedge \varphi = \int_{\Omega_\zeta\times\partial\Omega_z} (s_h^*\mu \wedge \chi_1^* f) \wedge \varphi \ ,$$

d'où la solution

$$u = \int_{\Omega_\zeta} (s_h^*\mu) \wedge f(\zeta) \ .$$

5.4. <u>Construction de la section</u> s_h

La construction sera faite dans le cas Ω <u>convexe</u>, définie par la quasi-norme ρ . On pose

$$P_j(\zeta) = \frac{\partial\rho}{\partial\zeta_j} \ , \qquad\qquad P = (P_1,\dots,P_n) \ ;$$

5.4.1. $$\xi = -\rho(\zeta)\frac{P(z)}{\langle P(z) , \zeta - z\rangle} + P(\zeta) \qquad \text{si} \quad (\zeta , z) \in (\bar\Omega_\zeta \times\partial\Omega_z)\setminus\Delta$$

et

5.4.2. $$\xi_h = P(\zeta) \qquad \text{si} \quad (\zeta , z) \in (\partial\Omega_\zeta \times \Omega_z) \ .$$

Ces deux définitions se raccordent sur $\rho = 0$. On remarque que dans le premier cas, en vertu de la formule d'Euler

5.4.3. $$\langle \xi_h , \zeta - z\rangle = -\rho(\zeta) - \langle P(\zeta) , z - \zeta\rangle = 1 - \langle P(\zeta) , z\rangle \ .$$

La formule de Taylor pour ρ montre qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\rho(z) - \rho(\zeta) \geq 2\,\mathrm{Re}\langle P(\zeta)\,,\, z - \zeta\rangle + c|z - \zeta|^2$$

ou encore

$$2\,\mathrm{Re}(\langle P(\zeta)\,,\, \zeta - z\rangle) \geq \rho(\zeta) - \rho(z) + c|z - \zeta|^2\ .$$

Si $\zeta \in \partial\Omega$, alors le second membre est positif. De même, sur $\bar{\Omega}_\zeta \times \partial\Omega_z$

$$\mathrm{Re}\langle \xi_h\,,\, \zeta - z\rangle = -\rho(z) + \mathrm{Re}\langle P(\zeta)\,,\, \zeta - z\rangle \geq -\tfrac{1}{2}\,\rho(\zeta) + c|\zeta - z|^2\ .$$

Les hypothèses du théorème 5.3 sont ainsi satisfaites.

6. Estimation de la solution de d''_b

6.1. Formule explicite

Pour pouvoir appliquer 5.3.3, il nous suffit de connaître ν la composante $(n\,,n-1)$ en ζ et $(0,0)$ en z de $s_h^*\mu$ sur $\bar{\Omega}_\zeta \times \partial\Omega_z$

$$\nu = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\xi^k}{[\langle \xi\,,\, \zeta - z\rangle]^n} \Big(\bigwedge_{j\neq k} d''_\zeta(\xi_h^j) \wedge \omega(\zeta)\Big),$$

avec
$$d''_\zeta(\xi_h^j) = \frac{-Q^j}{\langle Q\,,\, \zeta - z\rangle}\, d''_\zeta\rho + d''_\zeta P^j \quad ,$$

où pour simplifier les notations $Q = P(z)$, $P = P(\zeta)$. On écrit ν

$$\nu = \frac{\omega(\zeta)}{[\langle \xi\,,\, \zeta - z\rangle]^n} \sum_k \Bigg[\Big(\frac{-\rho(z)}{\langle Q\,,\, \zeta - z\rangle}\, Q^k + P^k\Big)\Big\{ (-1)^{k-1} \bigwedge_{j\neq k} d''P^j \; +$$

$$+ \sum_j (-1)^{k+j} \frac{Q^\ell}{\langle Q\,,\, \zeta - z\rangle}\, d''_\zeta\rho \wedge \Big(\bigwedge_{\substack{j\neq k\\ j\neq \ell}} d''_\zeta P^j(\zeta)\Big)\Big\}\Bigg]\ .$$

On obtient, d'après 5.4.3, l'holomorphie en z du premier dénominateur. D'où la contribution de $P^k(\zeta) \bigwedge_{j\neq k} d''_\zeta P^j$ est holomorphe en z par suite ne modifie pas le d'' de la fonction u . On peut la négliger en posant

6.1.1. $$\tilde{\nu} = \frac{\omega(\zeta)}{[\langle \xi\,,\, \zeta - z\rangle]^n} \Bigg\{\frac{\rho}{\langle Q\,,\, \zeta - z\rangle} \sum_k (-1)^k Q^k \bigwedge_{j\neq k} d''_\zeta P^j \; + \sum_{k<j} (-1)^{k+j} \frac{P^kQ^j - P^jQ^k}{\langle Q\,,\, \zeta - z\rangle}\, d''\rho\Bigg\} \quad ;$$

alors

6.1.2. $$\tilde{u} = \frac{1}{c_n}\int_{\Omega_\zeta} \tilde{\nu} \wedge f$$

est une solution de $d''_b\,\tilde{u} = f$.

6.2. Majorations

Utilisant 6.1.1

6.2.1. $$\int_{\partial\Sigma} |\tilde{u}(z)|\,d\sigma^{2n-1}(z) \le c\int_{\Omega} \|f(\zeta)\|\, v(\zeta)\, d\lambda(\zeta) + c\int_{\Omega} \|f\wedge d''\rho\|\, w(\zeta)\, d\lambda(\zeta)$$

avec

6.2.2. $$v(\zeta) = \rho(\zeta)\int_{\partial\Omega} \frac{1}{[\langle \xi_h , \zeta - z\rangle]^n |\langle Q , \zeta - z\rangle|}\, d\sigma^{2n-1}(z)$$
$$w(\zeta) = \int_{\partial\Omega} \frac{\sum_{k,j} |P^k Q^j - Q^k P^j|}{[\langle \xi_h , \zeta - z\rangle]^n |\langle Q , \zeta - z\rangle|}\, d\sigma^{2n-1}(z) .$$

Utilisant la stricte convexité de Ω et des développements tayloriens, on peut essentiellement se ramener à la situation où Ω est la boule unité de $\mathbb{C}^n$; nous achèverons le calcul dans ce cas typique, alors

$$v(\zeta) = \int_{\partial\Omega} (1 - |\zeta|^2)\, \frac{1}{|(1 - \bar{\zeta}.z)^n|\,|1 - \bar{z}.\zeta|}\, d\sigma^{2n-1}(z)$$

$$w(\zeta) = \int_{\partial\Omega} \frac{\sum_{k,j} |\zeta^k \bar{z}^j - \bar{\zeta}^j z^k|}{|(1 - \bar{\zeta}.z)^n|\,|1 - \bar{z}.\zeta|}\, d\sigma^{2n-1}(z) ,$$

d'où

$$w(\zeta) \le c\int_{\partial\Omega} \frac{|\zeta - z|}{|1 - \bar{\zeta}.z|^{n+1}}\, d\sigma^{2n-1}(z) .$$

On remarque que $v(\zeta)$ se comporte comme l'intégrale du noyau de Poisson, d'où

$$v(\zeta) = O(1) .$$

D'autre part, la majoration de $w(\zeta)$ donne

$$w(\zeta) = O(\rho^{-\frac{1}{2}}) ,$$

d'où, en reportant ces majorations dans 6.2.1

$$\|\tilde{u}\|_{L^1(\partial\Omega)} \le c\int_{\Omega} \|f(\zeta)\|\, d\lambda(\zeta) + c\int_{\Omega} \|f(\zeta)\wedge d''\rho\|\,(\rho)^{-\frac{1}{2}}\, d\lambda ,$$

ce qui établit 3.3.

6.3. En prenant pour la section s_h une section discontinue sur $\partial\Omega \times \partial\Omega$, le saut de la formule de Stockes fournit [22] un noyau K résolvant le d''_b par une intégrale sur le bord. Le noyau K opère continûment de $L^s(\partial\Omega) \to L^s(\partial\Omega)$ $(1 \le s \le +\infty)$, ce qui précise aux bornes les résultats de FOLLAND-STEIN [2].

6.4. Remarque

La méthode suivie pour résoudre l'équation de Poincaré-Lelong $id'd''\varphi = V$ a consisté à résoudre d'abord un problème de d' puis un problème de d'' .

Or l'opérateur $id'd''$ est un opérateur différentiel à coefficients réels dans $\mathbb{R}^{2n}$.

On peut penser que le détour consistant à le traiter comme le composé de deux opérateurs à coefficients complexes peut faire perdre de la précision dans les estimées. Une question qui est peut-être reliée, est la construction de semi-groupes non linéaires conservant le cône des courants de type $(1,1)$, fermés et positifs, ce qui constitueraient alors une extension du balayage.

7. Travaux d'autres mathématiciens

La démarche suivie par G. HENKIN dans [6] et [7] est fondée sur des idées voisines. En plus de la caractérisation des zéros de la classe de Nevanlinna, G. HENKIN obtient par une formule intégrale sur le bord, le théorème suivant :

Sur le bord de la boule de $\mathbb{C}^2$, notons par H l'opérateur de Hans Lewy, alors l'équation

$$Hg = \varphi$$

admet une solution si et seulement si la projection de φ sur l'orthogonal de fonctions holomorphes est une fonction analytique réelle.

Ce théorème a été établi par d'autres méthodes par Kohn-Greiner-Stein (cf. [3]).

Un pas essentiel de la solution du problème de la couronne par L. Carleson en dimension 1 est la résolution de l'équation

$$d''f = \mu \quad \text{avec} \quad f \in L^{\infty}(\partial\Omega)$$

et où μ est une "mesure de Carleson".

Les analogues dans $\mathbb{C}^n$ des mesures de Carleson ont été introduites par HÖRMANDER [8]. N. VAROPOULOS vient de montrer [23] que la résolution du d'' avec un second membre du type "Carleson-Hörmander", ne peut pas se faire dans $L^{\infty}(\partial\Omega)$; le travail de N. VAROPOULOS montre que cette résolution est possible dans un espace B.M.O. construit à partir des boules de Koranyi du bord.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BEURLING - On two problems concerning linear transformation in Hilbert space, Acta Mathematica, vol. 81, 1949, p. 239-255.

[2] G.B. FOLLAND and E.M. STEIN - Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and Analysis on the Heisenberg group, Comm. Pure and Applied Math., 27 (1974), p. 429-522.

[3] P.C. GREINER and E.M. STEIN - Estimates for the $\bar{\partial}$ Neumann problem Mathematical Notes, n° 19, Princeton Univ. Press, 1977.

[4] L. GRUMAN - The zeros of holomorphic functions in a strictly pseudo-convex domain, Trans. Amer. Math. Society, 207 (1975), p. 163-174.

[5] G.M. HENKIN - Integral representation of functions in a strictly pseudo-convex domain and application to $\bar{\partial}$-problem, Mat. Sbornik, 82 (1970), p. 300-308 [en russe] ; traduction anglaise, p. 273-282.

[6] G.M. HENKIN - Résolution de l'équation de Poincaré-Lelong, de l'équation de Hans Lewy et zéros de la classe de Nevanlinna, I et II, Doklady Akad. Nauk, 224, n° 4, 1975, p. 771-774 [en russe].

[7] G.M. HENKIN - Equation de Levy et analyse sur des ouverts strictement pseudoconvexes, I, Uspehi Mat. Nauk, 1977 (XXXII), et II, Mat. Sbornik, 102 (1977), p. 71-108.

[8] L. HÖRMANDER - L^p estimates for (pluri)subharmonic functions, Math. Scand., 20 (1967), p. 65-78.

[9] G. LAVILLE - Résolution du $\partial\bar{\partial}$ à croissance dans des ouverts pseudo-convexes étoilés, C. R. Acad. Sc. Paris, 274 (1972), p. A554-A556.

[10] G. LAVILLE - Sur les diviseurs de la classe de Nevanlinna dans la boule de C^2, C. R. Acad. Sc. Paris, 281 (1975), p. A145-A147, et Revue du CETHEDEC, Paris, 1975, n° 43, p. 9-42.

[11] P. LELONG - Intégration sur un ensemble analytique complexe, Bull. Soc. Math. de France, 85 (1957), p. 239-262.

- Fonctions entières et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans C^n, Journ. d'Analyse Math., 12 (1964), p. 365-407.

[12] P. LELONG - Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives, Paris, Gordon Breach, 1968.

[13] J. LERAY - Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy III), Bull. Soc. Math. de France, 87 (1959), p. 81-180.

[14] I. LIEB - Die Cauchy-Riemmansche Differentialgleichungen auf streng pseudokonvex gebieten, Math. Annalen, 190 (1970), p. 6-44.

[15] R. NEVANLINNA - Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier-Villars, Paris, 1929.

[16] N. ØVERLID - Integral representation formulae and L^p estimates for the $\bar{\partial}$-équation, Math. Scand., 29 (1971), p. 137-160.

[17] E. RAMIREZ de ARELLANO - Ein Division Problem und Randintegraldarstellung in der komplexen Analysis, Math. Annalen, 184 (1970), p. 172-187.

[18] W. RUDIN - Function theory in the polydisc, Benjamin, N.Y., 1969.

[19] W. RUDIN - Zeros of Holomorphic Functions in the Ball, Kon. Nederl. Akad. Van Weten, Amsterdam, 1976, n° 1, p. 57-65.

[20] H. SKODA - Valeurs au bord pour les solutions de l'opérateur d" dans les ouverts pseudo-convexes, C. R. Acad. Sc. Paris, 280 (1975), p. A633-A636.

- Zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna dans les ouverts strictement pseudo-convexes, C. R. Acad. Sc. Paris, 280 (1975), p. A1677-A1680.

[21] H. SKODA - Zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna, Conférence on Spaces of analytic functions, Christiansand, 1975, Lecture Notes in Math., Vol. 512 (1976), 8 pages, Springer Verlag, Berlin.

[22] H. SKODA - Valeurs au bord pour les solutions de l'opérateur d" et caractérisation des zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna, Bull. Soc. Math. de France, 104 (1976), p. 225-279.

[23] N. VAROPOULOS - Resolution of d" in B.M.O., Preprint de 80 pages, 1976.