SÉMINAIRE N. BOURBAKI

MICHEL WALDSCHMIDT

Les travaux de G. V. Čudnovskiĭ sur les nombres transcendants

Séminaire N. Bourbaki, 1977, exp. n° 488, p. 274-292

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1975-1976__18__274_0>

Séminaire BOURBAKI 488-01
28e année, 1975/76, n° 488 Juin 1976

LES TRAVAUX DE G. V. ČUDNOVSKIĬ SUR LES NOMBRES TRANSCENDANTS

par Michel WALDSCHMIDT

Introduction

La méthode la plus simple pour étudier l'indépendance algébrique de nombres complexes est due à S. LANG ; elle consiste à utiliser un type de transcendance de certains nombres. C'est ainsi que G. V. ČUDNOVSKIĬ, grâce à une propriété d'approximations algébriques du nombre π , obtient un très beau résultat sur les fonctions elliptiques (§ 1) qui résout le problème de la transcendance du nombre $\Gamma(1/4)$.

Une autre méthode, plus élaborée, a été inventée par A. O. GEL'FOND en 1949 (§ 2) ; elle remplace le type de transcendance par un critère sur les suites d'approximations d'un nombre complexe. Mais cette méthode ne permet d'obtenir que l'indépendance algébrique de deux nombres complexes. ČUDNOVSKIĬ a développé les idées de GEL'FOND pour créer une nouvelle méthode (§ 3) qui lui permet de montrer l'indépendance algébrique de trois nombres, sans utiliser de type de transcendance.

Une fois de plus, cette méthode était limitée, et de nouveaux arguments étaient nécessaires pour obtenir l'indépendance algébrique de n nombres. La deuxième méthode de ČUDNOVSKIĬ (§ 4) permet de franchir ce pas, et constitue une étape importante en direction de la conjecture de SCHANUEL. Les résultats actuels sont encore loin de cette conjecture, mais ČUDNOVSKIĬ a déjà montré (§ 5) que la "limite naturelle" de sa deuxième méthode pouvait être dépassée.

Ces travaux ne sont pas les seuls effectués par ČUDNOVSKIĬ depuis qu'il étudie les nombres transcendants ; en particulier, il a obtenu plusieurs résultats [3c, 3d] liés à la méthode de BAKER.

§ 1. Fonctions elliptiques

Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass, d'invariants g_2 , g_3 ; notons (ω_1, ω_2) un couple fondamental de périodes de $\wp$, et $\eta_i = 2\zeta(\omega_i/2)$, $(i = 1, 2)$ les pseudo-périodes de la fonction zêta associée à $\wp$.

THÉORÈME 1.1 [3e].- Deux des nombres g_2 , g_3 , ω_1 , ω_2 , η_1 , η_2 sont algébriquement indépendants (sur $\mathbb{Q}$).

Ce résultat est particulièrement intéressant dans le cas de multiplication complexe : en supposant g_2 et g_3 algébriques, la dimension de l'espace vectoriel sur le corps $\bar{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques engendré par 1 , ω_1 , ω_2 , η_1 , η_2 , $2i\pi$ est alors égale à 4 (cf.[7] chap. III) ; la relation de Legendre : $\omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2 = 2i\pi$ permet alors de déduire du théorème 1.1 le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.2 [3e].- Supposons g_2 , g_3 algébriques ; si $\wp$ a la multiplication complexe, alors ω_1 et π sont algébriquement indépendants.

Comme l'a remarqué D. W. MASSER, ce corollaire résout le problème (cf. [2 , 8]) de la transcendance de $\Gamma(1/4)$: en effet, la courbe elliptique $y^2 = 4x^3 - 4x$ admet la multiplication complexe par i , et [2] :

$$\omega_1 = 2\int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - 4t}} = \tfrac{1}{2}B(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})^2}{\sqrt{8\pi}} ,$$

donc $\Gamma(1/4)$ et π sont algébriquement indépendants. De même la courbe elliptique $y^2 = 4x^3 - 4$ permet d'obtenir l'indépendance algébrique de $\Gamma(1/3)$ et de π .

Pour démontrer le théorème 1.1, il est commode d'introduire les notions de "taille" suivantes (cf. [6 ; 1a ; 3b ; 3c ; 10a]).

Si $P \in \mathbb{Z}[z_1,\ldots,z_q]$ est un polynôme non nul en q variables à coefficients entiers rationnels, de hauteur (= maximum des valeurs absolues des coefficients) égale à $H(P)$ et de degré (total) $\deg(P)$, on définit la taille $t(P)$ de P par :

$$t(P) = \max\{\mathrm{Log}\, H(P) ; \deg(P)\} .$$

Soient $\theta_1,\ldots,\theta_k$ des nombres complexes ; notons $\mathfrak{L} = \mathbb{Z}[\theta_1,\ldots,\theta_k]$. On dira qu'un élément u de $\mathfrak{L}$ a une taille (par rapport à $\theta_1,\ldots,\theta_k$) inférieure ou égale à t , et on écrit (par abus de notation) $t_{\mathfrak{L}}(u) \leq t$, s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[z_1,\ldots,z_k]$, tel que $t(P) \leq t$, et tel que $u = P(\theta_1,\ldots,\theta_k)$.

Soit v un nombre complexe algébrique sur le corps $\mathbb{Q}(\theta_1,\ldots,\theta_k)$; on dira que v a une taille $t_{\mathfrak{L}}(v)$ inférieure ou égale à t s'il existe un polynôme irréductible $Q \in \mathfrak{L}[z]$, de degré $\leq t$ et dont les coefficients ont une taille $\leq t$ (on écrit : $t_{\mathfrak{L}}(Q) \leq t$), et tel que $Q(v) = 0$.

Démonstration du théorème 1.1. Supposons que le résultat soit faux ; d'après la relation de Legendre, le nombre π appartient au corps $K = \mathbb{Q}(i, g_2, g_3, \omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2)$, donc il existe un élément θ de K, entier algébrique sur $\mathbb{Z}[\pi]$, tel que $K = \mathbb{Q}(\pi, \theta)$. Nous noterons t la taille sur K relative à $\{\pi, \theta\}$.

Remarquons que les fonctions z, $\wp(z)$, $\zeta(z)$, qui sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$, prennent, ainsi que toutes leurs dérivées, des valeurs dans K aux points

$$\frac{\omega_1}{2} + h_1\omega_1 + h_2\omega_2 \quad , \qquad ((h_1, h_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \ .$$

Choisissons alors un réel ν, $0 < \nu < 1$. Soit N un entier suffisamment grand, et soit

$$L = [N^{1-\frac{\nu}{4}}] \quad , \qquad H = [N^{1-\frac{\nu}{2}}] \ .$$

Les nombres $c_1, \ldots, c_8$ sont positifs et indépendants de N.

Premier pas. On construit une fonction auxiliaire :

$$\Phi(z) = \sum_{\lambda_0=0}^{L} \sum_{\lambda_1=0}^{L} \sum_{\lambda_2=0}^{L} \varphi(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)\, z^{\lambda_0}\, \wp(z)^{\lambda_1}\, \zeta(z)^{\lambda_2} \ ,$$

où les $\varphi(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)$ sont des éléments de $\mathbb{Z}[\pi]$, non tous nuls, vérifiant :

$$\frac{d^n}{dz^n}\, \Phi\left(\frac{\omega_1}{2} + h_1\omega_1 + h_2\omega_2\right) = 0 \qquad \text{pour } 0 \le n < N \ , \ 1 \le h_1 \le H \ , \ 1 \le h_2 \le H \ .$$

Pour cela on doit résoudre un système de H^2N équations linéaires homogènes en $(L+1)^3$ inconnues $\varphi(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)$, et à coefficients dans K. Comme

$$[K : \mathbb{Q}(\pi)] \cdot H^2N < (L+1)^3 \ ,$$

ce système admet une solution non triviale ; on veut, de plus, majorer la taille d'une telle solution. Pour cela on remarque que

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(z^{\lambda_0}\, \wp(z)^{\lambda_1}\, \zeta(z)^{\lambda_2}\right)$$

est un polynôme en z, $\wp(z)$, $\zeta(z)$, $\wp'(z)$, de degré total au plus c_1N, et dont les coefficients ont une taille au plus $c_2 N \operatorname{Log} N$. Grâce au principe des tiroirs ("lemme de Siegel" ; cf. [1a] lemme 5.2, ou [10a] lemme 4.3.1 par exemple), on peut sélectionner les $\varphi(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)$ dans $\mathbb{Z}[\pi]$, avec un degré au plus N et une taille au plus c_3N.

Deuxième pas. Choix de ξ .

Notons N_1 le plus grand entier tel que

$$\frac{d^m}{dz^m}\Phi\left(\frac{\omega_1}{2} + k_1\omega_1 + k_2\omega_2\right) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \le m < N_1 \ , \ 1 \le k_1 \le N_1^{1-\frac{\nu}{2}} \ , \ 1 \le k_2 \le N_1^{1-\frac{\nu}{2}} .$$

Notons $H_1 = [N_1^{1-\frac{\nu}{2}}]$. Choisissons des entiers m' , k_1' , k_2' , avec

$$0 \le m' < N_1 + 1 \ ; \ 1 \le k_1' \le (N_1+1)^{1-\frac{\nu}{2}} \ , \quad 1 \le k_2' \le (N_1+1)^{1-\frac{\nu}{2}} \ ,$$

de telle manière que le nombre

$$\xi = \frac{d^{m'}}{dz^{m'}}\Phi(w) \ , \qquad \text{où} \quad w = \frac{\omega_1}{2} + k_1'\omega_1 + k_2'\omega_2 \ ,$$

ne soit pas nul. On choisit de plus m' minimal :

$$\frac{d^m}{dz^m}\Phi(w) = 0 \qquad \text{pour} \quad 0 \le m < m' .$$

Troisième pas. Majoration de ξ .

Soit σ la fonction sigma de Weierstrass associée à $\wp$. La fonction $\psi = \sigma^{3L}\Phi$ est alors entière dans $\mathbf{C}$, et, grâce au choix de m' ,

$$\frac{d^{m'}}{dz^{m'}}\psi(w) = \sigma(w)^{3L}\xi .$$

On utilise alors le principe du maximum, sur le disque $|z| \le N_1^{1-\frac{7\nu}{16}}$, pour le quotient de la fonction ψ par le polynôme des $N_1H_1^2$ zéros qu'elle possède dans le disque $|z| \le c_4H_1$. On obtient

$$\mathrm{Log}|\xi| \le -c_5N_1H_1^2 \ \mathrm{Log}\ N_1 .$$

Quatrième pas. Taille de ξ ; retour à $\mathbb{Z}[\pi]$

En utilisant les arguments du premier pas, on trouve

$$t(\xi) \le c_6 \ N_1 \ \mathrm{Log}\ N_1 .$$

On multiplie alors ξ par un dénominateur (c'est-à-dire un élément non nul de $\mathbb{Z}[\pi]$, pour que le produit soit dans $\mathbb{Z}[\pi,\theta]$), et on prend la norme de ce produit sur $\mathbb{Q}(\pi)$. On obtient un polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[z]$, de taille

$$t(P) \le c_7 \ N_1 \ \mathrm{Log}\ N_1 ,$$

tel que

$$\text{Log}|P(\pi)| \leq -c_8 N_1^{3-\nu} \text{Log } N_1 .$$

Conclusion.

On obtient la contradiction attendue en utilisant le lemme 1.3 suivant.

DÉFINITION [6, 1a, 10a].- Un sous-corps K de $\mathbf{C}$ a un type de transcendance inférieur ou égal à τ s'il existe une base de transcendance $(x_1,\ldots,x_q)$ de K sur $\mathbb{Q}$, et une constante $C = C(\tau, x_1,\ldots,x_q)$, telles que pour tout polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[z_1,\ldots,z_q]$, on ait

$$\text{Log}|P(x_1,\ldots,x_q)| \geq -C\,(t(P))^{\tau} .$$

Lemme 1.3 (FEL'DMAN [4] th. 4).- Pour tout $\varepsilon > 0$, le corps $\mathbb{Q}(\pi)$ a un type de transcendance inférieur ou égal à $2 + \varepsilon$.

Ce lemme termine la démonstration du théorème 1.1. La même méthode a permis à ČUDNOVSKIĬ de démontrer d'autres résultats d'indépendance algébrique [3e] : ainsi, sous les hypothèses du corollaire 1.2, les deux nombres ω_1/π et e^{π} sont algébriquement indépendants.

§ 2. La méthode de GEL'FOND pour l'indépendance algébrique de 2 nombres

La méthode précédente, qui consiste à utiliser un type de transcendance, ne donne un résultat précis que si l'on connait un énoncé fin comme le lemme 1.3 (qui est essentiellement le meilleur possible). Quand interviennent des corps tels que $\mathbb{Q}(\alpha^{\beta})$ dont on ne sait majorer le type de transcendance que par $4 + \varepsilon$, il vaut mieux utiliser une méthode de GEL'FOND, que nous allons esquisser sur un exemple.

Soient α et β deux nombres algébriques, $\alpha \neq 0$, $\log \alpha \neq 0$; notons $d = [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$ le degré de β sur $\mathbb{Q}$, et q le degré de transcendance du corps $\mathbb{Q}(\alpha^{\beta},\ldots,\alpha^{\beta^{d-1}})$ sur $\mathbb{Q}$.

THÉORÈME 2.1 (GEL'FOND [5]).- Pour $d \geq 3$, on a $q \geq 2$.

Ainsi, quand β est un irrationnel cubique, α^{β} et α^{β^2} sont algébriquement indépendants. GEL'FOND conjecture : $q = d - 1$. La conjecture de SCHANUEL montrerait même l'indépendance algébrique des nombres $\log \alpha$, α^{β}, ..., $\alpha^{\beta^{d-1}}$.

La démonstration du théorème 2.1 peut être séparée en deux parties. D'abord la méthode de transcendance, qui sert à démontrer la proposition 2.2 suivante

(voir par exemple [10a] théorème 7.2.8).

Soit $(x_1,\dots,x_q)$ une base de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps

$K = \mathbb{Q}(\alpha^\beta,\dots,\alpha^{\beta^{d-1}})$.

PROPOSITION 2.2.- On suppose $d \geq 2$. Pour tout réel $X \geq 1$, il existe un polynôme non nul $P_X^{(o)} \in \mathbb{Z}[z_1,\dots,z_q]$, vérifiant

$$t(P_X^{(o)}) \leq X$$

et, pour X suffisamment grand,

$$\mathrm{Log}|P_X^{(o)}(x_1,\dots,x_q)| \leq -c_9 X^{\frac{d+1}{2}} (\mathrm{Log}\, X)^{\frac{1}{2}} ,$$

où $c_9 > 0$ ne dépend pas de X .

On en déduit immédiatement $q \geq 1$; c'est une conséquence du théorème de GEL'FOND et SCHNEIDER sur la transcendance de α^β .

Nous indiquons rapidement la démonstration de la proposition 2.2, car nous l'utiliserons plus tard. Notons $\mathfrak{L}_q$ l'anneau $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_q]$. Soit X un nombre réel suffisamment grand. On définit des entiers H_X , L_X , M_X par :

$$H_X = [c_{10} X^{\frac{d+1}{2d}} (\mathrm{Log}\, X)^{-\frac{1}{2d}}] , \quad L_X = [c_{11} X (\mathrm{Log}\, X)^{-1}] , \quad M_X = [c_{12} X^{\frac{d-1}{2d}} (\mathrm{Log}\, X)^{\frac{1}{2d}}] .$$

Pour $\mu = (\mu_o,\dots,\mu_{d-1}) \in \mathbb{Z}^d$, on note $\mu.\beta = \mu_o + \mu_1\beta + \dots + \mu_{d-1}\beta^{d-1}$; par convention, on aura $\mu_j \geq 0$ $(0 \leq j \leq d-1)$; on note $|\mu| = \max \mu_j$. Les conventions sont les mêmes pour $h = (h_o,\dots,h_{d-1})$.

Premier pas. On construit une fonction auxiliaire

$$F(z) = \sum_{\lambda=0}^{L_X} \sum_{|\mu| \leq M_X} \varphi(\lambda,\mu)\, z^\lambda . \alpha^{(\mu.\beta)z} ,$$

telle que

$$F(h.\beta) = 0 \qquad \text{pour} \quad |h| \leq H_X .$$

On choisit de plus les $\varphi(\lambda,\mu)$ dans $\mathfrak{L}_q$, non tous nuls, de taille majorée par c_{13}^X . On utilisera plus tard la remarque suivante : on peut supposer sans restriction que les $\varphi(\lambda,\mu)$ sont premiers entre eux dans leur ensemble dans $\mathfrak{L}_q$.

Deuxième pas. On utilise une majoration, due à R. TIJDEMAN [9] :

$$\mathrm{Log} \max_{(\lambda,\mu)} |\varphi(\lambda,\mu)| \leq c_{14} H_X^d \,\mathrm{Log}\, X + \mathrm{Log} \max_{|h| \leq c_{15} H_X} |F(h.\beta)| . \tag{2.3}$$

On en déduit l'existence d'un nombre $\gamma = F(h.\beta)$, (avec $|h| \leq c_{15} H_X$), non nul.

Troisième pas. Grâce au lemme de Schwarz pour la fonction entière F qui a au moins H_X^d zéros,

$$\mathrm{Log}|\gamma| \leq -c_{16} H_X^d \mathrm{Log}\, X .$$

Quatrième pas. On multiplie γ par un dénominateur (pour que le produit soit entier sur $\mathfrak{L}_q$), et on prend la norme sur $\mathfrak{L}_q$; cette norme est un polynôme en $x_1, \ldots, x_q$ qui vérifie les propriétés requises (modulo un choix convenable de c_{10} , c_{11} , c_{12}).

La différence essentielle entre cette démonstration et celle du § 1 réside en la majoration (2.3). (Si une inégalité analogue était connue dans la situation du § 1, on saurait majorer N_1 en fonction de N , et la démonstration du § 1 deviendrait effective).

La deuxième partie de la démonstration du théorème 2.1 est un critère de transcendance de GEL'FOND [5 , 1a , 10a].

PROPOSITION 2.4.- Soit θ un nombre complexe. On suppose qu'il existe une suite $(P_N)_{N \geq 1}$ de polynômes non nuls de $\mathbb{Z}[z]$, vérifiant, pour N suffisamment grand

$$t(P_N) \leq N$$

et

$$\mathrm{Log}|P_N(\theta)| \leq -12\, N^2 .$$

Alors θ est algébrique.

Démonstration. Pour N suffisamment grand, comme $P_N(\theta)$ est très petit, θ est proche d'une racine α_N de P_N ; si Q_N est la plus grande puissance du polynôme minimal de α_N qui divise P_N , le nombre $Q_N(\theta)$ est aussi très petit :

$$\mathrm{Log}|Q_N(\theta)| \leq -9N^2 , \quad t(Q_N) \leq 2N .$$

Le résultant de Q_N et de Q_{N+1} est un entier rationnel majoré en valeur absolue par

$$\{|Q_{N+1}(\theta)| + |Q_N(\theta)|\} . \exp\{2\, t(Q_N)\, t(Q_{N+1})\} < 1 .$$

Donc $\alpha_N = \alpha_{N+1}$, et α_N ne dépend pas de N ; soit R son polynôme minimal sur $\mathbb{Z}$; écrivons $Q_N = R^{r_N}$. Alors

$$r_N \mathrm{Log}|R(\theta)| \leq -8\, N^2 , \text{ et } r_N\, t(R) \leq 4N .$$

On en déduit $R(\theta) = 0$, donc θ est algébrique, et $P_N(\theta) = 0$ pour tout N suffisamment grand.

Le théorème 2.1 est une conséquence immédiate des propositions 2.2 et 2.4.

§ 3. La première méthode de ČUDNOVSKIĬ. Indépendance algébrique de 3 nombres

Le premier résultat de transcendance démontré par ČUDNOVSKIĬ [3a] contient l'énoncé suivant :

THÉORÈME 3.1.- *Soient* α *et* β *deux nombres algébriques,* $\alpha \neq 0$, $\log \alpha \neq 0$; *notons* d *le degré de* β *sur* $\mathbb{Q}$. *Si* $d \geq 7$, *alors 3 des nombres*

$$\alpha^{\beta}, \ldots, \alpha^{\beta^{d-1}}$$

sont algébriquement indépendants.

Autrement dit, avec les notations du § 2, pour $d \geq 7$, on a $q \geq 3$. Grâce à la proposition 2.4, il suffit de démontrer le résultat suivant ([3c] théorème 5.1 ; voir aussi [10b] proposition 6.1), qui fournit une autre démonstration du théorème 2.1.

PROPOSITION 3.2.- *Avec les notations de la proposition 2.2, on suppose* $d \geq 3$. *Pour tout réel* X *suffisamment grand, il existe un polynôme non nul*

$$P_X^{(1)} \in \mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_{q-1}] \text{ , vérifiant } \quad t(P_X^{(1)}) \leq X_2 \text{ ,}$$

et

$$\operatorname{Log} |P_X^{(1)}(x_1, \ldots, x_{q-1})| \leq -c_{17} X^{\frac{d+1}{2}} (\operatorname{Log} X)^{\frac{1}{2}} .$$

Démonstration. On suppose que le résultat est faux, et on reprend la démonstration de la proposition 2.2, en distinguant deux cas.

Cas a) : $$\operatorname{Log} \max_{|h| \leq c_{15} H_X} |F(h.\beta)| \leq -(c_{14} + 1) H_X^d \operatorname{Log} X .$$

On déduit alors de (2.3) :

$$\operatorname{Log} \max_{(\lambda,\mu)} |\varphi(\lambda,\mu)| \leq -H_X^d \operatorname{Log} X .$$

Comme les $\varphi(\lambda,\mu)$ sont premiers entre eux dans leur ensemble, en utilisant la technique du résultant, on obtient une contradiction.

Cas b) : $$\operatorname{Log} \max_{|h| \leq c_{15} H_X} |F(h.\beta)| > -(c_{14} + 1) H_X^d \operatorname{Log} X .$$

On commence par se ramener au cas où l'élément $\xi_X = P_X^{(o)}(x_1, \ldots, x_q)$ construit à la proposition 2.2 vérifie

$$-c_{18}X^{\frac{d+1}{2}}(\operatorname{Log} X)^{\frac{1}{2}} \leq \operatorname{Log}|\xi_X| \leq -c_9 X^{\frac{d+1}{2}}(\operatorname{Log} X)^{\frac{1}{2}} .$$

On considère ensuite l'élément $\xi_Y = P_Y^{(o)}(x_1,\ldots,x_q)$ avec

$$Y = [\tfrac{1}{\varepsilon} X^2 t_X^{-1}] ,$$

où $\varepsilon = (c_9/8c_{18})^{2/(d-1)}$, et $t_X = t(\xi_X)$. On a

$$\operatorname{Log}|\xi_Y| \leq -c_9 Y^{\frac{d+1}{2}}(\operatorname{Log} Y)^{\frac{1}{2}} \leq -c_9 X^{\frac{d+1}{2}}(\operatorname{Log} X)^{\frac{1}{2}} ,$$

et

$$t(\xi_X)\ t(\xi_Y) \leq \tfrac{1}{\varepsilon} X^2 .$$

Comme $d \geq 3$, on en déduit que le résultant de ξ_X et ξ_Y par rapport à x_q est nul. Supposons pour simplifier que ξ_X et ξ_Y sont des puissances d'un même polynôme irréductible $\eta \in \mathcal{L}_q$:

$$\xi_X = \eta^{\sigma_X} , \qquad \xi_Y = \eta^{\sigma_Y} .$$

On a

$$\frac{-\operatorname{Log}|\xi_X|}{-\operatorname{Log}|\xi_Y|} = \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \geq \frac{1}{4}\cdot\frac{t(\xi_X)}{t(\xi_Y)} ,$$

d'où

$$X^{\frac{d-3}{2}} \leq \varepsilon^{\frac{d-1}{2}} \cdot \frac{4c_{18}}{c_9} \cdot t_X^{\frac{d-3}{2}} ,$$

ce qui est impossible avec notre choix de ε .

Pour que la démonstration de la proposition 3.2 soit complète, il reste quelques points à préciser : expliciter la technique du résultant dans le premier cas, justifier la minoration de ξ_X et l'hypothèse que ξ_X et ξ_Y sont des puissances de polynômes irréductibles dans le deuxième cas. Ces questions sont résolues dans le lemme suivant :

Lemme 3.3.- Soit q un nombre entier, $q \geq 2$, et soient λ , s deux nombres réels, avec $\lambda \geq 50q$, $s \geq 1$. Soient $x_1,\ldots,x_q$ des nombres complexes algébriquement indépendants. On suppose que, pour tout polynôme non nul $R \in \mathbb{Z}[z_1,\ldots,z_{q-1}]$, de taille inférieure ou égale à $8qs$, on a

$$\operatorname{Log}|R(x_1,\ldots,x_{q-1})| \geq -\frac{\lambda}{8} s^2 .$$

1) Si $P \in \mathbb{Z}[z_1,\ldots,z_q]$ est un polynôme non nul vérifiant $t(P) \leq s$ et

488-10

$$\mathrm{Log}|P(x_1,\ldots,x_q)| < -\lambda\, s^2 ,$$

il existe un diviseur Q *de* P , *puissance d'un polynôme irréductible dans* $\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_q]$, *tel que* $t(Q) \leq (q+1)s$ *et*

$$\mathrm{Log}|Q(x_1,\ldots,x_q)| \leq -\frac{\lambda}{3}\, s^2 .$$

2) *Soit* ξ *un nombre complexe, entier algébrique sur* $\mathfrak{L}_q = \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_q]$, *de degré* δ , *dont le polynôme minimal sur* $\mathfrak{L}_q$ *a une taille* $\leq s$. *Soit* $\mu > \lambda$; *on suppose :*

$$-\mu\, s^2 \leq \mathrm{Log}|\xi| \leq -\lambda\, s^2 .$$

Alors il existe un polynôme irréductible $S \in \mathfrak{L}_q$, *et un entier* $m \geq 1$, *tels que* S^m *divise la norme de* ξ *dans* $\mathfrak{L}_q$, *et que*

$$-3\,\delta\,\mu\, s^2 \leq \mathrm{Log}|S(x_1,\ldots,x_q)| \leq -\frac{1}{6m}\,\lambda\, s^2 .$$

(La démonstration du lemme 3.3 repose sur les arguments de [3a] ; voir par exemple [10b] lemmes 2.4 et 2.8.)

La méthode que nous venons d'exposer a été utilisée par D. BROWNAWELL [1c] pour montrer l'indépendance algébrique des nombres a , a^{β} , a^{β^2} , quand β est irrationnel cubique, et que a est un nombre transcendant (de Liouville) qui s'approche très bien par des nombres algébriques (voir à ce sujet [1b , 1d]).

§ 4. *La deuxième méthode de* ČUDNOVSKIĬ. *Indépendance algébrique de n nombres*

ČUDNOVSKIĬ a généralisé son théorème 3.1 de la manière suivante [3b , 3c] :

THÉORÈME 4.1.- *Soient* α , β *deux nombres algébriques, avec* $\alpha \neq 0$, $\log \alpha \neq 0$; *notons* d *le degré de* β *sur* $\mathbb{Q}$; *soit* n *un entier,* $n \geq 2$. *Si* $d \geq 2^n - 1$, *alors le degré de transcendance sur* $\mathbb{Q}$ *du corps* $\mathbb{Q}(\alpha^{\beta},\ldots,\alpha^{\beta^{d-1}})$ *est supérieur ou égal à* n .

Avec les notations précédentes, ce résultat s'énonce :

$$q \geq \left[\frac{\mathrm{Log}(d+1)}{\mathrm{Log}\,2}\right] \qquad \text{pour} \quad d \geq 2 .$$

En particulier q tend vers l'infini quand d tend vers l'infini, résultat qui n'était même pas connu avant ČUDNOVSKIĬ.

Le théorème 4.1 provient de la généralisation suivante des propositions 2.2 et 3.2.

PROPOSITION 4.2.- Soit $(x_1,\dots,x_q)$ une base de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps $K = \mathbb{Q}(\alpha^\beta,\dots,\alpha^{\beta^{d-1}})$, et soit k un entier, $0 \le k \le q$; on suppose $d \ge 2^{k+1} - 1$, et $d \ge 2$. Pour tout réel X suffisamment grand, il existe un polynôme non nul $P_X^{(k)} \in \mathbb{Z}[z_1,\dots,z_{q-k}]$, vérifiant

$$t(P_X^{(k)}) \le X^{2^k},$$

et

$$\mathrm{Log}|P_X^{(k)}(x_1,\dots,x_{q-k})| \le -c_{19} X^{\frac{d+1}{2}} (\mathrm{Log}\, X)^{\frac{1}{2}}.$$

On déduit immédiatement de cette proposition 4.2 l'inégalité $k \le q - 1$, ce qui donne le théorème 4.1.

La démonstration de la proposition 4.2 se fait par récurrence sur k ; nous l'avons démontrée pour $k = 0$ (proposition 2.2) et pour $k = 1$ (proposition 3.2). Pour simplifier les notations, nous allons la démontrer pour $k = 2$, mais les arguments que nous emploierons permettent de démontrer le cas général [3c]. Nous effectuons la démonstration par l'absurde : supposons que la proposition 4.2 soit fausse pour $k = 2$: on choisit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit ; il existe X (que l'on peut supposer entier et suffisamment grand) tel que, pour tout polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[z_1,\dots,z_{q-2}]$, de taille majorée par $8qX^4$, on ait :

$$\mathrm{Log}|P(x_1,\dots,x_{q-2})| > -\frac{1}{\varepsilon} X^{\frac{d+1}{2}} (\mathrm{Log}\, X)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.3}$$

Cet entier X est désormais fixé.

Lemme 4.4.- Il existe deux nombres complexes ξ_{q-1}, ξ_q, algébriques sur $\mathbb{Q}(x_1,\dots,x_{q-2})$, et il existe deux entiers positifs s_{q-1}, s_q, vérifiant

$$s_{q-1} \le c_{20} X^2, \quad s_q \le c_{21} X,$$

tels que

$$\mathrm{Log}|\xi_{q-1} - x_{q-1}| \le -c_{22} X^{\frac{d+1}{2}} (\mathrm{Log}\, X)^{\frac{1}{2}} s_{q-1}^{-1},$$

$$\mathrm{Log}|\xi_q - x_q| \le -c_{23} X^{\frac{d+1}{2}} (\mathrm{Log}\, X)^{\frac{1}{2}} s_{q-1}^{-1} s_q^{-1}.$$

De plus la taille de ξ_{q-1} par rapport à $\{x_1,\dots,x_{q-2}\}$ est majorée par $c_{24}X^2$ et la taille de ξ_q par rapport à $\{x_1,\dots,x_{q-2},\xi_{q-1}\}$ est majorée par $c_{25}X$.

Démonstration du lemme 4.4 (d'après [3c] lemme 5.2). Utilisons le polynôme $P_X^{(1)}$ construit à la proposition 3.2 ; grâce à (4.3), les hypothèses du lemme 3.3 sont satisfaites (avec q remplacé par $q-1$), avec $s = X^2$, et

$$\lambda = c_{17} X^{\frac{d+1}{2}-4} (\operatorname{Log} X)^{\frac{1}{2}} .$$

Donc il existe un polynôme irréductible $R \in \mathbb{Z}[z_1,\dots,z_{q-1}]$ et un entier $s_{q-1} \geq 1$ tels que $R^{s_{q-1}}$ divise $P_X^{(1)}$ et que

$$\operatorname{Log}|R(x_1,\dots,x_{q-1})| \leq -\frac{c_{17}}{3} X^{\frac{d+1}{2}} (\operatorname{Log} X)^{\frac{1}{2}} s_{q-1}^{-1} .$$

Comme le polynôme $R_1(z) = R(x_1,\dots,x_{q-2},z)$ prend une valeur petite au point $z = x_{q-1}$, on en déduit que x_{q-1} est proche d'une racine de R_1 (grâce à (4.3), R_1 n'est pas constant). Plus précisément, on trouve une racine ξ_{q-1} de R_1 telle que

$$\operatorname{Log}|\xi_{q-1} - x_{q-1}| \leq -c_{22} X^{\frac{d+1}{2}} (\operatorname{Log} X)^{\frac{1}{2}} s_{q-1}^{-1} . \tag{4.5}$$

Utilisons maintenant la proposition 2.2 ; on définit un réel Y, $Y \leq X$, par

$$Y^{\frac{d+1}{2}} (\operatorname{Log} Y)^{\frac{1}{2}} s_{q-1} = X^{\frac{d+1}{2}} (\operatorname{Log} X)^{\frac{1}{2}} ;$$

le polynôme $P_Y^{(o)} \in \mathbb{Z}[z_1,\dots,z_q]$ vérifie

$$t(P_Y^{(o)}) \leq Y \leq X ,$$

et

$$\operatorname{Log}|P_Y^{(o)}(x_1,\dots,x_q)| \leq -c_9 X^{\frac{d+1}{2}} (\operatorname{Log} X)^{\frac{1}{2}} s_{q-1}^{-1} .$$

Grâce à (4.5), on a aussi

$$\operatorname{Log}|P_Y^{(o)}(x_1,\dots,x_{q-2},\xi_{q-1},x_q)| \leq -c_{26} X^{\frac{d+1}{2}} (\operatorname{Log} X)^{\frac{1}{2}} s_{q-1}^{-1} .$$

Le cas "dégénéré" où $P_Y^{(o)}(x_1,\dots,x_{q-2},\xi_{q-1},x_q)$ est nul fait l'objet d'un traitement particulier. Sinon, l'argument précédent permet de construire un entier $s_q \geq 1$ et un nombre complexe ξ_q qui vérifient les estimations du lemme 4.4.

Nous poursuivons la démonstration de la proposition 4.2. Notons

$$\mathcal{L}_{q-2} = \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_{q-2}] , \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_q' = \mathcal{L}_{q-2}[\xi_{q-1},\xi_q] .$$

Le corps $K = \mathbb{Q}(\alpha, \alpha^\beta, \dots, \alpha^{\beta^{d-1}})$ est une extension algébrique finie de

$K_o = \mathbb{Q}(x_1,\ldots,x_q)$; dans le seul but de simplifier les notations, nous supposerons $K = K_o$, et β entier sur $\mathbb{Z}$.

L'idée consiste à remarquer que les éléments de K peuvent être très bien approchés par des éléments de $\mathbb{Q}(x_1,\ldots,x_{q-2},\xi_{q-1},\xi_q)$, et que d'autre part on sait minorer certains éléments non nuls de ce deuxième corps, grâce à (4.3).

Pour $h \in \mathbb{Z}^d$, $\mu \in \mathbb{Z}^d$, on a $\alpha^{(\mu.\beta)(h.\beta)} \in K$; notons $S_{\mu,h}$ et $T_{\mu,h}$ deux polynômes de $\mathbb{Z}[z_1,\ldots,z_q]$ dont les images $\bar{S}_{\mu,h}$ et $\bar{T}_{\mu,h}$ dans $\mathfrak{L}'_q$ vérifient

$$\mathrm{Log}\left|\alpha^{(\mu.\beta)(h.\beta)} - \frac{\bar{S}_{\mu,h}}{\bar{T}_{\mu,h}}\right| \leq -c_{28} X^{\frac{d+1}{2}} (\mathrm{Log}\, X)^{\frac{1}{2}} s_{q-1}^{-1} s_q^{-1} .$$

Soit Y le nombre réel positif défini par

$$Y^{\frac{d+1}{2}} (\mathrm{Log}\, Y)^{\frac{1}{2}} = c_{29} X^{\frac{d+1}{2}} (\mathrm{Log}\, X)^{\frac{1}{2}} s_{q-1}^{-1} s_q^{-1} ,$$

où c_{29} est convenablement choisi. On reprend le schéma traditionnel.

Premier pas. On construit une fonction auxilaire

$$f(z) = \sum_{\lambda=0}^{L_Y} \sum_{|\mu|\leq M_Y} \bar{C}_{\lambda,\mu} z^\lambda \alpha^{(\mu.\beta)z} ,$$

avec $\bar{C}_{\lambda,\mu} \in \mathfrak{L}'_q$, non tous nuls, de telle manière que

$$\mathrm{Log}|f(h.\beta)| \leq -c_{30} Y^{\frac{d+1}{2}} (\mathrm{Log}\, Y)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{pour } |h| \leq H_Y .$$

Pour cela, on construit des polynômes $C_{\lambda,\mu} \in \mathbb{Z}[z_1,\ldots,z_q]$, tels que les fonctions rationnelles

$$\sum_\lambda \sum_\mu C_{\lambda,\mu}(h.\beta)^\lambda . \frac{S_{\mu,h}}{T_{\mu,h}} \in \mathbb{Q}(\beta)(z_1,\ldots,z_q)$$

soient nulles pour tout $|h| \leq H_Y$. On choisit ensuite $\bar{C}_{\lambda,\mu} = C_{\lambda,\mu}(x_1,\ldots,x_{q-2},\xi_{q-1},\xi_q)$. (Les détails sont en fait plus complexes : cf. [3c].)

Deuxième pas. La majoration (2.3) devient :

$$\mathrm{Log} \max_{(\lambda,\mu)} |\bar{C}_{\lambda,\mu}| \leq c_{31} H_Y^d \,\mathrm{Log}\, Y + \mathrm{Log} \max_{|h|\leq c_{32} H_Y} |f(h.\beta)| .$$

Troisième pas. On distingue maintenant deux cas :

cas a) : $\mathrm{Log} \max_{|h|\leq c_{32} H_Y} |f(h.\beta)| \leq -(c_{31}+1) H_Y^d \,\mathrm{Log}\, Y .$

488-14

On considère alors les normes des $\bar{C}_{\lambda,\mu}$ sur $\mathfrak{L}_{q-2}$; l'une de ces normes permet de contredire (4.3). (Voir [3c] lemmes 4.11 à 4.16, et [1c] step 3.)

cas b) : il existe $h \in \mathbb{Z}^d$, $|h| \leq c_{32} H_Y$, tel que

$$\mathrm{Log}|f(h.\beta)| > -(c_{31}+1)\, H_Y^d \,\mathrm{Log}\, Y .$$

Dans ce cas le nombre

$$\gamma = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \bar{C}_{\lambda,\mu} (h.\beta)^{\lambda} . \frac{\bar{S}_{\mu,h}}{\bar{T}_{\mu,h}} ,$$

qui est très proche de $f(h.\beta)$, n'est pas nul ; il est aussi très petit, car on obtient, en utilisant une formule d'interpolation,

$$\mathrm{Log}|f(h.\beta)| \leq -c_{33} H_Y^d \,\mathrm{Log}\, Y .$$

Alors la norme de γ sur $\mathfrak{L}_{q-2}$ permet de contredire l'hypothèse (4.3).

Nous n'avons présenté qu'un cas particulier des énoncés de [3b, 3c]. Le résultat général est le suivant : soient $u_1,\ldots,u_\ell$ (resp. $v_1,\ldots,v_m$) des nombres complexes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants ; on suppose qu'il existe $\tau > 0$ tel que, pour tout $h \in \mathbb{Z}^\ell$, $h \neq 0$, et tout $k \in \mathbb{Z}^m$, $k \neq 0$, on ait

$$|h_1 u_1 + \ldots + h_\ell u_\ell| \geq \exp\{-\tau \max_{1 \leq \lambda \leq \ell} |h_\lambda|\} ,$$

et

$$|k_1 v_1 + \ldots + k_m v_m| \geq \exp\{-\tau \max_{1 \leq \mu \leq m} |k_\mu|\} .$$

On considère les trois ensembles

$$S_1 = \{\exp(u_\lambda v_\mu) \ ; \ 1 \leq \lambda \leq \ell \ , \ 1 \leq \mu \leq m\} ,$$

$$S_2 = \{u_\lambda \ , \ \exp(u_\lambda v_\mu) \ ; \ 1 \leq \lambda \leq \ell \ , \ 1 \leq \mu \leq m\} ,$$

$$S_3 = \{u_\lambda \ , \ v_\mu \ , \ \exp(u_\lambda v_\mu) \ ; \ 1 \leq \lambda \leq \ell \ , \ 1 \leq \mu \leq m\} ,$$

et les trois nombres

$$\varkappa_1 = \ell m/(\ell+m) \quad ; \quad \varkappa_2 = \ell(m+1)/(\ell+m) \quad ; \quad \varkappa_3 = \varkappa_1 + 1 .$$

Ainsi, dans la situation des théorèmes 2.1, 3.1 et 4.1, on a $\ell = m = d$, $u_\lambda = \beta^{\lambda-1}$, $(1 \leq \lambda \leq \ell)$, $v_\mu = \beta^{\mu-1} \log \alpha$, $(1 \leq \mu \leq m)$, et $\varkappa_2 = (d+1)/2$.

THÉORÈME 4.6 [3b, 3c].- *Si* $\varkappa_i \geq 2^n$ (*resp.* $\varkappa_3 > 2^n$ *pour* $i = 3$), *alors dans l'ensemble* S_i, *il y a* $n+1$ *nombres algébriquement indépendants.*

La méthode est effective et permet de donner des mesures d'indépendance algébrique [3b].

§ 5. Suites colorées

L'inégalité $d \geq 2^n - 1$ du théorème 4.1 semble constituer la limite naturelle de la méthode précédente : le résultant de deux polynômes a pour taille approximativement le produit des tailles de ces polynômes, ce qui explique l'exposant 2^k de la proposition 4.2.

Le problème, nous l'avons vu, se réduit à l'investigation d'un système de polynômes $P_N \in \mathbb{Z}[z_1,\ldots,z_q]$, où $t(P_N) \leq N$, et où

$$\mathrm{Log}|P_N(x_1,\ldots,x_q)| \leq -N^{\kappa} (\mathrm{Log}\ N)^{\gamma} \quad .$$

De plus la partie analytique de la démonstration fournit des propriétés supplémentaires de ce système.

Jusqu'à présent, la seule technique utilisée dans cette situation était celle du résultant. Récemment, ČUDNOVSKIĬ a commencé à remplacer cette technique par la théorie des idéaux d'un anneau de polynômes, ou, de manière équivalente, par la théorie des courbes algébriques. Les préliminaires pour appliquer les méthodes de la géométrie algébrique sont donnés dans [3f]. Le résultat principal en est le suivant :

THÉORÈME 5.1 [3f].- *Soient* θ_1 , θ_2 *deux nombres complexes, et* τ *un nombre réel,* $\tau \geq 2$, *tel que* $\mathbb{Q}(\theta_1)$ *ait un type de transcendance inférieur ou égal à* τ . *On suppose qu'il existe une suite* $(P_N)_{N \geq 1}$ *de polynômes non nuls de* $\mathbb{Z}[z_1,z_2]$ *tels que*

$$t(P_N) \leq N$$

et

$$|P_N(\theta_1,\theta_2)| < \exp(-N^{\tau+2}\ \varphi(N)) \ ,$$

où $\varphi(N)$ *tend vers l'infini avec* N .

Alors θ_1 *et* θ_2 *sont algébriquement dépendants.*

Cet énoncé améliore un résultat antérieur de D. BROWNAWELL [1a] theorem 4.3, où $\tau+2$ était remplacé par 2τ .

La fin de cet exposé est extraite d'une lettre de G. V. ČUDNOVSKIĬ (mai 1976).

Les méthodes actuelles permettent de donner des estimations du type de transcendance pour des corps de la forme

$$\mathbb{Q}(u_i\ ,\ v_j\ ,\ \wp(u_i v_j)) \ , \quad \mathbb{Q}(v_j\ ,\ \wp(u_i v_j)) \ ,\ldots \quad .$$

En combinant ces résultats avec des considérations de [3f], de telles estimations du type τ peuvent être améliorées pour $\tau > 2$. On peut donner de nombreux exemples ; ainsi :

PROPOSITION 5.2.- Si $\wp$ est une fonction elliptique d'invariants g_2 , g_3 algébriques, si $\wp$ a la multiplication complexe par K , et si α est un nombre algébrique de degré 4 avec $[K(\alpha):K] = 4$, et si ω est une période non nulle de $\wp$, alors deux des trois nombres $\wp(\omega\alpha)$, $\wp(\omega\alpha^2)$, $\wp(\omega\alpha^3)$ sont algébriquement indépendants.

Les énoncés de [3f] ont un caractère combinatoire et ne donnent pas directement de résultats généraux, mais en combinant de nouvelles suites de polynômes avec le théorème de Bezout et une analyse simple de singularités utilisant des résultants, on obtient :

PROPOSITION 5.3.- Sous les hypothèses du théorème 4.6, si $\kappa_i \geq 3{,}5$ (resp. $\kappa_3 > 3{,}5$ dans le cas $i = 3$) , alors le degré de transcendance du corps $\mathbb{Q}(S_i)$ est supérieur ou égal à 3 .

Ce résultat peut être amélioré ; ainsi :

PROPOSITION 5.4.- Si $\alpha \neq 0, 1$ est un nombre algébrique, et si β est algébrique de degré 5 , alors trois des 4 nombres $\alpha^{\beta}, \ldots, \alpha^{\beta^4}$ sont algébriquement indépendants.

Pour obtenir ce résultat, il était nécessaire de donner une bonne estimation pour la distance entre le point $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\max\{|P(x,y)|, Q(x,y)|\} < \varepsilon$, et la variété de dimension 0 : $\{P(x,y) = 0, Q(x,y) = 0\}$, en fonction de $t(P)$, $t(Q)$ et ε . Le cas le plus compliqué est celui où les points ont une multiplicité élevée sur la variété (c'est-à-dire un ordre de multiplicité élevé pour les solutions du système d'équations $P(x,y) = 0$, $Q(x,y) = 0$). En utilisant l'analogue jacobien, on obtient :

PROPOSITION 5.5.- Sous les hypothèses du théorème 4.6, si $\kappa_i > 3$, alors le degré de transcendance de $\mathbb{Q}(S_i)$ est supérieur ou égal à 3 .

En étudiant la multiplicité de points singuliers sur des variétés de dimension n , on généralise ce résultat au cas de degré de transcendance supérieur à n .

Actuellement, pour n grand, on a le résultat intéressant suivant :

PROPOSITION 5.6.- Si $\varkappa_i > n + 2$, le degré de transcendance de $\mathbb{Q}(S_i)$ est supérieur ou égal à n .

Il est encore difficile de réduire cette estimation à $\varkappa_i \geq n$ pour tout n .

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. BROWNAWELL - a) Gel'fond's method for algebraic independence, Trans. Amer. Math. Soc., 210 (1975), 1-26.

b) (and M. WALDSCHMIDT) - The algebraic independence of certain numbers to algebraic powers, Acta Arith., 32 (1976), 63-71.

c) On the Gel'fond-Fel'dman measure of algebraic independence, Proceedings of a Conference on "Transcendence Theory and its Applications", held at Cambridge in Lent term 1976, to appear (preprint, 21p.).

d) Pairs of polynomials small at a number to certain algebraic powers, Séminaire DELANGE, PISOT, POITOU, 17e année (1975/76) n° 11.

[2] J. COATES - Linear relations between $2\pi i$ and the periods of two elliptic curves, in "Diophantine approximations and its applications" (ed. by C. F. Osgood), Academic Press (1973), 77-99.

[3] G. V. ČUDNOVSKIĬ (CHOODNOVSKY) - a) Algebraic independence of some values of the exponential function, [en russe], Mat. Zametki, 15 (1974), 661-672 ; [en anglais], Math. Notes, 15 (1974), 391-398.

b) A mutual transcendence measure for some classes of numbers, [en russe], Dokl. Akad. Nauk SSSR, 218 (1974), 771-774 ; [en anglais], Soviet Math. Dokl., 15 (1974), 1424-1428.
{cf. Proc. of all Union Conference on Number Theory, Vilnius, (1974), 304-305.}

c) Some analytical methods in the theory of transcendental numbers, [en russe], Institute of Mathematics Ukrainian SSR Academy of Sciences, Preprint IM - 74 - 8, Kiev (1974), 48 p. ; Analytic methods in diophantine approximations, id., IM - 74 - 9, Kiev (1974), 52 p.

d) The Gelfond Baker method in problems of diophantine approximation, [en anglais], Colloquium on Number Theory (Bolyai Janos Math. Soc.), Debrecen, Oct. 1974 (Proceedings of the conference : North. Holland Publ. Company).
{cf. Uspekhi Mat. Nauk, 31 (1976), n° 4.}

e) Algebraic independence of constants connected with the functions of analysis, [en anglais], Preprint, 8 p.
{cf. Notices of the AMS, 22 (1975), A486 ; Dokl. Ukrainian SSR Academy of Sciences (1976), n° 8, 4p.}

f) Towards the Schanuel Hypothesis ; algebraic curves near the point. Part I : general theory of coloured sequences, (33 p.). Part II : fields of finite type of transcendence and coloured sequences ; resultants, (23 p.), [en russe ; résumé en anglais], Preprint, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, à paraître.

[4] N. I. FEL'DMAN - Approximation of certain transcendental numbers, I, the approximation of logarithms of algebraic numbers, [en russe], Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 15 (1951), 53-74 ; [en anlais], Amer. Math. Soc. Transl., (2) 59 (1966), 224-245.

[5] A. O. GEL'FOND - Transcendental and algebraic numbers, [en russe], GITTL, Moscou (1952) ; [en anglais], Dover, New York (1960).

[6] S. LANG - Introduction to transcendental numbers, Addison Wesley (1966).

[7] D. W. MASSER - Elliptic functions and transcendence, Lecture Notes in Math., 437 (1975), Springer Verlag.

[8] Th. SCHNEIDER - Einführung in die transzendenten Zahlen, [en allemand], Springer (1957) ; [en français], Gauthier-Villars (1959).

[9] R. TIJDEMAN - An auxiliary result in the theory of transcendental numbers ; J. Number Theory, 5 (1973), 80-94.

[10] M. WALDSCHMIDT - a) Nombres transcendants ; Lecture Notes in Math., 402 (1974), Springer Verlag.

b) Indépendance algébrique par la méthode de G. V. Čudnovskiĭ, Séminaire DELANGE, PISOT, POITOU (Groupe d'étude de théorie des nombres) 16e année (1974/75), n° G 8, 18 p.