LUCIEN SZPIRO

Cohomologie des ouverts de l'espace projectif sur un corps de caractéristique zéro

Séminaire N. Bourbaki, 1976, exp. n° 458, p. 81-96

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1974-1975__17__81_0>

COHOMOLOGIE DES OUVERTS DE L'ESPACE PROJECTIF SUR UN CORPS DE CARACTÉRISTIQUE ZÉRO

[d'après A. OGUS]

par Lucien SZPIRO

0. Présentation

Soit V un sous-schéma fermé de l'espace projectif $\mathbb{P}^n_k$, où k est un corps de caractéristique zéro. Il s'agit ici de comparer les différents groupes de cohomologie associés à V et à $\mathbb{P}^n_k$. Par exemple, si V est une hypersurface non singulière de $P = \mathbb{P}^n_{\mathbf{C}}$, un théorème de Lefschetz assure que :

a) $H^i(P, \mathbf{Z}) \to H^i(V, \mathbf{Z})$ est un isomorphisme si $i < \dim V$;

b) si $n \geq 3$, alors $\pi_1(V) = 0$;

c) si $n \geq 4$, $\mathrm{Pic}(P) \to \mathrm{Pic}(V)$ est un isomorphisme.

Ce théorème a été généralisé par W. Barth [2] en 1970 à des sous-variétés qui ne sont plus forcément intersection complète.

THÉORÈME (W. Barth [2]).- *Soit* V *une sous-variété non singulière, de dimension* d *, de* $P = \mathbb{P}^n_{\mathbf{C}}$ *, alors* $H^i(P, \mathbf{C}) \to H^i(V, \mathbf{C})$ *est un isomorphisme pour* $i \leq 2d - n$.

Notons que la conclusion n'est non vide que si $d \geq n/2$. Si $d = n/2$, on obtient le théorème de la dimension des intersections. Si $d = n - 1$, on est de nouveau en présence du théorème de Lefschetz avec coefficients dans $\mathbf{C}$. Le premier cas intéressant est $d = 3$ et $n = 5$. On voit ainsi qu'une variété abélienne de dimension 3 n'est pas plongeable dans $\mathbb{P}^5$. Cet énoncé peut se déduire d'un calcul aisé des classes de Chern du faisceau normal à une telle variété. C'est cette idée qui est utilisée dans un récent travail de A. Holme [10]. Il donne une condition nécessaire et suffisante, pour qu'une sous-variété lisse de $\mathbb{P}^N$ reste lisse quand on la projette dans $\mathbb{P}^n$, $n < N$. Cette condition s'exprime par l'annulation de polynômes universels en les classes de Chern de la variété considérée.

Remarquons que R. Hartshorne a donné dans [7] une démonstration élégante et courte du théorème de W. Barth comme corollaire du théorème, dit difficile, de S. Lefschetz. D'autre part, Larsen, utilisant la méthode de W. Barth, montre le même résultat pour la cohomologie entière [12].

Nous présentons ici une démonstration purement algébrique du théorème de W. Barth due à A. Ogus. La méthode utilisée a entre autres avantages, celui d'obtenir le résultat pour les variétés localement intersection complète (et non plus lisse) et de prouver, au passage, une conjecture [3] d'A. Grothendieck :

les groupes $H^i(P-V, F)$ sont des espaces vectoriels de dimension finie sur k, pour tout faisceau cohérent F sur P et tout i plus grand ou égal à $\operatorname{codim}(V)$.

En fait, on réussit à comparer les différents groupes suivants :

(i) cohomologie de De Rham de V ;

(ii) cohomologie des faisceaux cohérents sur $P - V$;

(iii) cohomologie des faisceaux cohérents sur le complété formel $\hat{P}$ de P le long de V ;

(iv) cohomologie de l'ouvert correspondant du spectre de l'anneau local du sommet du cône au-dessus de P.

Rappelons : tout ici sera de caractéristique zéro, en particulier, les applications que nous donnerons aux groupes de Poincaré et de Picard ne seront valables que dans ce cadre. (Cf. l'exposé n° 453 de J.-F. Boutot dans le présent séminaire.)

Le lecteur averti verra, tant dans la présentation que dans les développements, l'influence de R. Hartshorne. Ce texte doit beaucoup à deux de ses écrits "semi-pirates" [7], [8].

1. Le théorème de finitude

Nous donnons ici la démonstration du théorème de finitude, invoqué plus haut et précisé plus bas. On ne s'étonnera pas que dans la preuve d'un tel théorème on utilise beaucoup de dualités : le principe sous-jacent étant qu'un espace vectoriel, sur un corps, est de dimension finie, si et seulement si, il est canoniquement isomorphe à son bidual.

1.1 Enoncé projectif et énoncé local

THÉORÈME 1 (A. Ogus).- Soit $R = k[[X_1,\dots,X_n]]$ un anneau de séries formelles de dimension n sur un corps de caractéristique nulle. Soit $\mathfrak{I}$ un idéal de R.

Nous posons :

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= \text{l'idéal maximal de } R\,, \\ X &= \operatorname{Spec}(R)\,, \quad U = X - \{\mathfrak{m}\}\,, \\ Y &= \operatorname{Spec}(R/I)\,, \quad V = Y - \{\mathfrak{m}\}\,. \end{aligned}$$

Supposons que V soit localement intersection complète dans U de pure codimension d. Alors $H^i_{\mathfrak{I}}(M)$ est un R-module artinien pour tout R-module de type fini M et pour tout $i > d$.

On a le même théorème si R est seulement un anneau local régulier d'équicaractéristique zéro. Par passage à l'anneau local du sommet du cône, on obtient l'énoncé suivant :

THÉORÈME 1' .- Soit V un sous-schéma fermé de l'espace projectif $P = \mathbb{P}^n_k$ sur un corps de caractéristique zéro. Supposons que V soit localement intersection complète et purement de codimension d. Alors, pour tout faisceau cohérent F sur P, on a :

(a) $\dim_k(H^i(P-V, F)) < \infty$ si $i \geq d$;

(b) $H^i(P-V, F(\nu)) = 0$ si $\nu \gg 0$ et $i \geq d$.

On verra que l'énoncé local est très utile, dans le cas projectif, pour savoir ce qui se passe avec les anneaux locaux des points de V. Le reste de ce paragraphe est dévolu à la démonstration du théorème 1.

1.2 Traduction en termes de schémas formels [14]

Par définition, $H^i_{\mathfrak{I}}(R) = \varinjlim_s \operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{I}^s, R)$. Par dualité locale, on a :

$\operatorname{Hom}(H^i_{\mathfrak{I}}(R), E) = \varprojlim_s H^{n-i}_{\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{I}^s)$ où E est l'enveloppe injective du corps résiduel de R. [Rappelons que $\operatorname{Hom}(\cdot, E) = \operatorname{Hom}(\cdot, k)$ sur les modules de longueur finie.]
On reconnaît à droite de l'égalité la cohomologie locale du complété formel de X

le long de Y , à support au point fermé. Le théorème 1 est donc équivalent au suivant :

THÉORÈME 1" .- <u>Avec les hypothèses et les notations du th. 1</u>, <u>posons</u> :

$\hat{X}$ = le complété formel de X le long de Y ,

$\hat{U}$ = le complété formel de U le long de V .

<u>Alors</u>, <u>les groupes</u> $H^i_{\mathfrak{m}}(\mathcal{O}_{\hat{X}})$ <u>et</u> $H^j(\hat{U},\mathcal{O}_{\hat{U}})$ <u>sont des</u> R-<u>modules de type fini pour</u> $i \leq n-d$ <u>et</u> $j < n-d$.

Si, dans ce dernier énoncé, nous n'avons qu'une conclusion relative à $\mathcal{O}_{\hat{X}}$ ou $\mathcal{O}_{\hat{U}}$ et non à tout faisceau cohérent sur X ou U , c'est qu'une se déduit de l'autre par un aisé dévissage.

1.3 <u>La cohomologie de De Rham d'un anneau local complet en caractéristique nulle</u>

Soit R l'anneau de séries formelles du th. 1 et soit $A = R/I$. R. Hartshorne définit dans [4], [5], la <u>cohomologie de De Rham de</u> A de la façon suivante : soit $\Omega^{\cdot}$ le complexe de De Rham de R , par définition la cohomologie de De Rham de A , que l'on notera $H^i_{\mathfrak{m}}(Y)$, sera l'hypercohomologie $H^{\cdot}_{\mathfrak{m}}(\hat{X}, \hat{\Omega}^{\cdot})$ du complexe $\hat{\Omega}^{\cdot}$ sur la complétion formelle $\hat{X}$ de X le long de Y .

THÉORÈME (R. Hartshorne, P. Monsky).- <u>Les groupes de cohomologie de De Rham</u> $H^i_{\mathfrak{m}}(Y)$ <u>sont des espaces vectoriels de dimension finie sur</u> $\mathbf{k}$.

Indiquons brièvement l'idée de la démonstration qu'on trouve dans [5].

On démontre le théorème quand A est régulier, ensuite, grâce à la résolution des singularités de H. Hironaka et à des suites exactes appropriées pour un éclatement, on se ramène au cas régulier. On aura, bien entendu, pris soin auparavant de définir mimétiquement la cohomologie de De Rham à support, pour un schéma d'équicaractéristique zéro, immergé globalement dans un schéma régulier. Notons qu'<u>a priori</u> ces groupes dépendent de l'immersion choisie. Nous ferons cependant assez pour montrer que le rang de ceux qui nous intéresseront est indépendant de ce choix.

On peut donner la description suivante de ces groupes de cohomologie de De Rham : Soit T un espace analytique complexe, et soit t un point de T. Si ε est assez petit pour que, si B_ε est la boule de centre t et de rayon ε, $B_\varepsilon \cap T$ soit contractible, on ait la suite exacte suivante :

$$0 \to H_t^0(T) \to \mathbf{C} \to H^0(B_\varepsilon \cap T - t, \mathbf{C}) \to H_t^1(T) \to 0$$

et les isomorphismes, pour $i \geq 1$:

$$H_t^i(T) \simeq H^{i-1}(B_\varepsilon \cap T - t, \mathbf{C})$$

où on a posé $H_t^i(T) = H_t^i(\hat{\mathcal{O}}_{T,t})$.

1.4 The American connection

Nous conservons les notations du th. 1. Soit Ω le R-module des différentielles continues de R sur k. Si M est un R-module, une connexion sur M est, par définition, un homomorphisme k-linéaire :

$$\nabla : M \to M \otimes \Omega ,$$

qui satisfait la loi des connexions :

$$\nabla(am) = da \otimes m + a\nabla(m) , \quad \text{pour tout } a \text{ dans } R \text{ et tout } m \text{ dans } M .$$

Exemple.- L'opérateur différentiel $d : R \to \Omega$ est une connexion.

Comme $\Omega = \bigoplus_1^n R.dX_i$, une connexion induit par projection des opérateurs $\nabla_i : M \to M$ qui jouent le rôle de dérivées partielles. On définit alors des opérateurs, toujours appelés ∇, $\nabla : M \otimes \Omega^j \to M \otimes \Omega^{j+1}$, par la relation :

$$\nabla(mw) = m \otimes dw + (-1)^j \nabla(m) \wedge w$$

dès que m est dans M et w dans Ω^j.

On nommera connexion la donnée d'un R-module M avec une connexion.

Une connexion (M,∇) sera dite intégrable si $\nabla \circ \nabla = 0$. Cette condition est encore équivalente au fait que les ∇_i commutent entre eux. Si (M,∇) est une connexion intégrable, on a donc à sa disposition un complexe de De Rham $M \otimes \Omega$. La cohomologie de ce complexe sera appelée la cohomologie de De Rham de la connexion (M,∇), et notée $H_{DR}^i(M,\nabla)$.

L'opérateur $d : R \to \Omega$ est continu pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique comme toute connexion d'ailleurs. Pour tout k-module N, on peut donc définir une

une connexion intégrable

$$d \hat{\otimes} \mathrm{id} : \varprojlim_s (R \otimes_k N)/(m^s R \otimes N) = R \hat{\otimes} N \to \Omega \hat{\otimes} N = (R \hat{\otimes} N) \otimes_R \Omega \ .$$

On notera cette connexion $C(N)$. Si (M,∇) est une connexion, introduisons le k-module $M^{\nabla} = \mathrm{Ker}(\nabla)$ des "sections plates", et l'homomorphisme de connexions $\zeta : C(M^{\nabla}) \to (M,\nabla)$ quand M est séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique (homomorphisme qui est défini canoniquement par passage à la limite projective). Une connexion (M,∇) sera dite <u>complètement constante</u> si M est séparé et complet et si ζ est un isomorphisme.

<u>Lemme</u> <u>(de Poincaré)</u>.- <u>Soit</u> N <u>un</u> k-<u>espace vectoriel</u>, <u>alors on a</u> :

$$H^0_{DR}(C(N)) = N \ ;$$

$$H^i_{DR}(C(N)) = 0 \ ,$$ <u>pour tout</u> i <u>entier strictement positif</u>.

THÉORÈME <u>(de Taylor-Ogus)</u>.- <u>Soit</u> M <u>un module séparé et complet pour la topologie définie par l'idéal maximal</u>, <u>sur l'anneau de séries formelles</u> $k[[X_1,\ldots,X_n]]$, <u>où</u> k <u>est un corps de caractéristique nulle</u>. <u>Alors</u>, <u>toute connexion intégrable sur</u> M <u>est complètement constante</u>.

On cherche un opérateur $T : M \to R \hat{\otimes} M^{\nabla}$ tel que $\zeta \circ T = \mathrm{id}(M)$ et $T \circ \zeta = \mathrm{id}(R \hat{\otimes} M)$. On possède déjà des dérivées partielles, il nous faut, pour pouvoir écrire une formule à la Taylor, savoir ce qu'est $m(0)$ pour un élément m de M . Copiant sur l'expression

$$f(X-X) = f(0) = \sum_i ((-1)^i/i!)\ X^i . f^{(i)}(X) \ ,$$

on définit $m(0) = m - \sum_i X_i \nabla_i(m) + (1/2!) \sum_{i,j} X_i . X_j \ \nabla_i \circ \nabla_j(m)$ - etc.

On voit facilement que cette série converge et on vérifie que

$m(0)$ est dans M^{∇} pour tout m dans M .

On obtient le résultat cherché en posant :

$$T(m) = m(0) + \sum_i X_i \nabla_i(m)(0) + (1/2!) \sum_{i,j} X_i . X_j \ \nabla_i \circ \nabla_j(m)(0) + \ldots$$

1.5 Démonstration du théorème de finitude

Par définition, on a la suite spectrale suivante :

$$E^1_{q,p} = H^q_{\mathfrak{m}}(\hat{X}, \hat{\Omega}^p) \Rightarrow H^{q+p}_{\mathfrak{m}}(Y) .$$

On reconnaît que le complexe

$$0 \to H^q_{\mathfrak{m}}(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}}) \to \dots \to H^q_{\mathfrak{m}}(\hat{X}, \hat{\Omega}^p) \to H^q_{\mathfrak{m}}(\hat{X}, \hat{\Omega}^{p+1}) \to \dots \to H^q_{\mathfrak{m}}(\hat{X}, \hat{\Omega}^n) \to 0$$

est le complexe de De Rham associé à une connexion intégrable sur $H^p_{\mathfrak{m}}(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}})$. Ceci fait, le théorème de Taylor-Ogus fera la dégénérescence par le lemme de Poincaré, et la finitude par le théorème de Hartshorne-Monsky. On aura donc :

$$H^i_{\mathfrak{m}}(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}}) = H^i_{\mathfrak{m}}(Y) \otimes_k R \qquad \text{pour } i \leq s ,$$

pourvu que $H^i_{\mathfrak{m}}(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}})$ soit séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique pour tout $i \leq s$.

COROLLAIRE.- <u>Pour que</u> $H^i_{\mathfrak{I}}(R)$ <u>soit artinien, pour</u> $i > s$, <u>il faut et il suffit que</u> $H^i_{\mathfrak{I}}(R)$ <u>ait son support contenu dans le fermé</u> $\{\mathfrak{m}\}$.

En effet, il suffit d'observer que si $H^i_{\mathfrak{I}}(R)$ a son support contenu dans $\{\mathfrak{m}\}$, il est limite inductive dénombrable de modules de longueur finie. Son dual sera donc limite projective dénombrable de modules séparés et complets.

Vérifions, pour terminer, que dans le cas où V est localement intersection complète dans U , on peut conclure. Pour ceci, il nous suffit de voir que $\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{I}^s, R)$ est de longueur finie pour $i > d = \mathrm{codim}(Y)$ et pour tout s . C'est clair vu qu'en localisant en un $\mathfrak{p}$ premier différent de $\mathfrak{m}$, $(R/\mathfrak{I}^s)_{\mathfrak{p}}$ est de dimension projective $\leq d$.

2. Théorèmes d'évanescence

Rappelons le critère suivant, dû à J.-P. Serre, qui est la forme algébrique du théorème B de H. Cartan :

Soit T un schéma noethérien. Pour que T soit affine, il faut et il suffit que $H^i(T,F) = 0$ pour tout $i > 0$ et pour tout faisceau cohérent F sur T. D'autre part, un théorème de A. Grothendieck assure que les $H^i(T,.)$ sont tous nuls dès que $i > \dim(T)$.

DÉFINITION.- Soient T un schéma et Z un sous-schéma fermé. On définit l'entier dimension cohomologique locale de Z dans T, et on le note $cd\ell(T,Z)$, de la façon suivante : si s est un entier $cd\ell(T,Z) \leq s$ si $H^i_Z(F) = 0$ pour tout $i > s$ et pour tout faisceau quasi cohérent F sur T.

Par exemple, avec les notations du théorème 1, $cd\ell(X,Y) \leq s$ si et seulement si $H^i_I(R) = 0$ pour $i > s$.

2.1 Le dernier groupe de cohomologie locale

Le théorème suivant est appelé théorème de S. Lichtenbaum, nous en donnons la forme la plus générale due à S. Kleiman [11].

THÉORÈME 2.1.- Soit T un schéma algébrique sur un corps, de dimension n. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Toutes les composantes irréductibles de T de dimension n sont non propres.

(ii) $H^n(T,F) = 0$ pour tout faisceau cohérent F sur T.

La forme locale qui nous intéresse est la suivante :

THÉORÈME 2.1' .- Soit R un anneau local noethérien de dimension n. Soit $\mathfrak{I}$ un idéal de R ayant la propriété suivante :

Pour tout idéal premier minimal $\mathfrak{p}$ du complété $\hat{R}$ de R, tel que $\dim \hat{R}/\mathfrak{p} = n$, on a $\dim \hat{R}/(\mathfrak{I}\hat{R} + \mathfrak{p}) \geq 1$.

Alors, le foncteur $H^n_{\mathfrak{I}}(.)$ est nul.

COROLLAIRE (M. Nagata).- *Soit* S *une surface normale affine sur un corps* k , *et soit* C *un sous-schéma fermé de* S *de pure codimension* 1 . *Alors* $S - C$ *est affine.*

2.2 *L'avant dernier groupe de cohomologie locale*

PROPOSITION 2.2 [14].- *On adopte les notations du théorème 1. On suppose de plus que* k *est séparablement clos et que* V *est connexe de dimension plus grande ou égale à un. Les conditions suivantes sont alors équivalentes* :

(i) $H^i_{\mathcal{I}}(M)$ *est un* R-*module artinien pour tout* $i \geq n-1$ *et pour tout* R-*module* M ;

(ii) $H^i_{\mathcal{I}}(R)$ *est artinien pour tout* $i \geq n-1$;

(iii) $H^i_{\mathcal{I}}(M) = 0$ *pour tout* $i \geq n-1$ *et tout* R-*module* M ;

(iv) $H^i_{\mathcal{I}}(R) = 0$ *pour tout* $i \geq n-1$;

(v) $H^0(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ *est un* R-*module de type fini* ;

(vi) *L'homomorphisme de restriction* $R = H^0(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}}) \rightarrow H^0(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ *est un isomorphisme.*

Le seul point délicat est (v) $\Rightarrow$ (vi). Pour cela on montre, grâce au théorème du contour apparent (dit théorème de pureté), que $R \rightarrow H^0(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ est étale.

Remarque.- Tous les énoncés, depuis le début de ce paragraphe 2, sont valables en caractéristique quelconque.

COROLLAIRE.- *Soit* V *un sous-schéma fermé de l'espace projectif* $P = \mathbb{P}^n_k$ *sur un corps de caractéristique nulle algébriquement clos. Supposons que* V *soit localement intersection complète dans* P *purement de dimension* $d \geq 1$. *Alors, pour que* $H^i(P - V, F) = 0$ *pour tout* $i \geq n-1$ *et pour tout faisceau quasi cohérent* F *sur* $P - V$, *il faut et il suffit que* V *soit connexe.*

Il y a évidemment un énoncé local correspondant, mais nous avons préféré, pour une fois, celui-ci. Donnons un exemple d'<u>anti-application</u> :

On connait le fameux problème qui consiste à se demander si une courbe connexe lisse $\mathcal{C}$ de $\mathbb{P}^3$ est ou pas ensemblistement intersection complète. Si tel est le cas, on montre facilement par un calcul de cohomologie de Čech que $H^2(\mathbb{P}^3 - \mathcal{C}, .) = H^3(\mathbb{P}^3 - \mathcal{C}, .) = 0$ sur les faisceaux cohérents. Malheureusement (?) le corollaire précédent dit que c'est toujours le cas.

2.3 ... <u>et les autres</u>

Les résultats de 2.1 et 2.2 ne se généralisent pas tels quels pour $H_{\mathfrak{Y}}^{n-i}$ et $i \geq 2$. On verra un contre-exemple en 2.4 pour $H_{\mathfrak{Y}}^{n-2}$.

Pour trouver des critères d'évanescence, A. Ogus introduit la notion suivante :

DÉFINITION.- <u>Soit</u> T <u>un schéma noethérien d'équicaractéristique zéro et soit</u> s <u>un entier</u>. <u>La</u> profondeur De Rham de T , <u>notée</u> profDR(T) , <u>est définie de la façon suivante</u> :

$$\mathrm{profDR}(T) \geq s \quad \underline{\text{si}} \quad H_t^i(Y) = 0 \quad \underline{\text{pour}} \quad i < s - \dim\{\bar{t}\} ,$$

<u>pour tout point</u> (<u>non nécessairement fermé</u>) t <u>de</u> T .

On a tout fait au numéro précédent pour avoir le résultat ci-dessous :

THÉORÈME 2.3.- <u>Soit</u> T <u>un schéma régulier noethérien équicaractéristique nulle</u>. <u>Alors si</u> T <u>est de pure équidimension</u> d , <u>on a</u> :

$$\mathrm{cd}\ell(T,Z) = d - \mathrm{profDR}(Z)$$

<u>pour tout sous-schéma fermé</u> Z <u>de</u> T .

Par exemple, si Z est localement intersection complète et bi-équidimensionnel, on a $\mathrm{profDR}(Z) = d - \mathrm{codim}(Z)$. Comme nous l'avons annoncé, nous obtenons alors l'analogue du théorème de W. Barth :

THÉORÈME 2.3.2.- <u>Avec les notations des théorèmes</u> 1 <u>et</u> 1", <u>on a</u>, <u>si</u> $\emptyset \subsetneq V \subsetneq U$:

(a) $H_{\mathfrak{m}}^i(Y) = 0$ <u>si</u> $i \leq \mathrm{profDR}(V) - \mathrm{dp}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_V) + 1$.

(b) $H^0(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}}) = R$ si $\mathrm{profDR}(V) \geq \mathrm{dp}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_V)$;

$H^i(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}}) = 0$ si $0 < i \leq \mathrm{profDR}(V) - \mathrm{dp}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_V)$.

(c) $\mathrm{cd}\ell(X, Y) < \mathrm{cd}\ell(U, V) + \mathrm{dp}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_V)$.

[$\mathrm{dp}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_V)$ signifie dimension projective de $\mathcal{O}_V$ sur $\mathcal{O}_U$.]

COROLLAIRE.- Supposons qu'on soit dans les conditions du théorème précédent et, qu'en plus, V soit localement intersection complète de pure codimension $r \geq 1$. Alors :

(a) $H^i_{\mathfrak{m}}(Y) = 0$ si $i \leq n - 2r$;

(b) $H^i_{\mathfrak{m}}(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}}) = 0$ si $i \leq n - 2r$;

(c) $\mathrm{cd}\ell(X, Y) < 2r$.

Je n'ai pas la place de reproduire ici la démonstration du théorème précédent. On se reportera au § 3 de l'article d'Ogus [13]. Bornons-nous à dire qu'on établit des conditions du type $\mathrm{Lef}(U, V)$, comme dans S.G.A. 62, i.e. qu'on arrive à comparer, pour les indices en question, $H^i(W, F)$ et $H^i(\hat{U}, \hat{F})$ pour tout ouvert W de U contenant V et tout faisceau cohérent F sur W .

2.4 Applications au groupe fondamental et au groupe de Picard

THÉORÈME 2.4.1.- Avec les notations du théorème 1, on suppose que V est localement intersection complète de pure codimension $r \geq 1$ dans U et, que $2r \leq n - 1$. Alors, toute connexion intégrable sur un faisceau localement libre sur le schéma formel $\hat{U}$ est constante.

COROLLAIRE.- Dans la situation du théorème précédent, l'application naturelle $\mathrm{Et}(k) \to \mathrm{Et}(V)$ (où $\mathrm{Et}(.)$ est la catégorie des revêtements finis étales de .) est une équivalence de catégorie. En particulier $\pi_1(V) \simeq \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$.

En effet, tout revêtement étale fini $\tilde{V} \to V$ se prolonge en un revêtement étale fini $\tilde{U} \xrightarrow{f} \hat{U}$ de schémas formels. Comme $\Omega^1_{\tilde{U}} = f^*\hat{\Omega}_U$, l'application

$\nabla = f_*(d) : f_*\mathcal{O}_{\widetilde{U}} \to f_*\Omega^1_{\widetilde{U}} = \Omega^1_{\hat{U}} \otimes f_*\mathcal{O}_{\widetilde{U}}$ définit une connexion intégrable. La k-algèbre $H^0_{DR}(f_*\mathcal{O}_{\hat{U}}, \nabla)$ étant de type fini, et $\zeta : H^0_{DR}(f_*\mathcal{O}_{\widetilde{U}}, \nabla) \otimes_k \mathcal{O}_{\hat{U}} \to f_*\mathcal{O}_{\widetilde{U}}$ étant un isomorphisme, on en déduit que $H^0_{DR}(f_*\mathcal{O}_{\widetilde{U}}, \nabla)$ est un revêtement étale de k .

COROLLAIRE 2.- <u>Conservons les notations du théorème 1 et supposons que</u> V <u>soit localement intersection complète de codimension</u> r <u>avec</u> $2r \leq n-1$. <u>On a</u> $\mathrm{Pic}(\hat{U}) = 0$. <u>De plus si</u> $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$ <u>et</u> $2r \leq n-3$, <u>alors on a</u> $\mathrm{Pic}(V) = 0$.

Avec les dérivées logarithmiques des cocycles, on construit une connexion sur un fibré vectoriel L de rang 1 , grâce au fait que $H^1(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}}) = 0$. On la modifie pour la rendre intégrable en remarquant que, sous les conditions de l'énoncé, on a un lemme de Poincaré pour le complexe De Rham formel $H^0(\hat{U}, \hat{\Omega}^{\bullet}_U)$. Une fois que l'on sait que $\mathrm{Pic}(\hat{U}) = 0$, l'application exponentielle fournissant un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{\hat{U}} \to \mathcal{O}_V)$ sur $\mathrm{Ker}(\mathcal{O}^*_{\hat{U}} \to \mathcal{O}^*_V)$, on a alors $\mathrm{Pic}(V) = 0$ sous l'hypothèse indiquée.

Un exemple typique d'application est le suivant :

THÉORÈME 2.4.2.- <u>Soit</u> A <u>un anneau local de dimension</u> d , <u>ayant une singularité isolée, qui est quotient d'un anneau local régulier excellent de dimension</u> n <u>d'équicaractéristique zéro. Supposons que</u> $\mathrm{prof}(A) \geq 3$ <u>et que</u> $d \geq \frac{1}{2}(n+3)$, <u>alors le complété</u> $\hat{A}$ <u>de</u> A <u>est factoriel</u>.

<u>Remarque</u>.- On sait maintenant qu'un anneau local factoriel complet à corps résiduel algébriquement clos de dimension au moins 3 et d'équicaractéristique zéro est de profondeur au moins 3 [Raynaud, Boutot, Danilov, Hartshorne-Ogus]. L'hypothèse faite sur la profondeur ne doit donc pas surprendre.

Par contre, dans le cas projectif et sur $\mathbf{C}$, on obtient mieux :

THÉORÈME 2.4.3.- <u>Soit</u> V <u>une sous-variété lisse de l'espace projectif complexe</u> $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, <u>de pure codimension</u> r . <u>Supposons que</u> $2r < n-3$, <u>alors</u> $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) \to \mathrm{Pic}(V)$ <u>est un isomorphisme</u>.

L'amélioration vient de ce que R. Hartshorne a montré dans [6] :

<u>Lemme</u>.- <u>Soient</u> $\mathfrak{X}$ <u>un schéma formel projectif sur</u> $\mathbb{C}$ <u>et</u> X <u>un sous-schéma réduit de définition</u>. <u>Supposons que</u> $\mathrm{Pic}(\mathfrak{X})$ <u>soit un groupe de type fini sur</u> $\mathbb{Z}$ <u>et que</u> X <u>soit non singulier</u>. <u>Alors</u> $\mathrm{Pic}(X)$ <u>est aussi de type fini sur</u> $\mathbb{Z}$.

On en déduit, sous les hypothèses du théorème 2.4.3, que l'espace tangent $H^1(V, \mathcal{O}_V)$ à $\mathrm{Pic}(V)$ est nul, ce qui permet de conclure comme dans le corollaire 2.

L'énoncé suivant est aussi une conséquence du lemme de R. Hartshorne :

PROPOSITION 2.4.4.- <u>Soit</u> X <u>un sous-schéma fermé de</u> $P = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ <u>qui est lisse</u> ; <u>alors si</u> $H^{n-2}(P-X, \mathcal{O}_P(-n-1)) = 0$, $\mathrm{Pic}(X)$ <u>est de type fini sur</u> $\mathbb{Z}$.

On peut trouver une surface lisse X dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ telle que $\mathrm{Pic}(X)$ ne soit pas de type fini. Cette surface sera donc telle que $H^2(P-X, \omega)$ soit différent de zéro. En particulier, elle ne sera pas ensemblistement intersection complète. La surface X peut être obtenue comme suit : Soit E une courbe elliptique. Soient x_1 , x_2 , x_3 trois points distincts de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ et y_1 , y_2 , y_3 trois points distincts de E . On prendra pour X le résultat des transformations suivantes sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times E$: éclater les trois couples (x_i , y_i) et contracter les droites $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times y_i$, $i = 1, 2, 3$. Le transformé propre du diviseur $a \times E + P \times b$, où $a \neq x$ et $b \neq y$, $i = 1, 2, 3$, donne un plongement de X , de degré 5 , dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$.

Concluons, pour aider le lecteur, en donnant l'analogue projectif de ce que nous avons obtenu :

THÉORÈME 2.4.5.- *Soit* V *un sous-schéma fermé de l'espace projectif* $P = \mathbf{P}_k^n$ *sur un corps de caractéristique nulle. Soit* $\hat{P}$ *le complété formel de* P *le long de* V . *Supposons que* V *soit localement intersection complète de pure codimension* $r < (n-1)/2$. *On a* :

(a) $H^i(P - V, F) = 0$ *pour tout* $i \geq 2r - 1$ *et tout* F *cohérent* ;

(b) $H^i_{DR}(P) \to H^i_{DR}(V)$ *est un isomorphisme pour* $i \leq n - 2r$;

(c) *si* k *est algébriquement clos* V *est simplement connexe* ;

(d) $\mathrm{Pic}(P) \to \mathrm{Pic}(\hat{P})$ *est un isomorphisme* ;

(e) *si* $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$ *et* $r < (n-3)/2$, *alors* $\mathrm{Pic}(P) \to \mathrm{Pic}(V)$ *est aussi un isomorphisme*.

Remarques ajoutées le 30 juin 1975

1) La première condition de (e) ci-dessus est automatique (en caractéristique zéro) quand V est géométriquement normal : c'est une conséquence de (c).

2) Dans le cadre projectif de 2.4.5 des résultats plus fins sont obtenus dans [16].

GÉNÉRIQUE

[1] V. I. DANILOV - On a conjecture of Samuel, Math. U.S.S.R. Sbornic, 10 (1970), 127-137.

[2] W. BARTH - Transplanting cohomology classes in complex projective space, Amer. J. Math., 92 (1970), 951-967.

[3] A. GROTHENDIECK - Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux, S.G.A. de l'IHES, 1962, North Holland, 1968.

[4] R. HARTSHORNE - Algebraic De Rham cohomology, Manuscripta mathematica, 7 (1972), 125-140.

[5] R. HARTSHORNE - On the De Rham cohomoly of algebraic varietes, Pub. Math. de l'I.H.E.S., n° 45, à paraître.

[6] R. HARTSHORNE - Cohomological dimension of algebraic varietes, Ann. Math., 88 (1968), 403-450.

[7] R. HARTSHORNE - Varietes of small codimension in projective space. [An expanded version of a talk presented to the SUMMER meeting of the A.M.S. Missoula, august 1973.] B.A.M.S., 80 (1974), 1017-1032.

[8] R. HARTSHORNE - Subvarietes of small codimension, Lecture notes prepared in connection with the summer institute on algebraic geometry at Humbolt state university Arcata, California, August 1974 (informally distributed manuscripts and articles should be treated as personnal communication and are not for library use).

[9] R. HARTSHORNE and A. OGUS - On the factoriality of local rings of small embedding codimension, Communications in Algebra, 1 (1974).

[10] A. HOLME - Embedding obstruction for algebraic varietes, preprint University of Bergen, Norway.

[11] S. KLEIMAN - On the vanishing of $H^n(X,F)$ for an n-dimensional variety, Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967), 940-944.

[12] M. E. LARSEN - On the topology of complex projective manifolds, Invent. Math., 19 (1973), 251-260.

[13] A. OGUS - Local cohomological dimension of algebraic varietes, Ann. Math., 98 (1973), 327-365.

[14] C. PESKINE et L. SZPIRO - Dimension projective finie et cohomologie locale, Pub. Math. de l'I.H.E.S., n° 42, 1973.

[15] J.- F. BOUTOT - Schéma de Picard local, C.R.Acad. Sc. Paris, t. 277, Série A, 691-694, 8 oct. 1973.

[16] A. OGUS - Formal neighborhoods and formal embeddings, Amer. Journ. of Maths., à paraître.