PIERRE CARTIER

Vecteurs différentiables dans les représentations unitaires des groupes de Lie

Séminaire N. Bourbaki, 1976, exp. nº 454, p. 20-34
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1974-1975__17__20_0>

Séminaire BOURBAKI
27e année, 1974/75, n° 454

VECTEURS DIFFÉRENTIABLES DANS LES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES DES GROUPES DE LIE

par Pierre CARTIER

Introduction

On sait que la correspondance entre les représentations d'un groupe de Lie, et celles de son algèbre de Lie, se présente de manière beaucoup moins simple lorsque la dimension de l'espace de représentation cesse d'être finie. Le résultat le plus ancien est dû à Gårding [3] qui a montré l'existence d'un domaine commun dense pour les opérateurs correspondant aux éléments de l'algèbre de Lie. Le "sous-espace de Gårding" est assez peu maniable, et a été remplacé par celui des "vecteurs différentiables". Divers auteurs, dont Schwartz [10], ont proposé d'étudier le dual de l'espace des vecteurs différentiables, selon le modèle éprouvé qui conduit à l'introduction des distributions. La considération de cet espace des "vecteurs-distributions", surtout lorsqu'il est nucléaire (cf. n^{os} 2.2 et 2.3) permet de progresser dans diverses questions : distributions de type positif, caractère des représentations, etc. Il permet aussi de donner un exposé beaucoup plus satisfaisant de la théorie des représentations induites, débarrassé des nombreux ensembles de mesure nulle que Mackey y avait laissés. En particulier, on peut formuler une version générale du théorème de réciprocité de Frobenius, qui justifie des raisonnements heuristiques de Gelfand et Piateskii-Shapiro [4].

Cet exposé est consacré à la description des principaux résultats obtenus récemment dans cette direction. Nos sources principales sont, d'une part la thèse de Poulsen [8], [9], entreprise sous la direction d'Irving Segal, et de l'autre un séminaire donné par nous-même à l'I.H.E.S. d'octobre 1972 à mars 1973. Poulsen utilise les théorèmes de régularité des solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques ; notre méthode, une variante des inégalités de Sobolev, est plus élémentaire. Mentionnons qu'une bonne partie de nos résultats ont été obtenus dès 1954, et ont été annoncés partiellement dans [2].

Notations : G est un groupe de Lie réel, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, $U(\mathfrak{g})$ ou U l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, réalisée comme l'algèbre de convolution des distributions à l'origine de G . Pour $0 \leq m \leq \infty$, on note $C_c^m(G)$ l'espace des fonctions à support compact de classe C^m sur G (m fois continuement différentiables).

On note en général $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire (continue) du groupe G . Le produit scalaire dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est noté $(x|y)$; on le suppose linéaire en y (avec la bénédiction de Bourbaki !).

§ 1. Espace des vecteurs différentiables

1.1 Construction de $\mathcal{H}_\infty$

Pour tout élément X de $\mathfrak{g}$, le groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires $\pi(\exp tX)$ admet un générateur infinitésimal $\pi'(X)$; on sait que $i\pi'(X)$ est auto-adjoint (Stone). Pour tout entier $m \geq 0$, notons $\mathcal{H}_m$ le sous-espace de $\mathcal{H}$ intersection des domaines des opérateurs $\pi'(X_1)\dots\pi'(X_r)$ pour $r \leq m$ et $X_1,\dots,X_r$ dans $\mathfrak{g}$.

Choisissons une base $(X_1,\dots,X_n)$ de $\mathfrak{g}$. On définit sur $\mathcal{H}_m$ une norme $\|a\|_m$ par la formule

$$(1) \qquad \|a\|_m^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\pi'(X_1)^{\alpha_1} \dots \pi'(X_n)^{\alpha_n} a\|^2 \quad (\text{avec } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n) ;$$

pour cette norme, $\mathcal{H}_m$ est un espace de Hilbert, et deux bases différentes de $\mathfrak{g}$ définissent des normes équivalentes sur $\mathcal{H}_m$. On pose aussi $\mathcal{H}_\infty = \bigcap_{m \geq 0} \mathcal{H}_m$, avec la topologie définie par la suite des normes $\|a\|_m$; c'est un espace de Fréchet.

La formule évidente

$$(2) \qquad \pi(g)\pi'(X)\pi(g)^{-1} = \pi'(\mathrm{Ad}\, g.X) \qquad (g \in G ,\ X \in \mathfrak{g})$$

montre que $\mathcal{H}_\infty$ est stable par G , d'où une représentation π_∞ de G dans l'espace de Fréchet $\mathcal{H}_\infty$. Le théorème suivant est facile.

THÉORÈME 1.1.- a) Pour tout vecteur $a \in \mathcal{H}_\infty$, l'application $g \longmapsto \pi(g).a$ de G dans $\mathcal{H}_\infty$ est de classe C^∞ .

b) Réciproquement, soit $a \in \mathcal{H}$ tel que l'application $g \longmapsto \pi(g).a$ soit de classe C^∞ comme application de G dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors a appartient à $\mathcal{H}_\infty$.

Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, le domaine de $\pi'(X)$ contient $\mathcal{H}_\infty$, et $\mathcal{H}_\infty$ est stable par $\pi'(X)$. On a donc une représentation π'_∞ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans l'espace $\mathcal{H}_\infty$, que l'on étend à une représentation, notée aussi π'_∞ ,de l'algèbre associative $U(\mathfrak{g})$. Rappelons qu'un élément ξ de $U(\mathfrak{g})$ est dit elliptique si l'opérateur différentiel invariant à gauche (par exemple) qu'il définit est elliptique.

Voici une autre caractérisation de l'espace $\mathcal{H}_\infty$, due à Goodman [5].

THÉORÈME 1.2.- Soit ξ un élément elliptique de $U(\mathfrak{g})$, et soit D la fermeture de l'opérateur $\pi'_\infty(\xi)$ de domaine $\mathcal{H}_\infty$. Alors $\mathcal{H}_\infty$ avec sa topologie coïncide avec l'espace $C^\infty(D)$ (*).

Un cas particulier déjà considéré par Nelson [7] est celui où $\xi = X_1^2 + \ldots + X_n^2$, en notant $(X_1,\ldots,X_n)$ une base de $\mathfrak{g}$. On peut alors montrer que D est égal à $\pi'(X_1)^2 + \ldots + \pi'(X_n)^2$, et est auto-adjoint. On peut aussi prouver plus précisément que $\mathcal{H}_m$ est le domaine de $(1 - D)^m$ pour tout entier $m \geq 0$.

1.2 Régularisation et convolution

Si f est une fonction continue à support compact sur G , l'opérateur $\pi(f)$ dans $\mathcal{H}$ est caractérisé par

(3) $$(a|\pi(f)b) = \int_G f(x)(a|\pi(x)b)\,dx \ .$$

C'est un opérateur continu dans $\mathcal{H}$, qui induit un opérateur continu $\pi_\infty(f)$ dans $\mathcal{H}_\infty$. On montre de plus que si f appartient à $C_c^\infty(G)$, l'opérateur $\pi(f)$ applique continuement $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}_\infty$. L'espace $\mathcal{G}$ formé des combinaisons linéaires finies $\sum_{i=1}^{r} \pi(f_i)a_i$ $(a_i \in \mathcal{H}\ ,\ f_i \in C_c^\infty(G))$ a été introduit par Gårding [3], qui a prouvé qu'il est dense dans $\mathcal{H}$. Comme on a $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}_\infty$, ceci prouve que $\mathcal{H}_\infty$ est

(*) C'est l'intersection des domaines des puissances D^m $(m \geq 0)$, avec la famille de normes $\|a\|'_m = \{ \sum_{j=0}^{m} \|D^j a\|^2 \}^{\frac{1}{2}}$.

dense dans $\mathcal{H}$. On peut aussi prouver que $\mathcal{G}$, donc $\mathcal{H}_\infty$, est dense dans $\mathcal{H}_m$ $(0 \leq m \leq \infty)$ pour sa topologie à lui.

On a des résultats plus précis en utilisant <u>le lemme de décomposition</u> suivant, fondamental pour la suite.

<u>Lemme</u> 1.1.- <u>Soient</u> $m \geq 0$ <u>et</u> $f \in C_c^\infty(G)$. <u>Il existe des fonctions</u> $h_1, \dots, h_r$ <u>dans</u> $C_c^\infty(G)$ <u>et des fonctions</u> $g_1, \dots, g_r$ <u>dans</u> $C_c^m(G)$, <u>telles que</u> $f = h_1 * g_1 + \dots + h_r * g_r$ (convolution).

Pour prouver ce lemme, on remarque d'abord que la distribution de Dirac δ (définie par $\delta(f) = f(1)$ pour $f \in C_c^\infty(G)$) est somme finie de dérivées de fonctions de classe C^m à support dans le domaine d'un système de coordonnées autour de 1 (se ramener à l'espace euclidien R^n). On en déduit une décomposition de la forme $\delta = \sum_{i=1}^{r} \xi_i * g_i$ $(\xi_i \in U(\mathfrak{g})$, $g_i \in C_c^m(G))$, d'où

$$f = f * \delta = \sum_{i=1}^{r} (f * \xi_i) * g_i .$$

Par un raisonnement analogue, on montre que toute distribution à support compact sur G est de la forme $T = \sum_{i=1}^{r} \xi_i * f_i$ avec $\xi_i \in U(\mathfrak{g})$ et $f_i \in C_c^m(G)$ (m fixé).

Soit $\mathcal{H}'_m$ l'ensemble des vecteurs de la forme $\sum_{i=1}^{r} \pi(f_i) a_i$ avec $f_i \in C_c^m(G)$ et $a_i \in \mathcal{H}$. Du lemme de décomposition, on déduit l'existence d'un entier d (ne dépendant que de la dimension n de G) tel que

$$\mathcal{H}_m \supset \mathcal{H}'_m \supset \mathcal{H}_{m+d} \qquad \text{pour } m \geq 0 .$$

En particulier, on a $\mathcal{H}_\infty = \bigcap_{m \geq 0} \mathcal{H}'_m$.

1.3 <u>Vecteurs-distributions</u>

L'anti-dual $\mathcal{H}_{-\infty}$ de $\mathcal{H}_\infty$ se compose des formes anti-linéaires continues sur $\mathcal{H}_\infty$. L'inclusion de $\mathcal{H}_\infty$ dans $\mathcal{H}$ et l'isomorphisme de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ avec son anti-dual fournissent une inclusion de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}_{-\infty}$

$$\mathcal{H}_\infty \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{-\infty} .$$

Plus précisément, notons $\mathcal{H}_{-m}$ l'anti-dual de $\mathcal{H}_m$. On a alors la chaîne d'espaces

$$\ldots \subset \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_o \subset \mathcal{H}_{-1} \subset \mathcal{H}_{-2} \subset \ldots$$

avec

$$\mathcal{H}_\infty = \bigcap_m \mathcal{H}_m \quad , \quad \mathcal{H}_{-\infty} = \bigcup_m \mathcal{H}_m \quad , \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_o \ .$$

Une formule analogue à (3) définit l'opérateur continu

$$\pi_\infty(T) : \mathcal{H}_\infty \to \mathcal{H}_\infty$$

pour toute distribution T à support compact sur G . Par dualité, on obtient une représentation linéaire $\pi_{-\infty}$ dans $\mathcal{H}_{-\infty}$ de l'algèbre de convolution de ces distributions. En particulier, on obtient des représentations $\pi_{-\infty}$ de G et de $U(\mathfrak{g})$ dans $\mathcal{H}_{-\infty}$.

Voici les deux théorèmes-clés.

THÉORÈME 1.3.- <u>Soit</u> $m \geq 0$ <u>un entier</u>.

a) <u>L'espace</u> $\mathcal{H}_m$ <u>se compose des vecteurs</u> $a \in \mathcal{H}$ <u>tels que l'on ait</u> $\pi_{-\infty}(X_1)\ldots\pi_{-\infty}(X_r)a \in \mathcal{H}$ <u>pour</u> $0 \leq r \leq m$, <u>et</u> $X_1,\ldots,X_r$ <u>dans</u> $\mathfrak{g}$.

b) <u>L'espace</u> $\mathcal{H}_{-m}$ <u>se compose des sommes finies de vecteurs de la forme</u> $\pi_{-\infty}(X_1)\ldots\pi_{-\infty}(X_r)a$ <u>avec</u> $a \in \mathcal{H}$, $0 \leq r \leq m$, <u>et</u> $X_1,\ldots,X_r$ <u>dans</u> $\mathfrak{g}$.

En particulier, $\mathcal{H}_{-\infty}$ est le plus petit sous-espace stable par $\mathfrak{g}$ contenant $\mathcal{H}$, et représente donc l'extension minimale de $\mathcal{H}$ sur laquelle on puisse faire agir l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

THÉORÈME 1.4.- <u>Soit</u> τ <u>une application linéaire continue de</u> $C_c^\infty(G)$ <u>dans</u> $\mathcal{H}$, <u>telle que</u> $\tau({}_xf) = \pi(x)\tau(f)$ <u>pour</u> $x \in G$ <u>et</u> $f \in C_c^\infty(G)$ (en posant ${}_xf(y) = f(x^{-1}y)$) . <u>Il existe un unique vecteur</u> $a \in \mathcal{H}_{-\infty}$ <u>tel que</u> $\tau(f) = \pi_{-\infty}(f).a$ <u>pour toute fonction</u> $f \in C_c^\infty(G)$.

Ce dernier théorème montre que notre construction de $\mathcal{H}_{-\infty}$ équivaut à celle de Schwartz [10]. La démonstration repose sur le lemme de décomposition.

1.4 <u>Cas des groupes compacts</u>

Soit K un groupe de Lie compact, et soit $(\pi_\alpha , \mathcal{H}_\alpha)_{\alpha \in I}$ un système complet de représentations irréductibles de K , deux à deux non-isomorphes. On note χ_α le caractère de $(\pi_\alpha , \mathcal{H}_\alpha)$ et d_α la dimension de $\mathcal{H}_\alpha$. Introduisons sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de K une forme bilinéaire symétrique B , invariante par $\mathrm{Ad}\,G$ et telle que $B(X,X) > 0$ pour $X \neq 0$ dans $\mathfrak{k}$. Il existe un élément Δ du centre de $U(\mathfrak{k})$ tel que $\Delta = \sum_{j=1}^{r} X_j^2$ pour toute base $(X_1,\ldots,X_r)$ de $\mathfrak{k}$ orthonormale pour B . L'opérateur $-\pi_\alpha(\Delta)$ dans $\mathcal{H}_\alpha$ est un scalaire $\delta_\alpha \geq 0$.

En combinant le théorème de Peter-Weyl avec le théorème 1.2, on obtient les résultats suivants :

Toute distribution sur K s'écrit de manière unique sous la forme

(4) $$T(f) = \sum_{\alpha \in I} \mathrm{Tr}(\pi_\alpha(f)A_\alpha)$$

où la famille des opérateurs $A_\alpha : \mathcal{H}_\alpha \to \mathcal{H}_\alpha$ satisfait à une majoration du type

(5) $$\mathrm{Tr}(A_\alpha^* A_\alpha) \leq C(1 + \delta_\alpha)^N \qquad C > 0 \ , \ N \geq 0 \ .$$

Pour que T soit une fonction de classe C^∞ , il faut et il suffit que l'on ait $\sup_{\alpha \in I} \mathrm{Tr}(A_\alpha^* A_\alpha)(1 + \delta_\alpha)^N < \infty$ pour tout entier $N \geq 0$.

Passons à l'étude des représentations d'un groupe compact ; on rappelle d'abord que, si $(\pi, \mathcal{H})$ est une représentation unitaire du groupe compact K , on a une décomposition en somme hilbertienne, soit $\mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{H}_\alpha$, où $\mathcal{H}_\alpha$ est invariant par K , et la représentation de K dans $\mathcal{H}_\alpha$ est un multiple de π_α . Le projecteur orthogonal P_α de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}_\alpha$ est donné par la formule

(6) $$P_\alpha = d_\alpha\, \pi(\bar{\chi}_\alpha) = d_\alpha \int_K \bar{\chi}_\alpha(x)\pi_\alpha(x)\, dx \ .$$

Ceci étant rappelé, les éléments de $\mathcal{H}_\infty$ sont les vecteurs de la forme $a = \sum_{\alpha \in I} a_\alpha$ avec $a_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha$ et

(7) $$\sup_\alpha \|a_\alpha\|(1 + \delta_\alpha)^N < \infty \qquad \text{pour tout entier } N \geq 0 \ .$$

Par contre, les éléments de $\mathcal{H}_{-\infty}$ se représentent par des séries analogues, avec la majoration

(8) $$\|a_\alpha\| \leq C(1 + \delta_\alpha)^N \qquad \text{pour } C > 0 \text{ et } N \text{ convenables.}$$

1.5 Coefficients généralisés

Revenons à l'étude de la représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ du groupe de Lie G . Si a et b sont des éléments de $\mathcal{H}$, le coefficient $\pi_{a,b}$ est défini comme la fonction scalaire $g \longmapsto (a|\pi(g)b)$ sur G . On peut généraliser cette définition au cas où a et b appartiennent à $\mathcal{H}_{-\infty}$. En effet, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, l'opérateur $\pi_{-\infty}(f)$ applique $\mathcal{H}_{-\infty}$ dans $\mathcal{H}_\infty$ et $\pi_{a,b}$ sera la distribution $f \mapsto (a|\pi_{-\infty}(f)b)$ sur G . [On a noté $(a|b)$ le produit scalaire d'un élément a de $\mathcal{H}_{-\infty}$ avec un élément b de $\mathcal{H}_\infty$.]

Remarquons d'abord que le coefficient $\pi_{a,a}$ est une distribution de type positif : pour $f \in C_c^\infty(G)$, on a

$$\pi_{a,a}(f^* * f) = \|\pi_{-\infty}(f)a\|^2 \geq 0 .$$

Réciproquement, les méthodes classiques introduites par Gelfand et Segal fournissent le résultat suivant :

THÉORÈME 1.5.- Soit T une distribution de type positif sur G . Il existe une représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ de G et un vecteur généralisé $a \in \mathcal{H}_{-\infty}$ tels que $T = \pi_{a,a}$.

On laisse au lecteur le soin de formuler un résultat correspondant d'unicité. En combinant les théorèmes 1.3 et 1.5, on voit que toute distribution de type positif sur G est somme finie de distributions de la forme $\xi * F * \xi'$ avec ξ , ξ' dans $U(\mathfrak{g})$ et une fonction continue de type positif F . En particulier, lorsque $G = R^n$, on déduit de là qu'une telle distribution est tempérée et que sa transformée de Fourier est une mesure positive (théorème de Bochner-Schwartz).

§ 2. Premières applications

2.1 Généralisation du lemme de Schur

On peut donner des critères d'irréductibilité portant seulement sur les vecteurs différentiables. Voici les énoncés principaux.

THÉORÈME 2.1.- Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire du groupe de Lie G . L'application $\mathcal{D} \mapsto \mathcal{D} \cap \mathcal{H}_\infty$ est une bijection de l'ensemble des sous-espaces fermés de $\mathcal{H}$ invariants par G sur l'ensemble des sous-espaces fermés de $\mathcal{H}_\infty$ invariants par G . De plus, $\mathcal{D}$ se compose des vecteurs $a \in \mathcal{H}$ tels que $\pi(f)a \in \mathcal{D} \cap \mathcal{H}_\infty$ pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$.

THÉORÈME 2.2.- <u>Soient</u> $(\pi, \mathcal{H})$ <u>et</u> $(\pi^1, \mathcal{H}^1)$ <u>deux représentations unitaires de</u> G . <u>Si les représentations</u> $(\pi_\infty, \mathcal{H}_\infty)$ <u>et</u> $(\pi^1_\infty, \mathcal{H}^1_\infty)$ <u>de</u> G <u>qu'on en déduit sont isomorphes, les représentations</u> $(\pi, \mathcal{H})$ <u>et</u> $(\pi^1, \mathcal{H}^1)$ <u>sont unitairement isomorphes</u>.

THÉORÈME 2.3.- <u>Supposons que la représentation unitaire</u> $(\pi, \mathcal{H})$ <u>soit irréductible. Alors toute forme sesquilinéaire séparément continue sur</u> $\mathcal{H}_\infty \times \mathcal{H}_\infty$, <u>invariante par</u> G , <u>est proportionnelle au produit scalaire de</u> $\mathcal{H}$.

La démonstration du théorème 2.1 est sans surprise. Celle du théorème 2.2 repose sur un lemme général de Naimark et sur le théorème 2.1 appliqué au graphe d'un isomorphisme de $\mathcal{H}_\infty$ sur $\mathcal{H}'_\infty$ commutant à l'action de G . Esquissons la démonstration du théorème 2.3 donnée par Poulsen [8].

Une forme équivalente du théorème 2.3 est la suivante : si la représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ est irréductible, tout opérateur $A : \mathcal{H}_\infty \to \mathcal{H}_{-\infty}$ qui est faiblement continu et commute à l'action de G est un scalaire.

Pour démontrer ce résultat, on remarque d'abord que A commute à l'action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, en particulier à l'opérateur $D = \pi_\infty(X_1)^2 + \ldots + \pi_\infty(X_n)^2$ introduit à la fin du n° 1.1. Ensuite, toute forme bilinéaire séparément continue sur un produit d'espaces de Fréchet est continue ; en utilisant le théorème 1.2, on voit alors que A est de la forme $(1 - D)^m B (1 - D)^{m'}$ où B est continu dans $\mathcal{H}$. On peut montrer que l'inverse de $1 - D$ est borné, et comme $1 - D$ commute à A par la remarque ci-dessus, on conclut assez facilement que l'on a $A = B(1 - D)^{m+m'}$, donc que A applique continuement $\mathcal{H}_\infty$ dans $\mathcal{H}$. On en déduit alors que A^*A applique continuement $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. Le lemme de Schur usuel montre que A^*A est scalaire, donc A est continu dans $\mathcal{H}$. On applique alors de nouveau le lemme de Schur classique.

2.2 Théorie des caractères

Rappelons qu'un opérateur borné A dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est dit <u>nucléaire</u> si l'on a $\sum_n (e_n \mid |A| e_n) < \infty$ pour toute base orthonormale (e_n) de $\mathcal{H}$, avec $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$. La trace de A est alors définie par $\mathrm{Tr}(A) = \sum_n (e_n | A e_n)$

dans les mêmes hypothèses. Pour tout nombre réel $p \geq 1$, on note $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs bornés A dans $\mathcal{H}$ tels que $|A|^p$ soit nucléaire. C'est un espace de Banach pour la norme $\|A\|_p = \mathrm{Tr}(|A|^p)^{1/p}$; de plus, pour $A \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{L}^q(\mathcal{H})$ et $r = pq/(p+q)$, l'opérateur AB appartient à $\mathcal{L}^r(\mathcal{H})$ et l'on a $\|AB\|_r \leq \|A\|_p \|B\|_q$ par analogie avec l'inégalité de Hölder.

Nous dirons que la représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ de G a un caractère si l'opérateur $\pi(f)$ est nucléaire pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$. S'il en est ainsi, on pose

(9) $\qquad \chi(f) = \mathrm{Tr}(\pi(f))$

et χ est une distribution de type positif sur G, invariante par les automorphismes intérieurs ; on l'appelle le caractère de $(\pi, \mathcal{H})$. Si la représentation $(\pi, \mathcal{H})$ admet un caractère, elle se décompose en somme directe de représentations irréductibles avec multiplicité finie.

Les théorèmes fondamentaux sur les caractères sont les suivants ; leur démonstration utilise de façon essentielle le lemme de décomposition (lemme 1.1).

THÉORÈME 2.4.- *Supposons qu'il existe un nombre réel $p \geq 1$ tel que $\pi(f)$ appartienne à $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$. Alors on a $\pi(f) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$ et la représentation $(\pi, \mathcal{H})$ a un caractère.*

THÉORÈME 2.5.- *Soit G_1 un sous-groupe fermé de G, et soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de G. Si la restriction $(\pi_1, \mathcal{H})$ de $(\pi, \mathcal{H})$ à G_1 a un caractère, il en est de même de $(\pi, \mathcal{H})$.*

Dans l'énoncé qui suit, on pose $D = \pi_\infty(X_1)^2 + \ldots + \pi_\infty(X_n)^2$, où $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathfrak{g}$. On rappelle que D est essentiellement auto-adjoint sur son domaine $\mathcal{H}_\infty$ et que $1 - D$ a un inverse borné.

THÉORÈME 2.6.- *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *La représentation $(\pi, \mathcal{H})$ a un caractère.*

b) *L'opérateur $(1 - D)^{-1}$ appartient à $\mathcal{L}^m(\mathcal{H})$ pour un $m \geq 0$ convenable.*

c) *L'espace de Fréchet $\mathcal{H}_\infty$ est nucléaire.*

2.3 Cas des groupes semi-simples

Supposons dans ce numéro que le groupe G soit connexe, semi-simple de centre fini. Soient K un sous-groupe compact maximal de G, $\mathfrak{k}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{p}$ l'orthogonal de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$ pour la forme de Killing. On note $c_{\mathfrak{g}}$ (resp. $c_{\mathfrak{k}}$) l'élément de Casimir de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{k}$). Comme la restriction de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{k}$ (resp. $\mathfrak{p}$) est négative (resp. positive), on voit facilement qu'il existe une base $(X_1,\ldots,X_n)$ de $\mathfrak{g}$ telle que

$$c_{\mathfrak{g}} - 2c_{\mathfrak{k}} = X_1^2 + \ldots + X_n^2 .$$

Comme $c_{\mathfrak{g}}$ appartient au centre de $U(\mathfrak{g})$, il agit par un scalaire dans toute représentation unitaire irréductible de G (cf. théorème 2.3). En utilisant le théorème 2.5 avec $G_1 = K$, et les résultats sur les groupes compacts énoncés en 1.4, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 2.7.- On suppose que $\pi_\infty(c_{\mathfrak{g}})$ est un scalaire. Pour toute représentation unitaire irréductible $(\pi_\alpha, \mathcal{K}_\alpha)$ de K, soit m_α sa multiplicité dans la restriction de $(\pi, \mathcal{H})$ à K, et soit δ_α le scalaire tel que $\pi_\alpha(c_{\mathfrak{k}}) = \delta_\alpha$. Pour que la représentation $(\pi, \mathcal{H})$ ait un caractère, il faut et il suffit qu'il existe des constantes $C > 0$ et $N \geq 0$ telles que $m_\alpha \leq C(1 + \delta_\alpha)^N$ pour tout α.

En particulier, on retrouve facilement le théorème de Harish-Chandra selon lequel toute représentation unitaire irréductible du groupe semi-simple G a un caractère.

§ 3. Représentations induites

3.1 Fibrés vectoriels et représentations induites

Soit P un sous-groupe fermé de G et soit $(\lambda, \mathcal{K})$ une représentation unitaire de P. Notons S l'espace homogène $P\backslash G$ sur lequel G opère à droite. Faisons opérer le groupe P à gauche sur l'espace produit $G \times \mathcal{K}$ par $p.(g,a) = (pg, \lambda(p)a)$ et notons $\mathcal{F}$ le quotient de $G \times \mathcal{K}$ par cette action de P.

On définit alors de manière naturelle une projection continue $p : \mathcal{F} \to S$ et chaque fibre $\mathcal{F}_s = p^{-1}(s)$ est munie d'une structure d'espace hilbertien. En bref, il s'agit de la construction bien connue du fibré vectoriel $\mathfrak{F}$ de base S, associé au fibré principal G, de base S et groupe P, et à la fibre type $\mathfrak{K}$. Ce fibré est même localement trivial, en vertu de l'existence d'une section locale de G au-dessus de S. Noter aussi que le groupe G opère à droite sur $\mathfrak{F}$, de manière compatible avec son action sur la base S de ce fibré.

Notons aussi Ω_α le fibré des densités d'ordre α sur S, qui localement, dans un système de coordonnées $x_1,\dots,x_r$, s'écrivent $c.|dx_1 \wedge \dots \wedge dx_r|^\alpha$.

Soit F une section borélienne du fibré $\Omega_{\frac{1}{2}} \otimes \mathfrak{F}$ obtenu en tordant $\mathfrak{F}$. Alors l'application $s \mapsto \|F(s)\|^2$ est une section borélienne positive du fibré Ω_1 des densités. Notons $\mathcal{H}$ l'espace des sections boréliennes F telles que $\int_S \|F(s)\|^2$ soit fini. Le groupe G agit de manière naturelle à gauche sur $\mathcal{H}$ par $\pi(g)F(s) = F(s.g)g^{-1}$. On fabrique ainsi une représentation unitaire $(\pi,\mathcal{H})$ de G. Ce n'est autre, à un isomorphisme naturel près, que la représentation de G induite, au sens de Mackey, par la représentation $(\lambda,\mathfrak{K})$ de P.

3.2 Sections différentiables

Conservons les notations du n° 3.1. Notons aussi $\mathfrak{K}_\infty$ l'espace des vecteurs différentiables dans $\mathfrak{K}$ pour la représentation λ de P, et λ_∞ la représentation de P dans $\mathfrak{K}_\infty$ obtenue par restriction de λ. L'application $(p,a) \mapsto \lambda_\infty(p).a$ de $P \times \mathfrak{K}_\infty$ dans $\mathfrak{K}_\infty$ est continue, et même de classe C^∞ par rapport à la première variable. On peut donc reprendre la construction du n° 3.1 dans la catégorie des "fibrés différentiables". Soit $\mathfrak{F}_\infty$ le fibré vectoriel ainsi obtenu ; il s'identifie à un sous-ensemble dense de $\mathfrak{F}$, avec une topologie plus fine. La notion de section de classe C^∞ a un sens dans $\mathfrak{F}_\infty$; soit $\Gamma(S, \mathfrak{F}_\infty)$ l'ensemble de ces sections.

THÉORÈME 3.1.- Les vecteurs différentiables de la représentation $(\pi,\mathcal{H})$ de G ne sont autres que les sections différentiables F de $\mathfrak{F}_\infty$ qui ont la propriété suivante (*) :

(A) Pour tout $\xi \in U(\mathfrak{g})$, on a $\int_S \|F * \xi\|^2 < \infty$.

En particulier, si $S = P\backslash G$ est compact, on a $\mathcal{H}_\infty = \Gamma(S, \mathfrak{F}_\infty)$.

Ce théorème a été établi par Poulsen [8] en utilisant les théorèmes de régularité des équations elliptiques. Nous en avons donné une démonstration naturelle et simple en utilisant le lemme de décomposition.

3.3 Quelques applications du théorème de Poulsen

On peut refaire, pour les groupes de Lie, toute la théorie de Mackey [6] de manière à éviter les ensembles de mesure nulle. Par exemple, montrons comment on peut définir les représentations induites par un produit tensoriel (Fell).

Les notations sont celles de 3.1 et 3.2. La fibre $\mathfrak{F}_{s_o}$ au point-base s_o de S s'identifie à $\mathcal{K}$. On peut compléter le théorème 3.1 en montrant que la topologie de $\mathcal{H}_\infty$ est plus fine que la topologie C^∞ locale sur les sections. En particulier, l'homomorphisme d'évaluation $F \longmapsto F(s_o)$ de $\mathcal{H}_\infty$ dans $\mathcal{K}_\infty$ est continu. Par dualité, on définit une application linéaire $\tau : \mathcal{K}_{-\infty} \rightarrow \mathcal{H}_{-\infty}$. Puis, on définit une application Φ de $C_c^\infty(G) \otimes \mathcal{K}$ dans $\mathcal{H}$ par

(10) $\Phi(f \otimes a) = \pi(f).\tau(a)$.

La représentation $(\pi, \mathcal{H})$ peut alors se reconstruire grâce aux remarques suivantes :

a) l'image de Φ est dense dans $\mathcal{H}$;

b) on a la formule de produit scalaire (**)

(11) $(\Phi(f \otimes a) | \Phi(f' \otimes a')) = \int_P \beta(p)(a|\lambda(p)a')(f' * f)(p)dp$;

c) on a la formule de transformation

(*) Pour $X \in \mathfrak{g}$, on définit $F * X$ par

$$(F * X)(s) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\, F(s.\exp tX).\exp(-tX) - F(s)\,]$$

et on étend cette représentation de $\mathfrak{g}$ en une représentation de $U(\mathfrak{g})$.

(**) La fonction β sur P est le rapport des modules de G et P .

(12) $\pi(x)\Phi(f \otimes a) = \Phi({}_x f \otimes a)$.

Ceci étant établi, le théorème de transitivité des représentations induites (pour trois groupes $Q \subset P \subset G$) s'établit simplement par analogie avec l'associativité du produit tensoriel.

Mentionnons aussi que le théorème d'imprimitivité de Mackey s'établit de manière simple par ces méthodes.

3.4 Réciprocité de Frobenius

Le théorème suivant était connu pour G fini (Frobenius), pour G compact (A. Weil), plus généralement pour P compact (sans hypothèse sur $P\backslash G$) (Mautner).

THÉORÈME 3.2.- Supposons que P soit un sous-groupe fermé du groupe de Lie G et que l'espace homogène $P\backslash G$ soit compact. Soient $(\pi^1, \mathcal{H}^1)$ une représentation unitaire de G , $(\lambda, \mathcal{K})$ une représentation unitaire de P et $(\pi, \mathcal{H})$ la représentation de G induite par $(\lambda, \mathcal{K})$. On a alors

$$\mathrm{Hom}_G(\mathcal{H}^1_\infty, \mathcal{H}_\infty) \simeq \mathrm{Hom}_P(\mathcal{H}^1_\infty, \mathcal{K}_\infty) .$$

Lorsque la représentation $(\pi^1, \mathcal{H}^1)$ est irréductible, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_G(\mathcal{H}^1_\infty, \mathcal{H}_\infty) \simeq \mathrm{Hom}_G(\mathcal{H}^1, \mathcal{H})$$

comme conséquence du lemme de Schur précisé par le théorème 2.3. Lorsque $\mathcal{K}$ est de dimension 1 , on a un isomorphisme canonique de $\mathrm{Hom}_P(\mathcal{H}^1_\infty, \mathcal{K}_\infty)$ avec l'ensemble des vecteurs-distributions $a \in \mathcal{H}^1_{-\infty}$ tels que $\pi^1_{-\infty}(p)a = \lambda(p)a$ pour tout $p \in P$.

Moyennant le théorème 3.1, la démonstration est tout à fait analogue à la démonstration bien connue pour les groupes finis.

Les cas intéressants se produisent lorsque P est discret, ou bien lorsque G est un groupe algébrique semi-simple et P un sous-groupe parabolique de G .

Enfin, par combinaison du lemme de Schur avec le théorème 3.2, on obtient des critères d'irréductibilité des représentations induites, qui généralisent certains résultats de la thèse de Bruhat [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. BRUHAT - Sur les représentations induites des groupes de Lie, Bull. Soc. Math. France, 84 (1956), 97-205.

[2] P. CARTIER - Quantum mechanical commutation relations and theta fonctions, in Algebraic groups and discontinuous subgroups, Amer. Math. Soc., 1966, 361-383.

[3] L. GÅRDING - Note on continuous representations of Lie groups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 33 (1947), 331-332.

[4] I. GELFAND and I. PIATESKII-SHAPIRO - Theory of representations and theory of automorphic functions, Amer. Math. Soc. Translations (2), 26 (1963), 173-200.

[5] R. GOODMAN - Analytic and entire vectors for representations of Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc., 143 (1969), 55-76.

[6] G. MACKEY - Induced representations of locally compact groups, Ann. of Maths., I : 55 (1952), 101-139 ; II : 58 (1953), 193-221.

[7] E. NELSON - Analytic vectors, Ann. of Maths., 70 (1959), 572-615.

[8] N. POULSEN - On C^∞-vectors and intertwining bilinear forms for representations of Lie groups, Journ. Funct. Anal., 9 (1972), 87-120.

[9] N. POULSEN - Regularity aspects of the theory of infinite dimensional representations of Lie groups, Thèse de Doctorat, M.I.T., Cambridge, Mass. USA, 1970.

[10] L. SCHWARTZ - Sous-espaces hilbertiens et noyaux associés ; applications aux représentations des groupes de Lie, in "Deuxième Colloque CBRM sur l'Analyse Fonctionnelle" Liège 1964, 153-163, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

L'ouvrage suivant :

G. WARNER - Harmonic Analysis on semi-simple Lie groups I, Grundlehren vol. 188, Springer-Verlag, Berlin, 1972,

contient un chapitre fort complet sur les vecteurs différentiables et analytiques, et une bibliographie fort étendue.