SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-FRANÇOIS BOUTOT

Frobenius et cohomologie locale

Séminaire N. Bourbaki, 1976, exp. nº 453, p. 1-19

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1974-1975__17__1_0>

Séminaire BOURBAKI
27e année, 1974/75, n° 453

FROBENIUS ET COHOMOLOGIE LOCALE

[d'après R. HARTSHORNE et R. SPEISER,

M. HOCHSTER et J. L. ROBERTS, C. PESKINE et L. SZPIRO]

par Jean-François BOUTOT

0. Introduction

La plus grande partie de cet exposé est consacrée à l'étude de la cohomologie des ouverts de l'espace projectif en caractéristique $p > 0$, d'après Hartshorne-Speiser [5] et Peskine-Szpiro [19]. Cependant on trouvera aussi au paragraphe 5 un résumé des travaux de Hochster et Roberts [9] sur les invariants des groupes réductifs et au paragraphe 6 des résultats de Peskine et Szpiro sur les modules de dimension projective finie.

Le point commun entre ces divers sujets est l'utilisation massive qu'on y fait de l'endomorphisme de Frobenius $\lambda \mapsto \lambda^p$ d'un anneau noethérien A de caractéristique p . L'idée générale est qu'il permet de passer d'un idéal I de A à l'idéal $I^{(p^r)}$ engendré par les puissances p^r-ièmes des éléments de I . Comme le complété de A pour la topologie I-adique s'identifie à $\varprojlim A/I^{(p^r)}$, on pourra passer du fermé $V(I)$ à un voisinage formel et comme on a $\bigcap I^{(p^r)} = 0$, du moins si A est intègre et $I \neq A$, on pourra montrer que certains groupes sont nuls.

1. Cohomologie des ouverts de l'espace projectif en caractéristique p

Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, $\mathbb{P}^n$ l'espace projectif de dimension n sur k et Y un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^n$. On va voir que la cohomologie des faisceaux cohérents sur l'ouvert $\mathbb{P}^n - Y$ dépend de l'action de Frobenius sur Y . Pour énoncer les résultats nous allons introduire une notion ad hoc de profondeur.

Soient y un point de Y, $A = \mathcal{O}_{Y,y}$ l'anneau local en ce point, $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A et $\hat{A}$ le complété de A pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Choisissons dans $\hat{A}$ un corps de représentants $K \simeq A/\mathfrak{m}$; soit $\bar{K}$ la clôture parfaite de K et $\bar{A} = A \otimes_K \bar{K}$. L'endomorphisme de Frobenius $F : \bar{A} \to \bar{A}$, défini par $F(a) = a^p$ pour $a \in \bar{A}$, induit un endomorphisme des groupes de cohomologie locale $F : H^i_{\mathfrak{m}}(\bar{A}) \to H^i_{\mathfrak{m}}(\bar{A})$. On appelle partie semi-simple de la cohomologie locale le $\bar{K}$-espace vectoriel :

$$H^i_{\mathfrak{m}}(\bar{A})_s = \bigcap_{n \geq 0} \mathrm{Im}\{ F^n : H^i_{\mathfrak{m}}(\bar{A}) \to H^i_{\mathfrak{m}}(\bar{A}) \} .$$

On montrera que c'est un $\bar{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

On appelle F-profondeur de Y le plus grand entier $j \geq 0$ tel que pour tout point y (pas nécessairement fermé) de Y on ait

$$H^i_{\mathfrak{m}_y}(\bar{\mathcal{O}}_{Y,y})_s = 0 \qquad \text{si } i < j - \dim\overline{\{y\}} ,$$

où $\overline{\{y\}}$ est l'adhérence de y dans Y.

Il n'est pas clair *a priori* que cette définition ait un sens indépendamment des choix des corps de représentants des $\hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$. Cependant c'est une conséquence du théorème suivant :

THÉORÈME DE FINITUDE GLOBAL.- *Pour tout entier* $t < n$, *les conditions suivantes sont équivalentes* :

(1) *Pour tout faisceau cohérent* $\mathcal{F}$ *sur* $\mathbb{P}^n - Y$, *les* k-*espaces vectoriels* $H^i(\mathbb{P}^n - Y, \mathcal{F})$ *sont de dimension finie si* $i \geq n-t$.

(2) *Pour tout faisceau cohérent* $\mathcal{F}$ *sur* $\mathbb{P}^n - Y$, *il existe un entier* ℓ_0 *tel que* $H^i(\mathbb{P}^n - Y, \mathcal{F}(\ell)) = 0$ *si* $\ell > \ell_0$ *et* $i \geq n-t$.

(3) *Les faisceaux* $\mathcal{H}^i_Y(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ *sont nuls si* $i > n-t$.

(4) *On a* $\text{F-prof}(Y) \geq t$.

Remarques.- a) Quel que soit Y , on a $F\text{-prof}(Y) \geq 0$ et $F\text{-prof}(Y) = F\text{-prof}(Y_{red})$. De plus si d est le minimum des dimensions des composantes irréductibles de Y , on a $F\text{-prof}(Y) \leq d$. Cependant $F\text{-prof}(\emptyset) = \infty$.

b) On a $F\text{-prof}(Y) \geq 1$, si et seulement si Y n'a pas de point isolé.

c) Soit t un entier tel que, pour toute composante irréductible Z de Y , on ait $t \leq \dim(Z)$ et que Y vérifie la condition S_t [autrement dit, pour tout $y \in Y$, on a $\text{prof}(\mathcal{O}_{Y,y}) \geq \min(t, \dim(\mathcal{O}_{Y,y}))$], alors on a $F\text{-prof}(Y) \geq t$.

COROLLAIRE 1.- Les k-espaces vectoriels $H^{n-1}(\mathbb{P}^n - Y, \mathcal{F})$ sont de dimension finie pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{P}^n - Y$, si et seulement si Y n'a pas de point isolé.

COROLLAIRE 2.- Supposons que Y vérifie la condition S_t [par exemple que Y est localement intersection complète] et que toute composante irréductible de Y est de dimension au moins t . Alors, pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{P}^n - Y$ et pour tout entier $i \geq n - t$, les k-espaces vectoriels $H^i(\mathbb{P}^n - Y, \mathcal{F})$ sont de dimension finie.

THÉORÈME D'ANNULATION GLOBAL.- Supposons k séparablement clos. Alors on a :

(i) $H^n(\mathbb{P}^n - Y, \cdot) = 0$ si et seulement si Y est non vide.

(ii) $H^{n-1}(\mathbb{P}^n - Y, \cdot) = 0$ si et seulement si Y est connexe et $\dim(Y) \geq 1$.

(iii) Supposons Y connexe non vide et soit t un entier tel que $n > t \geq 2$. Alors $H^i(\mathbb{P}^n - Y, \cdot) = 0$ pour $i \geq n - t$ si et seulement si $F\text{-prof}(Y) \geq t$ et $H^i_{et}(Y, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ pour $1 \leq i \leq t - 1$.

[On dit que $H^i(\mathbb{P}^n - Y, \cdot) = 0$ si $H^i(\mathbb{P}^n - Y, \mathcal{F}) = 0$ pour tout faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{P}^n - Y$. On note H^i_{et} les groupes de cohomologie étale de Y .]

COROLLAIRE 3.- Supposons que Y est connexe de dimension $d > 0$ et possède un cône projetant de Cohen-Macaulay. Alors pour tout plongement de Y dans $\mathbb{P}^n$,

<u>on a</u> $H^i(\mathbb{P}^n - Y , \cdot) = 0$ <u>pour</u> $i \geq n - d$.

<u>Remarque</u>.- Aussi bien en ce qui concerne la finitude que l'annulation, les résultats obtenus ne dépendent pas du plongement particulier considéré, mais seulement de Y et de la dimension de l'espace projectif dans lequel il est plongé. A cet égard la situation en caractéristique zéro est tout à fait semblable (cf. Ogus [18] et l'exposé de Szpiro dans ce volume). On notera cependant que, si les énoncés (i) et (ii) du théorème d'annulation sont valables en caractéristique zéro, il n'en est pas de même des corollaires 2 et 3 (cf. [19], chap. III, 4.3).

<u>Historique</u>.- Tout commence avec la démonstration par Grothendieck [1] (1961) du critère (i) d'annulation de H^n , conjecturé par Lichtenbaum, et dont Kleiman donne par la suite une version plus générale [11] (1967). Puis Hartshorne [3] (1968) démontre l'analogue local de ce résultat ainsi que le critère (ii) d'annulation de H^{n-1} . Peskine et Szpiro en donneront l'analogue local dans leur thèse [19] (1971) en même temps que le corollaire 2 du théorème de finitude et son correspondant local. On trouve également de nombreux résultats partiels dans le livre de Hartshorne [4] (1970).

Les deux théorèmes ci-dessus sont dus à Hartshorne et Speiser [5] (1974). C'est leur démonstration que nous exposerons ici, son plan est assez semblable à celui de la démonstration de Ogus en caractéristique zéro. Cependant la démonstration des points cruciaux est toute différente, elle utilise de manière essentielle l'action de Frobenius sur la cohomologie, ce qui était également le cas dans les démonstrations de Peskine et Szpiro.

<u>Exemple</u>.- Soit k un corps séparablement clos de caractéristique $p > 0$ et soient Y le produit de deux courbes elliptiques sur k et $\varphi : Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ un plongement projectif de Y . Puisque Y est lisse et connexe de dimension 2 , on a $H^n(\mathbb{P}^n - Y , \cdot) = H^{n-1}(\mathbb{P}^n - Y , \cdot) = 0$ et $H^{n-2}(\mathbb{P}^n - Y , \mathcal{F})$ est de dimension finie pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{P}^n - Y$. De plus $H^{n-2}(\mathbb{P}^n - Y , .) = 0$ si et seulement si $H^1_{et}(Y , \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si l'invariant de Hasse des deux courbes elliptiques est nul.

Soit $C_Y \hookrightarrow \mathbb{P}^{n+1}$ un cône projetant projectif correspondant au plongement φ ; autrement dit, si I est un idéal homogène de $k[x_o,\dots,x_n]$ définissant Y

dans $\mathbb{P}^n$, soit $C_Y = \mathrm{Proj}\ k[x_o,\dots,x_{n+1}]/I\,k[x_o,\dots,x_{n+1}]$. Alors C_Y est un sous-schéma fermé irréductible de dimension 3 de $\mathbb{P}^{n+1}$, lisse partout sauf au sommet. De plus l'anneau local du sommet n'est pas de Cohen-Macaulay, mais cependant on a $\text{F-prof}(C_Y) = 3$ si $H^1_{et}(Y, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$.

2. Passage du local au global

Soit R un anneau local régulier de dimension n contenant un corps de caractéristique $p > 0$ et soit I un idéal de R . Soient $Z = \mathrm{Spec}(R/I)$ et x le point fermé de Z . Les analogues locaux des résultats du paragraphe 1 sont les suivants :

THÉORÈME DE FINITUDE LOCAL.- Pour tout entier $t < n$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Les R-modules $H^i_I(R)$ sont artiniens si $i \geq n-t$.

(ii) $\mathrm{Supp}(H^i_I(R)) \subset \{x\}$ si $i \geq n-t$.

(iii) $\text{F-prof}(Z - x) \geq t$.

THÉORÈME D'ANNULATION LOCAL.- Pour tout entier $t < n$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $H^i_I(R) = 0$ si $i \geq n-t$.

(ii) $\text{F-prof}(Z) \geq t+1$.

Montrons qu'on peut en déduire les résultats globaux. Soient $A = k[x_o,\dots,x_n]$, J un idéal homogène de A définissant Y dans $P = \mathbb{P}^n$ et $\mathfrak{m}$ l'idéal engendré par $x_o,\dots,x_n$. Soient L le fibré en droites canonique associé à $\mathcal{O}_P(1)$ sur P , U le complémentaire de la section nulle de L et $V = U \times_P Y$. La contraction de la section nulle $L \to \mathrm{Spec}(A)$ induit des isomorphismes $U \simeq \mathrm{Spec}(A) - V(\mathfrak{m})$ et $V \simeq \mathrm{Spec}(A/J) - V(\mathfrak{m}/J)$. D'où :

Lemme.- On a des suites exactes :

$$0 \to H^o_J(A) \to A \to \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} H^o(P-Y, \mathcal{O}_P(\ell)) \to H^1_J(A) \to 0$$

$$0 \to H^o_{\mathfrak{m}}(A/J) \to A/J \to \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} H^o(Y, \mathcal{O}_Y(\ell)) \to H^1_{\mathfrak{m}}(A/J) \to 0$$

et, pour tout $i \geq 1$, *des isomorphismes* :

$$H_J^{i+1}(A) \simeq \bigoplus_{\ell \in \mathbf{Z}} H^i(P-Y, \mathcal{O}_P(\ell)) ,$$

$$H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(A/J) \simeq \bigoplus_{\ell \in \mathbf{Z}} H^i(Y, \mathcal{O}_Y(\ell)) .$$

Démonstration du théorème de finitude global. On montre que les conditions (1) à (4) du théorème sont équivalentes à :

(5) $H_J^i(A)$ est à support dans $V(\mathfrak{m})$ pour $i > n-t$.

(6) $H_J^i(A)$ est artinien pour $i > n-t$.

suivant le leitfaden

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & & (6) \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dl, Leftrightarrow] & \\ (4) \arrow[r, Leftrightarrow] & (3) \arrow[r, Leftrightarrow] & (5) & & (1) . \arrow[dl, Rightarrow] \\ & & & (2) \arrow[ul, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

Les implications (4) $\Leftrightarrow$ (3) et (5) $\Leftrightarrow$ (6) sont respectivement le théorème d'annulation et le théorème de finitude locaux. On a (3) $\Leftrightarrow$ (5) , car U étant fidèlement plat sur P , (3) équivaut à $H_V^i(U, \mathcal{O}_U) = 0$ pour $i > n-t$. Les implications (6) $\Rightarrow$ (1) et (2) $\Rightarrow$ (5) résultent du lemme. Nous admettrons l'implication (1) $\Rightarrow$ (2) due à D. Gieseker (cf. [18], prop. 4.2).

Démonstration du théorème d'annulation global. On peut supposer k algébriquement clos et, pour déduire le résultat global du résultat local, il suffit de montrer :

(i) Y est non vide si et seulement si $H_{\mathfrak{m}}^0(A/J)_s = 0$.

(ii) Y est connexe si et seulement si $H_{\mathfrak{m}}^1(A/J)_s = 0$.

(iii) Pour tout $i \geq 1$, on a $H_{\mathfrak{m}}^{i+1}(A/J)_s \simeq H_{et}^i(Y, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbb{F}_p} k$.

Or Y est non vide si et seulement si $\dim(A/J) \geq 1$ et on a $H_{\mathfrak{m}}^0(A/J)_s = H_{\mathfrak{m}}^0((A/J)_{red})_s$, d'où (i). Pour vérifier (ii) et (iii), on remarque que la partie semi-simple de la cohomologie locale se trouve nécessairement en degré zéro, car l'action de Frobenius multiplie les degrés par p . Si Y est non vide, on a donc une suite exacte :

$$0 \to k \to H^0(Y, \mathcal{O}_Y)_s \to H_{\mathfrak{m}}^1(A/J)_s \to 0 ,$$

et, pour $i \geq 1$, des isomorphismes :

$$H^i(Y, \mathcal{O}_Y)_s \simeq H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(A/J)_s .$$

De plus la théorie d'Artin-Schreier fournit, pour $i \geq 0$, des isomorphismes (cf. [10], cor. 2.1) :

$$H^i(Y, \mathcal{O}_Y)_s \simeq H^i_{et}(Y, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{F}_p} k .$$

Enfin Y est connexe non vide si et seulement si $H^0_{et}(Y, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est de dimension 1 sur $\mathbb{F}_p$.

3. Le résultat clef

On suppose maintenant $R = k[[t_1, \ldots, t_n]]$, où k est un corps *parfait* de caractéristique $p > 0$. On note $X = \mathrm{Spec}(R)$, Z le fermé défini par un idéal I de R et $\hat{X}$ le schéma formel complété de X le long de Z . On note $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de R et x le point fermé de X .

La proposition suivante résulte par passage à la limite des énoncés habituels de dualité locale (cf. [19], chap. III, 2.2).

PROPOSITION.- *Soient* E *une enveloppe injective de* k *et* $D = \mathrm{Hom}_R(\cdot\, , E)$ *le foncteur dualisant correspondant. Alors on a, pour tout* $i \geq 0$, *des isomorphismes naturels* :

$$H^i_x(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}}) \simeq D\, H^{n-i}_I(R) .$$

En particulier $H^{n-i}_I(R)$ est un R-module artinien (resp. nul) si et seulement si son support est concentré en x et si $H^i_x(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}})$ est un R-module de type fini (resp. nul). Il est alors facile de déduire, par récurrence sur la dimension de R , les théorèmes de finitude et d'annulation locaux du résultat suivant :

THÉORÈME CLEF.- (i) *Pour tout* $i \geq 0$, *le* k-*espace vectoriel* $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)_s$ *est de dimension finie*.

(ii) *Soit* i *un entier tel que* $H^{n-i}_I(R)$ *soit à support dans* x . *Alors on a un isomorphisme canonique* :

$$H^i_x(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}}) \simeq R \otimes_k H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)_s .$$

Avant d'aborder la démonstration de ce théorème, nous ferons quelques <u>préliminaires d'algèbre</u> p-<u>linéaire</u>. Pour tout anneau A contenant k, on note F_A l'endomorphisme de A défini par $F_A(\lambda) = \lambda^p$, $\lambda \in A$. Pour tout entier $r \geq 0$, on note A_{F^r} le groupe A considéré comme A-module par l'intermédiaire de F_A^r et (A, p^r) la bi-A-algèbre A munie de la structure de A-module à gauche usuelle et de A-module à droite A_{F^r}.

<u>Lemme</u> 1.- <u>Si</u> A <u>est un anneau noethérien régulier</u>, F_A <u>est plat</u>. <u>Si de plus</u> A <u>est local complet à corps résiduel parfait</u>, F_A <u>est fini et plat</u>.

On se ramène au cas $A = k[[t_1,\ldots,t_n]]$ dans lequel c'est clair.

On dit qu'un endomorphisme de groupes f d'un A-module M est p-linéaire si $f(\lambda m) = \lambda^p f(m)$ pour $\lambda \in A$, $m \in M$. On appelle <u>partie semi-simple</u> de (M,f) le sous-k-espace vectoriel $M_s = \bigcap \mathrm{Im}(f^r)$ et <u>partie nilpotente</u> le sous-A-module $M_n = \bigcup \mathrm{Ker}(f^r)$. Ces parties sont stables par f.

Pour tout $r \geq 0$, on note $F_A^r M$ le A-module $(A, p^r) \otimes_A M$ muni de la structure à gauche, autrement dit tel que $\lambda(\mu \otimes m) = (\lambda\mu) \otimes m$ et $\lambda \otimes \mu m = \lambda(\mu^{p^r} \otimes m)$. Un endomorphisme p-linéaire f de M définit des homomorphismes de A-modules :

$$\varphi_r : F_A^r M \to M \quad , \qquad \varphi_r(\lambda \otimes m) = \lambda\, f^r(m) \ ,$$

$$\psi_r : F_A^r M \to F_A^{r-1} M \ , \qquad \psi_r(\lambda \otimes m) = \lambda \otimes f(m) \ .$$

On note $G_A(M,f) = \varprojlim F_A^r M$. Chacun des A-modules $F_A^r M$ est muni d'un endomorphisme p-linéaire $F_A \otimes f$, par passage à la limite $G_A(M,f)$ est ainsi canoniquement muni d'un endomorphisme p-linéaire g.

On dit que φ_1 est le <u>linéarisé</u> de f. Si φ_1 est bijectif, il en est de même de tous les φ_r et de l'homomorphisme canonique $G_A(M,f) \to M$.

<u>Lemme</u> 2.- <u>Supposons maintenant</u> $A = R$. <u>Alors le linéarisé de l'endomorphisme</u> p-<u>linéaire</u> g <u>de</u> $G_R(M,f)$ <u>est bijectif et on a</u>

$$G_R(M,f)_s = G_k(M_s , f|M_s) .$$

En effet, d'après le lemme 1, le produit tensoriel par (R,p) commute à la limite projective, donc

$$\varphi_1 : (R,p) \otimes_R G_R(M,f) = \varprojlim F_R^{r+1}M \to G_R(M,f) = \varprojlim F_R^r M$$

est bijectif. Quant à l'égalité, on vérifie que chacun des deux membres s'identifie à l'ensemble des éléments de $G_R(M,f)$ de la forme $\{1 \otimes m_r\}$ avec $m_r \in M_s$ et $f(m_r) = m_{r-1}$.

Dans notre cas F_R induit des endomorphismes p-linéaires des R-modules $H^i_{\mathfrak{m}}(R/I)$ et $H^i_x(\hat{X} , \mathcal{O}_{\hat{X}})$ que l'on notera respectivement f et g .

<u>Lemme</u> 3.- <u>On a, pour tout</u> $i \geq 0$, <u>un isomorphisme de</u> R-<u>modules</u>

$$H^i_x(\hat{X} , \mathcal{O}_{\hat{X}}) \simeq G_R(H^i_{\mathfrak{m}}(R/I) , f)$$

<u>compatible avec les endomorphismes</u> p-<u>linéaires des deux membres</u>.

En effet la suite des idéaux $I^{(p^r)}$, engendrés par les puissances p^r-ièmes des éléments de I , définit la topologie I-adique de R et on a :

$$H^i_x(\hat{X} , \mathcal{O}_{\hat{X}}) \simeq \varprojlim H^i_{\mathfrak{m}}(R/I^{(p^r)}) .$$

Mais $R/I^{(p^r)} = (R,p^r) \otimes_R (R/I)$ et (R,p^r) est plat sur R , d'où

$$H^i_{\mathfrak{m}}(R/I^{(p^r)}) = (R,p^r) \otimes_R H^i_{\mathfrak{m}}(R/I) .$$

<u>Lemme</u> 4.- <u>Soit</u> i <u>un entier tel que</u> $H^{n-i}_I(R)$ <u>soit à support dans</u> x , <u>alors</u> $H^i_x(\hat{X} , \mathcal{O}_{\hat{X}})$ <u>est un</u> R-<u>module séparé et complet pour la topologie</u> $\mathfrak{m}$-<u>adique</u>.

En effet $H^{n-i}_I(R)$ est alors limite inductive (indexée par $\mathbb{N}$) de R-modules de longueur finie ; son dual $H^i_x(\hat{X} , \mathcal{O}_{\hat{X}})$ est limite projective de R-modules de type fini, donc est séparé et complet.

Ainsi le théorème clef résulte de deux théorèmes d'algèbre p-linéaire :

THÉORÈME "D'ANNULATION".- <u>Soient</u> M <u>un</u> R-<u>module</u> séparé et complet <u>et</u> f <u>un endomorphisme</u> p-<u>linéaire de</u> M <u>dont le linéarisé est bijectif</u>. <u>Alors on a un isomorphisme canonique</u> $M \simeq R \hat{\otimes}_k M_s$ [on note $R \hat{\otimes}_k M_s$ le complété de $R \otimes_k M_s$ pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique].

THÉORÈME DE FINITUDE.- Soient M un R-module artinien et f un endomorphisme p-linéaire de M. Alors M_s est un k-espace vectoriel de dimension finie et $f|M_s$ est bijectif [en particulier $G_k(M_s, f|M_s) = M_s$].

Remarque.- On voit que les modules munis d'un endomorphisme p-linéaire dont le linéarisé est bijectif jouent en caractéristique p le même rôle que les modules à connexion intégrable en caractéristique zéro. Les deux théorèmes ci-dessus remplacent respectivement le théorème de constance des connexions intégrables sur les modules séparés et complets de Ogus et le théorème de finitude pour la cohomologie de De Rham locale de Hartshorne (cf. Exposé 458 de Szpiro).

4. Démonstration des théorèmes d'algèbre p-linéaire

Le théorème "d'annulation". Soient M un R-module séparé et complet et f un endomorphisme p-linéaire de M dont le linéarisé est bijectif. Soient $\bar{M} = M \otimes_R k$ et $\bar{f}$ l'endomorphisme p-linéaire de $\bar{M}$ induit par f.

Lemme 1.- L'endomorphisme $\bar{f}$ est bijectif et on a un isomorphisme canonique $R \hat{\otimes}_k \bar{M} \simeq M$.

Démonstration. En tensorisant à gauche par k l'isomorphisme $\varphi_r : F_R^r M \to M$, on obtient un isomorphisme $\bar{\varphi}_r : F_k^r \bar{M} \to \bar{M}$. Puisque k est parfait, l'application canonique $\theta_r : \bar{M} \to F_k^r \bar{M}$ $(m \mapsto 1 \otimes m)$ est bijective ; donc $\bar{f} = \bar{\varphi}_1 \circ \theta_1$ est bijectif.

En tensorisant φ_r par $A/\mathfrak{m}^{(p^r)}$, on obtient un isomorphisme $A/\mathfrak{m}^{(p^r)} \otimes_k F_k^r \bar{M} \to M/\mathfrak{m}^{(p^r)} M$ et, en composant avec $\mathrm{id} \otimes \bar{\varphi}_r^{-1}$ un isomorphisme $A/\mathfrak{m}^{(p^r)} \otimes_k \bar{M} \to M/\mathfrak{m}^{(p^r)} M$. On en déduit l'isomorphisme cherché par passage à la limite projective.

Lemme 2.- L'application canonique $\alpha : M \to \bar{M}$ induit un isomorphisme $\alpha_s : M_s \to \bar{M}$.

Démonstration. Soit $x \in M_s$ tel que $\alpha(x) = 0$. Pour tout $r \geq 0$, il existe

$y \in M$ tel que $x = f^r(y)$. Puisque $\bar{f}$ est injectif, on a $\alpha(y) = 0$, autrement dit $y \in \mathfrak{m}M$. Par suite $x \in \mathfrak{m}^{(p^r)}M$ pour tout $r \geq 0$, donc $x = 0$.

Soit $\bar{x} \in \bar{M}$; puisque $\bar{f}$ est bijectif, il existe une suite unique d'éléments $\bar{x}_r$ de $\bar{M}$ tels que $\bar{x}_o = \bar{x}$ et $\bar{f}(\bar{x}_r) = \bar{x}_{r-1}$ pour tout $r \geq 0$. Alors, pour toute famille x_r d'éléments de M relevant les $\bar{x}_r$, la suite $f^r(x_r)$ est une suite de Cauchy dont la limite x relève $\bar{x}$ et appartient à M_s .

Le <u>théorème de finitude</u>. Soient M un R-module artinien et f un endomorphisme p-linéaire de M . On vérifie facilement que l'on a une suite exacte :

$$0 \to (M_n)_s \to M_s \to (M/M_n)_s \ .$$

On distinguera donc les cas où f est injectif et où $M = M_n$.

<u>Lemme</u> 1.- <u>Si</u> M <u>est artinien et</u> f <u>injectif</u>, M_s <u>est un</u> k-<u>espace vectoriel de dimension finie</u>.

<u>Démonstration</u>. Pour tout $r \geq 0$, soit $M_{(r)} = \{x \in M \text{ tels que } \mathfrak{m}^{(p^r)}.x = 0\}$; on a $M = \cup M_{(r)}$. Puisque f est injectif, pour tout élément x de M_s , il existe une suite unique d'éléments x_i de M_s tels que $x = f^i(x_i)$. De plus si $x \in M_{(r)}$, on a nécessairement $x_i \in M_{(o)}$ pour $i \geq r$. Donc
$M_s \subset \cup f^r(M_s \cap M_{(o)})$ et $M_s \cap M_{(o)} \subset f(M_s \cap M_{(o)})$. Mais $M_s \cap M_{(o)}$ est un k-espace vectoriel de dimension finie, donc $M_s \cap M_{(o)} = f(M_s \cap M_{(o)}) = M_s$.

<u>Lemme</u> 2.- <u>Si</u> M <u>est artinien et si</u> $M = M_n$, <u>il existe un entier</u> N <u>tel que</u> $f^N = 0$, <u>en particulier</u> $M_s = 0$.

<u>Démonstration</u>. Quitte à remplacer M par $f^r(M)$ pour $r >> 0$, on peut supposer que M est engendré par $f(M)$. On montre alors par récurrence sur la dimension de R que $M = 0$. Pour cela il suffit de montrer qu'il existe un élément non nul λ de R tel que $\lambda M = 0$. Cela résulte des deux lemmes suivants :

<u>Lemme</u> 3.- <u>Soit</u> $\lambda \in R$ <u>tel que</u> $\lambda.\mathrm{Ker}\, f = 0$, <u>alors on a</u> $\lambda^2.M_n = 0$.

<u>Démonstration</u>. Si $x \in M$ et si $\lambda^2 f(x) = 0$, on a $f(\lambda x) = \lambda^p f(x) = 0$, donc $\lambda^2 x = 0$. Or tout élément de M_n est tel que $f^r(x) = 0$ pour $r >> 0$, <u>a fortiori</u>

$\lambda^2 f^r(x) = 0$ donc $\lambda^2 x = 0$.

Lemme 4.- *Si* M *est artinien et engendré par* $f(M)$, *il existe un élément non nul* λ *de* R *tel que* $\lambda.\mathrm{Ker}\, f = 0$

Démonstration. Si $\varphi : F_R M \to M$ est le linéarisé de f , il suffit de trouver $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda.\mathrm{Ker}\,\varphi = 0$. De la suite exacte de R-modules artiniens :

$$0 \to \mathrm{Ker}\,\varphi \to F_R M \to M \to 0 ,$$

on déduit, en appliquant un foncteur dualisant $D = \mathrm{Hom}_R(\cdot , E)$, une suite exacte de R-modules de type fini :

$$0 \leftarrow D(\mathrm{Ker}\,\varphi) \leftarrow D(F_R M) \leftarrow DM \leftarrow 0 .$$

Par ailleurs un isomorphisme de E avec $H^n_{\mathfrak{m}}(R)$ définit sur E un endomorphisme p-linéaire dont le linéarisé est bijectif, ce qui permet d'identifier $D(F_R M)$ et $F_R(DM)$. Mais les R-modules DM et $F_R(DM)$ ont même rang, donc $D(\mathrm{Ker}\,\varphi)$ est de torsion et il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda.D(\mathrm{Ker}\,\varphi) = 0$. Par suite $\lambda.DD(\mathrm{Ker}\,\varphi) = \lambda.\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$.

5. Sous-anneaux purs et invariants des groupes réductifs

Les résultats de ce paragraphe sont dus à M. Hochster et J. L. Roberts [9].

On dit qu'un sous-anneau A d'un anneau B est *pur* si pour tout A-module M l'homomorphisme $M \to M \otimes_A B$ est injectif. On vérifie facilement que si B est noethérien (resp. intégralement clos), il en est de même de tout sous-anneau pur de B .

THÉORÈME 1.- *Soient* B *un anneau noethérien régulier contenant un corps de caractéristique* $p > 0$ *et* A *un sous-anneau pur de* B . *Alors* A *est de Cohen-Macaulay*.

Pour démontrer le théorème on se ramène au cas où B est intègre et où A est un anneau local noethérien complet de dimension $n > 0$ et d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ tel que $A_{\mathfrak{p}}$ est de Cohen-Macaulay pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A différent de $\mathfrak{m}$. Alors les A-modules $H^i_{\mathfrak{m}}(A)$ sont de longueur finie pour $i = 0,\dots,n-1$ (cf. [2], VIII-II-3).

Du fait que A est un sous-anneau pur de B , il résulte facilement que les homomorphismes $H^i_{\mathfrak{m}}(A) \to H^i_{\mathfrak{m}B}(B)$ sont injectifs. Il suffit donc de montrer que le sous-B-module N de $H^i_{\mathfrak{m}B}(B)$ engendré par $H^i_{\mathfrak{m}}(A)$ est nul pour $i = 0,\dots,n-1$.

L'endomorphisme p-linéaire f de $H^i_{\mathfrak{m}B}(B)$ induit par F_B laisse N stable et il résulte de la platitude de (B,p) sur B que le linéarisé $\varphi_1 : F_B N \to N$ de $f|N$ est injectif. Sachant que N est un B-module de torsion, on conclut par le

Lemme.- *Si* B *est intègre et régulier et si* N *est un* B-*module de type fini muni d'un endomorphisme* p-*linéaire dont le linéarisé est injectif, on a* $\mathrm{Ann}_B(N) = 0$ *ou* B .

Démonstration. Puisque φ_1 est injectif, il en est de même des $\varphi_r : F^r_B N \to N$, on a donc $\mathrm{Ann}_B(N) \subset \mathrm{Ann}_B(F^r_B N)$ quel que soit $r \geq 0$. Mais, comme F^r_B est plat et N de type fini sur B , on a aussi $\mathrm{Ann}_B(F^r_B N) = F^r_B\ \mathrm{Ann}_B(N).B$, donc $\mathrm{Ann}_B(F^r_B N) \subset (\mathrm{Ann}_B(N))^{p^r}$ quel que soit $r \geq 0$, d'où le lemme.

Rappelons qu'un groupe algébrique affine G sur un corps k est dit *linéairement réductif* si toute représentation de dimension finie de G est somme directe de représentations irréductibles. Les groupes linéairement réductifs ont été classifiés par Nagata [17] ; si k est algébriquement clos, on a :

a) si $\mathrm{car}(k) = p > 0$, G est linéairement réductif si et seulement si la composante neutre G_o de G est un tore et si G/G_o est d'ordre premier à p .

b) si $\mathrm{car}(k) = 0$, G est linéairement réductif si et seulement si le radical de G_o est un tore (alors G_o est isogène au produit direct d'un tore et d'un groupe semi-simple).

THÉORÈME 2.- *Soient* k *un corps,* G *un groupe algébrique linéairement réductif sur* k *et* B *une* k-*algèbre noethérienne régulière. Soit* $\sigma : G \times_k \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(B)$ *une action de* G *sur* B *définie sur* k . *Alors l'anneau des invariants* B^G *est de Cohen-Macaulay*.

Le groupe G étant linéairement réductif, il existe une rétraction B^G-linéaire $\rho : B \to B^G$, l'opérateur de Reynolds (cf. [14], chap. 1, § 1), en particulier B^G est un sous-anneau pur de B . Ainsi si k est de caractéristique $p > 0$, le théorème 2 est un corollaire du théorème 1. Malheureusement, le cas le plus intéressant est celui où k est de caractéristique zéro (et G semi-simple). Pour démontrer le théorème on commence par se ramener à une situation graduée et dans cette situation on arrive à démontrer un cas particulier du théorème 1 en toute caractéristique :

THÉORÈME 3.- <u>Soient</u> $k \subset K$ <u>une extension de corps et</u> $B = K[t_1,\dots,t_m]$ <u>un anneau de polynômes à coefficients dans</u> K. <u>Soit</u> A <u>une sous-k-algèbre graduée de type fini de</u> B <u>telle que</u> $A_o = k$ <u>et soit</u> $\mathfrak{m} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$. <u>Supposons que</u> A <u>est un sous-anneau pur de</u> B <u>et que</u> $A_\mathfrak{p}$ <u>est de Cohen-Macaulay pour tout idéal premier</u> $\mathfrak{p}$ <u>de</u> A <u>différent de</u> $\mathfrak{m}$. <u>Alors</u> A <u>est de Cohen-Macaulay</u>.

La démonstration procède par une réduction assez délicate de la caractéristique zéro à la caractéristique p. Les ennuis viennent de ce que la pureté ne se conserve pas dans cette réduction et, comme $H^i_{\mathfrak{m}B}(B)$ n'est pas en général un B-module de type fini, l'injection $H^i_{\mathfrak{m}}(A) \to H^i_{\mathfrak{m}B}(B)$ ne se conserve pas non plus. En analysant soigneusement la situation Hochster et Roberts se ramènent à des énoncés ne faisant intervenir que des modules de type fini ; pour cela ils approximent la cohomologie locale par la cohomologie d'un complexe de Koszul. Ils peuvent alors passer de la caractéristique zéro à la caractéristique p par des arguments de platitude générique et démontrer les énoncés voulus en caractéristique p à l'aide de Frobenius.

<u>Remarque</u>.- Murthy [15] a montré que si un anneau A est factoriel, de Cohen-Macaulay et quotient d'un anneau régulier, alors A est de Gorenstein (on se ramène au cas où A est de plus local de dimension ≥ 2 et où l'ouvert U complémentaire du point fermé de $\mathrm{Spec}(A)$ est de Gorenstein, alors le module ω_A des "différentielles dualisantes" est localement libre de rang 1 sur U, il est donc libre).

Si maintenant k est un corps de caractéristique zéro et G un k-groupe algébrique connexe semi-simple agissant sur l'anneau de polynômes $B = k[t_1,\dots,t_m]$ en préservant les degrés, l'anneau des invariants B^G est factoriel (car G n'a pas de caractère non trivial à valeurs dans $k^* = B^*$), par suite B^G est un anneau de Gorenstein.

Applications géométriques. Le théorème 2 permet de retrouver en caractéristique zéro un certain nombre de résultats connus sur les schémas de Schubert. On sait qu'en toute caractéristique les cônes projetant (pour le plongement de Plücker) des sous-schémas de Schubert des grassmanniennes sont de Cohen-Macaulay (cf. Hochster [7], Laksov [13], Musili [16]). Dans le cas des grassmanniennes elles-mêmes, ils sont par ailleurs factoriels (Samuel [22]), donc de Gorenstein.

6. Théorème d'intersection pour les modules de dimension projective finie

Le lemme 1 du paragraphe 3 qui s'est révélé essentiel dans tout ce qui précède possède une réciproque et une généralisation :

THÉORÈME 1.- *Soient* A *un anneau local noethérien contenant un corps de caractéristique* $p > 0$ *et* M *un* A-*module de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) M *est de dimension projective finie sur* A .

(ii) $\mathrm{Tor}_i^A(M\, ,\, A_{F^r}) = 0$ *pour tout* $i > 0$ *et tout* $r > 0$.

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est due à Peskine et Szpiro [19], et la réciproque à J. Herzog [6].

COROLLAIRE (Kunz [12]).- *L'anneau* A *est régulier si et seulement si* F_A *est plat.*

Avant de montrer le parti qu'on peut tirer du théorème 1, rappelons la formule des dimensions des intersections de Serre [23] :

THÉORÈME 2.- *Soit* R *un anneau local régulier et soient* M *et* N *deux* R-*modules de type fini tels que* $M \otimes_R N$ *soit de longueur finie. On a alors*
$\dim M + \dim N \leq \dim R$.

Si $M \neq 0$, on a $\dim R = \dim\operatorname{proj} M + \operatorname{prof} M$ et $\operatorname{prof} M \leq \dim M$, d'où en particulier $\dim N \leq \dim\operatorname{proj} M$. Peskine et Szpiro ont montré que ce dernier résultat reste vrai sans hypothèse de régularité, plus précisément :

THÉORÈME 3.- *Soit* A *un anneau local noethérien contenant un corps de caractéristique* $p > 0$ *et soient* M *et* N *deux* A-*modules de type fini tels que* $M \otimes_A N$ *soit de longueur finie et non nul. On a alors* $\dim N \leq \dim\operatorname{proj} M$.

<u>Démonstration</u>. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A . On peut évidemment supposer que M est de dimension projective finie et il suffit de montrer que $H^i_{\mathfrak{m}}(N) = 0$ si $i > \dim \operatorname{proj}(M)$. Soit $E^{\cdot}$ une résolution injective minimale de N , on a $H^i_{\mathfrak{m}}(N) = H^i(H^o_{\mathfrak{m}}(E^{\cdot}))$. Si l'on note

$$K^i = \operatorname{Ker}\{ H^o_{\mathfrak{m}}(E^i) \to H^o_{\mathfrak{m}}(E^{i+1}) \} ,$$

$$C^i = \operatorname{Im}\{ H^o_{\mathfrak{m}}(E^{i-1}) \to H^o_{\mathfrak{m}}(E^i) \} ,$$

il s'agit donc de montrer que $K^i = C^i$ si $i > \dim \operatorname{proj} M$.

Ecrivons $L = M/Q$ où L est un A-module libre de type fini et $Q \subset \mathfrak{m}L$. Si l'on pose $Q_j = \operatorname{Ker}\{F^j_A L \to F^j_A M\}$ et $M_j = L/Q_j$ (ce qui a un sens car $F^j_A L = L$), on a pour tout $j \geq 0$:

(a) $Q_j \subset \mathfrak{m}^{p^j} L$,

(b) $\operatorname{Supp}(M_j) = \operatorname{Supp}(M)$,

(c) $\dim \operatorname{proj}(M_j) = \dim \operatorname{proj}(M)$.

Les assertions (a) et (b) sont claires et l'assertion (c) résulte du théorème 1. Pour montrer que $K^i = C^i$, il suffit de montrer que $\operatorname{Hom}_A(L , K^i) = \operatorname{Hom}_A(L , C^i)$, et d'après (a) il suffit pour cela de montrer que

$$\operatorname{Hom}_A(M_j , C^i) = \operatorname{Hom}_A(M_j , K^i) ,$$

quels que soient $j \geq 0$ et $i > \dim \operatorname{proj} M$.

Comme $\operatorname{Supp} N \cap \operatorname{Supp} M_j = V(\mathfrak{m})$, on montre que, quels que soient i et j , on a :

$$\operatorname{Hom}_A(M_j , E^i) = \operatorname{Hom}_A(M_j , H^o_{\mathfrak{m}}(E^i)) .$$

Par suite si $i > \dim \operatorname{proj} M = \dim \operatorname{proj} M_j$, on a une suite exacte :

$$\operatorname{Hom}_A(M_j , H^o_{\mathfrak{m}}(E^{i-1})) \to \operatorname{Hom}_A(M_j ,H^o_{\mathfrak{m}}(E^i)) \to \operatorname{Hom}_A(M_j ,H^o_{\mathfrak{m}}(E^{i+1})) .$$

On en déduit facilement l'égalité voulue.

COROLLAIRE (conjecture d'Auslander).- <u>Soient</u> A <u>un anneau local noethérien contenant un corps de caractéristique</u> $p > 0$ <u>et</u> $M \neq 0$ <u>un</u> A-<u>module de type fini et de dimension projective finie</u>. <u>Alors toute suite</u> M-<u>régulière est</u> A-<u>régulière</u>.

<u>Démonstration</u>. Par récurrence sur la longueur de la suite, on se ramène à montrer que tout élément M-régulier est A-régulier, ou ce qui revient au même, que tout idéal premier $\mathfrak{q}$ associé à A est contenu dans un idéal premier associé à M . Par récurrence sur $\dim A$, le seul cas à considérer est celui où le seul idéal premier de $\mathrm{Supp}(M)$ contenant $\mathfrak{q}$ est l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A . Alors $A/\mathfrak{q} \otimes_A M$ est de longueur finie, donc $\dim A/\mathfrak{q} \leq \dim \mathrm{proj}\, M$. Mais on a $\dim A/\mathfrak{q} \geq \mathrm{prof}\, A$ et $\dim \mathrm{proj}\, M + \mathrm{prof}\, M = \mathrm{prof}\, A$, donc $\mathrm{prof}\, M = 0$. Autrement dit $\mathfrak{m}$ est associé à M .

En fait Peskine et Szpiro démontrent aussi le théorème 3, et par conséquent son corollaire, pour les anneaux locaux essentiellement de type fini sur un corps de caractéristique zéro. Ils procèdent par une réduction de la caractéristique zéro à la caractéristique $p > 0$ utilisant le théorème d'approximation de M. Artin. Ils remarquent d'autre part que le théorème 3 résulterait de la conjecture des Tor de M. Auslander et que l'on peut démontrer un théorème analogue en remplaçant M par un complexe parfait [20] (cf. aussi P. Roberts [21]).

Récemment Hochster [8] a montré que le théorème 3 restait vrai pour tout anneau local noethérien contenant un corps.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. GROTHENDIECK - Local Cohomology, Séminaire Harvard 1961, notes de R. Hartshorne, Lecture Notes in Math. 41, Springer-Verlag, 1967.

[2] A. GROTHENDIECK - Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux, SGA 2-1962, North-Holland Publ. Cy, Amsterdam, 1968.

[3] R. HARTSHORNE - Cohomological dimension of algebraic varieties, Ann. of Maths. 88 (1968), p. 403-450.

[4] R. HARTSHORNE - Ample Subvarieties of Algebraic Varieties, Lecture Notes in Math. 156, Springer-Verlag, 1970.

[5] R. HARTSHORNE and R. SPEISER - Local cohomological dimension in characteristic p, à paraître.

[6] J. HERZOG - Ringe der Charakteristik p und Frobenius-funktoren, à paraître.

[7] M. HOCHSTER - Grassmannians and their Schubert subvarieties are arithmetically Cohen-Macaulay, J. of Algebra, 25 (1973), 40-57.

[8] M. HOCHSTER - Deep local rings, à paraître.

[9] M. HOCHSTER and J. L. ROBERTS - Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay, Advances in Math., 13 (1974), 115-175.

[10] N. KATZ - Une formule de congruence pour la fonction ζ, Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique (SGA 7.II), 401-437, Lecture Notes in Math. 340, Springer-Verlag, 1973.

[11] S. L. KLEIMAN - On the vanishing of $H^n(X,\mathcal{F})$ for an n-dimensional variety, Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967), 940-944.

[12] E. KUNZ - Characterizations of regular local rings of characteristic p, Amer. J.of Math., 91 (1969), 772-784.

[13] D. LAKSOV - The arithmetic Cohen-Macaulay character of Schubert schemes, Acta Math., 129 (1972), 1-9.

[14] D. MUMFORD - Geometric Invariant Theory, Ergebnisse der Math. 34, Springer-Verlag, 1965.

[15] M. P. MURTHY - A note on factorial rings, Arch. Math., 15 (1964), 418-420.

[16] C. MUSILI - Postulation formula for Schubert varieties, J. Indian Math. Soc., 36 (1972), 143-171.

[17] M. NAGATA - Complete reducibility of rational representations of a matrix group, J. Math. Kyoto Univ., 1 (1961), 87-99.

[18] A. OGUS - Local cohomological dimension of algebraic varieties, Ann. of Maths, 98 (1973), 327-365.

[19] C. PESKINE et L. SZPIRO - Dimension projective finie et cohomologie locale, Publ. Math. I.H.E.S., 42 (1973), 47-119.

[20] C. PESKINE et L. SZPIRO - Sygyzies et multiplicités, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 278, Série A, 1421-1424, 1974.

[21] P. ROBERTS - Applications of dualizing complexes, à paraître.

[22] P. SAMUEL - Lectures on Unique Factorization Domains, notes de P. Murthy, Tata Institute 30, Bombay, 1964.

[23] J.-P. SERRE - Algèbre Locale. Multiplicités, rédigé par P. Gabriel, 2e édition, Lecture Notes in Math. 11, Springer-Verlag, 1965.

[24] L. SZPIRO - Cohomologie des ouverts de l'espace projectif sur un corps de caractéristique zéro [d'après A. Ogus], Sém. Bourbaki, exposé 458, novembre 1974, ce volume.