SÉMINAIRE N. BOURBAKI

NESSIM SIBONY

Noyau de Bergman et applications biholomorphes dans des domaines strictement pseudo-convexes

Séminaire N. Bourbaki, 1976, exp. n° 463, p. 145-158
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1974-1975__17__145_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

NOYAU DE BERGMAN ET APPLICATIONS BIHOLOMORPHES DANS DES DOMAINES STRICTEMENT PSEUDO-CONVEXES

[d'après Charles FEFFERMAN]

par Nessim SIBONY

Introduction

Soient D_1 , $D_2 \subset \mathbf{C}^n$ $(n \geq 2)$ deux domaines strictement pseudo-convexes, à frontière de classe $\mathscr{C}^\infty$. On ne connaît pas de conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une application biholomorphe de D_1 dans D_2 . Cependant C. Fefferman, en démontrant le résultat suivant, résoud une vieille conjecture :

THÉORÈME 1.- Toute application biholomorphe $F : D_1 \to D_2$ de domaines strictement pseudo-convexes à bord $\mathscr{C}^\infty$ se prolonge en un difféomorphisme $\bar{F} : \bar{D}_1 \to \bar{D}_2$.

La démonstration de ce théorème est un pas en avant dans le problème de classification. En effet, elle justifie a posteriori l'introduction d'invariants $w_N(p)$ attachés aux points du bord par un procédé qui remontait à Poincaré et qui reposait sur cette conjecture. Donnons ici la description de ces invariants.

Description des invariants $w_N(p)$. Soit p un point du bord d'un domaine strictement pseudo-convexe D . Dans un système de coordonnées convenables avec p pour origine, ∂D est décrit par une relation du type

$$\{\mathrm{Re}\, z_1 = f^p(\mathrm{Im}\, z_1 , z_2 , \dots , z_n)\}$$

avec $f^p(0,0,\dots,0) = 0$. Si on considère le développement de Taylor à l'ordre N de f^p , on obtient un polynôme f^p_N de degré N en $2n-1$ variables. Soit V_N l'espace de ces polynômes. On introduit sur V_N la relation d'équivalence suivante $f_N \sim g_N$, s'il existe une application biholomorphe $w = \Phi(z)$ dans un voisinage de l'origine, avec $\Phi(0) = 0$, qui envoie la surface

$$\{\mathrm{Re}\, z_1 = f_N(\mathrm{Im}\, z_1 , z_2 , \dots, z_n)\}$$

sur une surface de la forme

$$\{\mathrm{Re}\, w_1 = g_N(\mathrm{Im}\, w_1 , w_2 , \dots, w_n) + \text{termes d'ordre } (N+1)\} .$$

On définit alors $w_N(p)$ comme la classe d'équivalence de f_N^p par cette relation.

Le théorème 1 montre que les $w_N(p)$ sont des invariants, car s'il existe une application biholomorphe F de D_1 sur D_2 et si $p \in \partial D_1$, en utilisant le développement de Taylor à l'ordre N de $\bar{F}$ au voisinage de p, on voit que $w_N(p) = w_N(\bar{F}(p))$.

Principe de la démonstration

On savait déjà, d'après un résultat de G. M. Henkin [2] et N. Vormoor [5] que, sous les hypothèses du théorème 1, l'application F se prolonge en un homéomorphisme $\bar{F}$ de $\bar{D}_1$ dans $\bar{D}_2$ (ce résultat se démontre en étudiant le comportement de la métrique de Carathéodory au bord d'un domaine strictement pseudo-convexe). Il suffit alors, pour obtenir le théorème 1, de montrer que la restriction de $\bar{F}$ à ∂D_1 est un difféomorphisme sur ∂D_2. Ce résultat repose essentiellement sur le fait qu'une application biholomorphe $F : D_1 \to D_2$ est aussi une isométrie pour la métrique de Bergman des domaines D_1 et D_2 ; on le déduit de l'étude du comportement des géodésiques pour cette métrique dans un domaine strictement pseudo-convexe.

Le comportement de ces géodésiques fait l'objet du lemme fondamental de [1]. Mais avant d'énoncer ce lemme et de donner les définitions qui s'y rattachent, nous faisons quelques rappels (voir par exemple [4]) sur la métrique de Bergman.

Rappels de quelques définitions et résultats

Un domaine D est dit strictement pseudo-convexe s'il existe une fonction ψ appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{C}^n)$ telle que $D = \{z \mid \psi(z) > 0\}$, $\mathrm{grad}\, \psi \neq 0$ sur ∂D et $-\sum_{j,k} \dfrac{\partial^2 \psi(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} w_j \bar{w}_k > 0$ pour tout $z \in \partial D$ et $w \in \mathbf{C}^n$, $w \neq 0$.

Notons H_D le sous-espace de $L^2(D)$ constitué par les fonctions holomorphes dans D . Si $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de H_D , on pose

$$K_D(z,w) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(z)\,\overline{\varphi_j(w)} \quad .$$

C'est le noyau de Bergman du domaine D . Il est analytique en z et $\bar{w}$ et pour toute fonction $f \in H$, on a

$$f(z) = \int_D K_D(z,w)\, f(w)\, dw \ .$$

On voit facilement que la définition de K_D ne dépend pas de la base choisie. La fonction $\log K_D(z,z)$ est strictement plurisousharmonique, ce qui permet de définir la métrique de Bergman du domaine D en posant

$$(ds)^2 = \sum_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial z_j\, \partial \bar{z}_k} \log K_D(z,z)\, dz_j\, d\bar{z}_k \quad .$$

On voit alors que toute application biholomorphe de D_1 dans D_2 est une isométrie lorsqu'on munit D_1 et D_2 de leur métrique de Bergman respective.

L'énoncé du lemme fondamental nécessite de plus l'introduction de quelques notions.

DÉFINITION A.- Soient $z^o \in D$ et $w \in S^{2n-1} \subset \mathbf{C}^n$. Notons $t \mapsto X(t,w,z^o)$ la courbe décrite par un point se déplaçant avec la vitesse unité (pour la métrique de Bergman) sur la géodésique partant de z^o à l'instant $t = 0$ dans la direction de w . On dira que $(z^o,w^o) \in D \times S^{2n-1}$ est k-pseudotransverse si l'application $\pi_{z^o} : w \mapsto \lim_{t\to\infty} X(t,w,z^o)$ est définie dans un voisinage de $w^o \in S^{2n-1}$ et établit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de ce voisinage sur un voisinage de $\pi_{z^o}(w^o)$ sur la frontière de D .

DÉFINITION B.- Soient $t \mapsto X(t)$ une géodésique de D et $w_X(t)$ le vecteur unitaire dans la direction $\frac{dX(t)}{dt}$. On dit que X est k-pseudotransverse s'il existe $T \geq 0$ tel que, pour tout $t \geq T$, le point $(X(t)\,,\, w_X(t))$ soit k-pseudotransverse.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le lemme fondamental.

LEMME FONDAMENTAL.- a) Toute géodésique qui ne reste pas dans un compact de D est k-pseudotransverse pour tout entier k .

b) Pour tout $p \in \partial D$, il existe $(z^o, w^o) \in D \times S^{2n-1}$ tel que $p = \pi_{z^o}(w^o)$

Démonstration du théorème 1 à partir du lemme fondamental

Soit $p_1 \in \partial D_1$. D'après b), il existe une géodésique X_1 telle que $p_1 = \lim\limits_{t\to\infty} X_1(t)$. Posons $X_2 = F \circ X_1$. C'est une géodésique puisque F est une isométrie et $\lim\limits_{t\to\infty} X_2(t) = p_2 = \bar{F}(p_1)$.

D'après a), les géodésiques X_1 et X_2 sont k-pseudotransverses. Il existe donc T (dépendant de k) tel que $(z_1, w_1) = (X_1(T), w_{X_1}(T))$ et $(z_2, w_2) = (X_2(T), w_{X_2}(T))$ soient k-pseudotransverses. Considérons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} S^{2n-1} \arrow[r, "\widetilde{F}'(z_1)"] \arrow[d, "\pi_{z_1}"'] & S^{2n-1} \arrow[d, "\pi_{z_2}"] \\ \partial D_1 \arrow[r, "\bar{F}"] & \partial D_2 \end{tikzcd} ,$$

où $\widetilde{F}'(z_1)$ désigne le difféomorphisme induit par $F'(z_1)$ sur S^{2n-1} et où les applications π_{z_1} et π_{z_2} ne sont définies que sur des voisinages de w_1 et w_2 respectivement. Les applications $\widetilde{F}'(z_1)$, π_{z_1} et π_{z_2} étant des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes, on en déduit que $\bar{F}$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme d'un voisinage de p_1 sur un voisinage de p_2 . Ceci démontre le théorème 1.

Tout le reste de l'exposé va donc être consacré à esquisser la démonstration du lemme fondamental. Cette démonstration est très technique. Elle consiste en une étude du comportement asymptotique du noyau de Bergman d'un domaine strictement pseudo-convexe D au voisinage de la diagonale Δ de $\partial D \times \partial D$. On en déduit pour la fonction $K_D(z,z)$ le résultat suivant :

PROPOSITION 1.- La fonction $K_D(z,z)$ est de la forme

$$K_D(z,z) = \Phi(z)\, \psi^{-(n+1)}(z) + \widetilde{\Phi}(z) \log \psi(z)$$

où Φ et $\widetilde{\Phi}$ sont des fonctions de $C^\infty(\bar{D})$, $\Phi \neq 0$ au voisinage de ∂D et où ψ est la fonction qui sert à décrire le domaine D .

On a alors une forme assez explicite de l'équation des géodésiques qui permet de finir la démonstration.

Etude du noyau de Bergman

Introduisons quelques notations et définitions

(1) $\mathcal{L}(w)$ désignera la forme de Levi de la fonction $(-\psi)$ restreinte à l'espace des vecteurs $\xi = (\xi_j) \in \mathbf{C}^n$ tels que $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial z_j}(w)\xi_j = 0$.

(2) Pour $(z,w) \in D$, on pose $\rho(z,w) = |z-w|^2 + |\sum_j \frac{\partial\psi}{\partial z_j}(w)(z_j - w_j)|$.

(3) Une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{D} \times \bar{D})$ est dite de poids k si $\varphi(z,w)$ est une somme finie de termes de la forme

$$\Phi(z,w)\ \psi^r(w) \Big(\sum_j \frac{\partial\psi}{\partial z_j}(w)(z_j - w_j)\Big)^s \Big(\sum_j \frac{\partial\psi}{\partial \bar{z}_j}(w)(\bar{z}_j - \bar{w}_j)\Big)^{\bar{s}} (z-w)^{\alpha} (\bar{z}-\bar{w})^{\bar{\alpha}}$$

où $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{D} \times \bar{D})$, r , s , $\bar{s}$ sont des entiers, et α , $\bar{\alpha}$ des multi-indices vérifiant $r + s + \bar{s} + \frac{1}{2}(|\alpha| + |\bar{\alpha}|) \geq k$.

(4) Posons

$$X(z,w) = \psi(w) + \sum_j \frac{\partial\psi}{\partial z_j}(w)(z_j - w_j) + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2\psi}{\partial z_j\, \partial z_k}(w)(z_j - w_j)(z_k - w_k)$$

et notons que $\operatorname{Re} X(z,w)$ est positif au voisinage de Δ .

(5) Un noyau $K(z,w)$ défini sur $\bar{D} \times \bar{D}$ est dit admissible de poids k si, pour tout entier positif r , on a dans un voisinage de Δ

$$K(z,w) = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(z,w)\, X^{-m_j}(z,w) + \widetilde{\varphi}(z,w) \log X(z,w) + \widetilde{\Phi}(z,w)$$

où $\text{poids}(\varphi_j) - m_j \geq k$, $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\Phi} \in \mathcal{C}^r(\bar{D} \times \bar{D})$ et si K est de plus $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de Δ .

On peut alors énoncer le théorème 2 dont la proposition 1 est un corollaire immédiat.

THÉORÈME 2.- Le noyau de Bergman de D est de la forme

$$K_D(z,w) = (\text{const})\ |\text{grad}\ \psi(w)|^2 \det \mathcal{L}(w)\ X^{-(n+1)}(z,w) + \widetilde{K}(z,w)$$

où $\widetilde{K}$ est un noyau admissible de poids $\geq -n-\frac{1}{2}$.

La démonstration de ce théorème utilise les lemmes suivants :

Lemme 1.- Soit $\widetilde{B}$ un domaine strictement pseudo-convexe contenu dans la boule unité B et tel que $\widetilde{B} \cap B(q,\delta_o) = B \cap B(q,\delta_o)$ où $q = (1, 0 \ldots 0)$ et $\delta_o > 0$. Alors

$$K_{\widetilde{B}}(z,w) = K_B(z,w) + \varphi(z,w) \qquad \text{avec } \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\widetilde{B} \times \widetilde{B} \cap B(q, \delta_o/2)) .$$

Lemme 2.- Soit $p \in \partial D$. Il existe un voisinage V de p qui a la propriété suivante : pour tout $w \in V$, il existe une application biholomorphe ζ_w de V dans un voisinage du point $q = (1, 0 \ldots 0)$ telle que $\zeta_w(w) = (1-\psi(w), 0 \ldots 0)$, $\zeta_w(p) = q$ et que $\zeta_w(\partial D \cap V)$ soit extérieure et tangente au troisième ordre à la sphère unité au point q .

Pour la démonstration de ces deux lemmes, on renvoie à [1].

Démonstration du théorème 2

Soit $H_D^{\perp}$ l'espace des distributions T telles que $\int_D \overline{f(z)}\, T(z)\, dz = 0$ pour toute $f \in H_D$. Il est clair que, pour tout $w \in D$, la distribution δ_w se décompose de manière unique en un élément de H et une distribution de $H_D^{\perp}$:

$$\delta_w = K_D(\cdot\,, w) + [\delta_w - K_D(\cdot\,, w)] .$$

Pour démontrer le théorème 2, nous allons construire deux éléments $K_1(\cdot\,, w) \in H$ et $K^+(\cdot\,, w) \in H^{\perp}$ dont la somme soit une petite perturbation de δ_w . Nous en déduirons un développement asymptotique de K_D .

Une perturbation de δ_w

Soient $\delta \ll \delta_o \ll 1$ deux nombres strictement positifs que nous déterminerons plus loin.

Le lemme 2 permet de construire un recouvrement de $\bar{D}$, et une partition de l'unité $(\widetilde{\varphi}^{\sigma})_{0 \leq \sigma \leq w}$ possédant les propriétés suivantes :

(1) $\tilde{\varphi}^0 + \sum_{\sigma=1}^{n} \tilde{\varphi}^\sigma = 1$ sur $\bar{D}$.

(2) Supp $\tilde{\varphi}^0 \subset\subset D$.

(3) Supp $\tilde{\varphi}^\sigma$ est contenu dans un voisinage de $\tilde{U}^\sigma = B(p_\sigma , \delta) \cap \bar{D}$ où $p_\sigma \in \partial D$.

(4) Aucun point de $\bar{D}$ n'appartient à plus de C des boules $B(p_\sigma , 10^5 \delta)$, où C est un nombre indépendant de δ et δ_0 .

(5) Soit $V^\sigma = B(p_\sigma , C\delta_0) \cap \bar{D}$. Il existe une application $\mathcal{E}^\infty$ $(z,w) \to \zeta_w(z)$ définie pour $z \in V^\sigma$, $w \in V^\sigma$ et telle que :

a) Pour tout w fixé, $\zeta_w^\sigma(\cdot)$ est biholomorphe et envoie V^σ sur un domaine contenant $\tilde{B}$, de plus $\zeta_w^\sigma(w) = (1 - \psi(w) , 0 ,\dots, 0)$.

b) $D^\sigma(w) = (\zeta_w^\sigma)^{-1}(\tilde{B}) \subset D$ et $D^\sigma(w)$ est tangent au troisième ordre au point $(\zeta_w^\sigma)^{-1}(q)$.

c) Il existe $c > 0$ tel que $\zeta_w^\sigma(B(p_\sigma , c\delta_0) \cap \bar{D}) \subset B(q , \delta/2)$.

On considère également une autre partition de l'unité $(\varphi^\sigma)_{0 \leq \sigma \leq N}$ où φ^σ est égal à 1 sur $B(p_\sigma , 2\delta) \cap \bar{D}$ et vaut zéro hors de $B(p_\sigma , 3\delta) \cap \bar{D}$.

Soit K_0^σ le noyau de Bergman du domaine $D^\sigma(w)$. Le noyau de Bergman de la boule unité de $\mathbb{C}^n$ étant

$$K_B(z,w) = c\,(1 - z.\bar{w})^{-(n+1)} ,$$

on a d'après le lemme 1

$$(1) \quad K_0^\sigma(z,w) = J_w^\sigma(z)\left[\frac{c}{(1 - \zeta_w^\sigma(z)\ \zeta_w^\sigma(w))^{n+1}} + \varphi(\zeta_w^\sigma(z) , \zeta_w^\sigma(w)) \right] \overline{J_w^\sigma(w)}$$

où $J_w^\sigma(z)$ désigne le jacobien de l'application ζ_w^σ .

Nous poserons

$$K_0^\sigma(z,w) \equiv K_1^\sigma(z,w) + h^\sigma(z,w) ,$$

remarquons que $K_1(\cdot , w)$ est holomorphe dans V^σ et que $h^\sigma \in \mathcal{E}^\infty(V^\sigma \times V^\sigma)$.

D'autre part, $D^\sigma(w)$ étant contenu dans D , on a

$$(2) \qquad \delta_w = K_0^\sigma(\cdot , w)\, \chi_{D^\sigma(w)}(\cdot) + \mathcal{N}(\cdot , w) ,$$

$\mathcal{N}(\cdot , w)$ désignant une distribution orthogonale à H_D .

On a également

(3) $K_o^\sigma(\cdot\,,w)\,\chi_{D^\sigma(w)}(\cdot) = K_o^\sigma(\cdot\,,w)\,\chi_{D^\sigma(w)}(\cdot)\varphi^\sigma + [K_o^\sigma(\cdot\,,w)\,\chi_{D^\sigma(w)}(\cdot)\ (1-\varphi^\sigma)]$.

Si F_w désigne le terme entre crochets, alors $\operatorname{supp} F_w \subset\subset D$; on peut donc convoler F_w avec une fonction radiale Φ de support assez petit et on a

$$F_w = \Phi * F_w + [F_w - \Phi * F_w] = \Phi * F_w + \mathcal{N}(\cdot\,,w) .$$

Par suite, (2) s'écrit sous la forme

(4) $$\delta_w = K_o^\sigma(\cdot\,,w)\,\chi_{D^\sigma(w)}(\cdot)\ \varphi^\sigma(\cdot) + g^\sigma(\cdot\,,w) + \mathcal{N}(\cdot\,,w)$$

avec $g^\sigma \in \mathcal{E}^\infty(\bar{D} \times V^\sigma)$.

D'où l'on déduit

(5) $\delta_w + K_o^\sigma(\cdot\,,w)\,\chi_{D\setminus D^\sigma(w)}(\cdot)\varphi^\sigma(\cdot) = K_1^\sigma(\cdot\,,w)\varphi^\sigma(\cdot) + \tilde{g}^\sigma(\cdot\,,w) + \mathcal{N}(\cdot\,,w)$,

où on a posé $\tilde{g}^\sigma(z,w) = h^\sigma(z,w)\varphi^\sigma(z) + g^\sigma(z,w) \in \mathcal{E}^\infty(\bar{D} \times V^\sigma)$.

Posons $f_w^\sigma = \bar{\partial}[K_1^\sigma(\cdot\,,w)\varphi^\sigma(\cdot) + \tilde{g}^\sigma(\cdot\,,w)]$, c'est une forme différentielle à coefficients dans $\mathcal{E}^\infty(\bar{D})$. D'après les résultats de J. Kohn sur le problème $\bar{\partial}$, il existe une fonction u_w^σ orthogonale à H_D , vérifiant l'équation $\bar{\partial}u_w^\sigma = f_w^\sigma$ et telle que l'application $(z,w) \to u_w^\sigma(z)$ appartienne à $\mathcal{E}^\infty(\bar{D}\times V^\sigma)$.

On déduit alors de (5)

(6) $\delta_w + K_o^\sigma(\cdot\,,w)\chi_{D\setminus D^\sigma(w)}(\cdot)\varphi^\sigma(\cdot) = [K_1^\sigma(\cdot\,,w)\varphi^\sigma(\cdot) + \tilde{g}^\sigma(\cdot\,,w) - u_w^\sigma(\cdot)] + \mathcal{N}(\cdot\,,w)$.

L'expression entre crochets est holomorphe dans D pour tout $w \in \bar{V}^\sigma$.

De même, si $w \in \operatorname{Supp} \tilde{\varphi}^o$, on a

(7) $$\delta_w = G(\cdot\,,w) + \mathcal{N}(\cdot\,,w) .$$

On sait d'après un résultat de N. Kerzman [3] que K_D admet un prolongement $\mathcal{E}^\infty$ dans $\bar{D} \times \bar{D}\setminus\Delta$, donc K_D est $\mathcal{E}^\infty$ dans $\bar{D} \times \operatorname{Supp} \tilde{\varphi}^o$ et on peut prendre $G = K_D$.

Si on multiplie (6) par $\tilde{\varphi}^\sigma$, (7) par $\tilde{\varphi}^o$ et si on ajoute les relations obtenues, on a :

(8) $$\delta_w(z) + \sum_{\sigma=1}^{N} K_o^\sigma(z,w)\varphi^\sigma(z)\tilde{\varphi}^\sigma(w)\chi_{D\setminus D^\sigma(w)}(z) =$$
$$[\sum_{\sigma=1}^{N} K_1^\sigma(z,w)\varphi^\sigma(z)\tilde{\varphi}^\sigma(w) + G(z,w)] + \mathcal{N}(z,w) .$$

On va voir que le premier membre est une "petite perturbation" de δ_w .

Posons

$$K_1(z,w) = \sum_{\sigma=1}^{N} K_1^{\sigma}(z,w)\varphi^{\sigma}(z)\widetilde{\varphi}^{\sigma}(w) + G(z,w)$$

$$\mathcal{E}(z,w) = \sum_{\sigma=1}^{N} K_o^{\sigma}(z,w)\varphi^{\sigma}(z)\widetilde{\varphi}^{\sigma}(w)\, \chi_{D\setminus D^{\sigma}(w)}(z) .$$

Ces noyaux définissent des opérateurs de $L^2(D)$:

$$(K_1 f)(z) = \int_D K_1(z,w)f(w)dw \quad , \quad (\mathcal{E}f)(z) = \int_D \mathcal{E}(z,w)f(w)dw .$$

On voit facilement que

$$|K_1(z,w)| \leq C_1(\psi(z) + \psi(w) + \rho(z,w))^{-(n+1)}$$

et $$|\mathcal{E}(z,w)| \leq C \sum_{\sigma=1}^{N} (\psi(z) + \psi(w) + \rho(z,w))^{-(n+1)}\varphi^{\sigma}(z)\widetilde{\varphi}^{\sigma}(w)\chi_{D\setminus D^{\sigma}(w)}(z) .$$

Ces estimations montrent que K_1 et $\mathcal{E}$ sont des opérateurs bornés dans $L^2(D)$ et que, pour δ assez petit, $\|\mathcal{E}\| < \frac{1}{2}$. Le noyau K_1 étant holomorphe en z , on a d'après (8) pour $f \in L^2(D)$

$$(I + \mathcal{E})f = K_1 f + \mathcal{N}f \quad ,$$

où I désigne l'opérateur identité et $K_1 f \in H_D$, $\mathcal{N}f \in H_D^{\perp}$.

Par ailleurs, on sait que $(I + \mathcal{E})f = K_D(I + \mathcal{E})f + q$, avec $q \in H_D^{\perp}$. Il en résulte que $K_D(I + \mathcal{E}) = K_1$, et puisque $\|\mathcal{E}\| < \frac{1}{2}$

$$K_D = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i K_1 \mathcal{E}^i \quad ,$$

où la série converge pour la norme des opérateurs de $L^2(D)$.

Les calculs

On voit par un calcul explicite que

$$K_1(z,w) = (\text{const})\ |\text{grad}\ \psi(w)|^2 \det \mathcal{L}(w)\ X^{-(n+1)}(z,w) + \widetilde{K}(z,w)$$

où $\widetilde{K}$ est le noyau admissible de poids $\geq -n-\frac{1}{2}$.

On démontre ensuite les deux assertions suivantes :

(A) Si K est un noyau admissible de poids k , alors

$K\mathcal{E}(z,w) \equiv \int_D K(z,y)\mathcal{E}(z,y)dy$ est un noyau admissible de poids $k+1$.

(B) Pour tout noyau K de classe $\mathscr{C}^k$ et pout tout $\eta > 0$, on définit la norme $\|K\|_{k,\eta} = \sum_{|\alpha| \le k} \eta^{|\alpha|} \|D^{\alpha}_{z,w}\|_{\infty}$. Il existe $\delta > 0$ et $\eta(\delta) > 0$ tels que pour $\eta \le \eta(\delta)$, on a $\|K\mathcal{E}\|_{k,\eta} \le \frac{1}{2} \|K\|_{k,\eta}$.

La démonstration de (A) et (B) est longue et technique (30 pages), c'est dans cette démonstration qu'on utilise le fait que $D^{\sigma}(w)$ est tangent à D à l'ordre trois.

Le théorème 2 résulte facilement de (A) et (B). En effet, on déduit de (A) que $K_1\mathcal{E}^j$ est un noyau admissible de poids $\ge -n-i+j$. En particulier, pour tout entier k , il existe j_o tel que, si $j \ge j_o$, $K_1\mathcal{E}^j \in \mathscr{C}^k(\bar{D} \times \bar{D})$. On a alors d'après (B)

$$\|K_1\mathcal{E}^j\|_{k,\eta} \le C(\tfrac{1}{2})^{j-j_o} \qquad \text{pour } j \ge j_o .$$

Ce qui montre que

$$K_D = K_1 + \sum_{j=1}^{j_o-1} (-1)^j K_1\mathcal{E}^j + \sum_{j=j_o}^{\infty} (-1)^j K_1\mathcal{E}^j$$

$$= K_1 + (\text{somme finie de noyaux ad. de poids} \ge -n) + (\text{noyau de } \mathscr{C}^k(\bar{D}\times\bar{D})) .$$

On déduit alors le théorème de l'expression donnée pour K_1 .

Etude des géodésiques pour la métrique de Bergman

La principale difficulté est que les équations différentielles satisfaites par les géodésiques associées à la métrique de Bergman sont dégénérées sur ∂D , elles le sont même lorsque D est la boule unité de $\mathbb{C}^n$. L'idée est de faire des changements de fonctions inconnues et un changement de temps pour rendre ces équations plus régulières.

Notations. Nous identifierons $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$ (au point $(x_1 + ix_2 , \dots , x_{2n-1} + ix_{2n}) \in \mathbb{C}^n$, on associe $(x_1 , x_2 , \dots , x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$).

Soit $(\nu_1(x) , \dots , \nu_{2n}(x))$ une base de $\mathbb{R}^{2n}$ dépendant de manière $\mathscr{C}^{\infty}$ de x et telle que

(i) $\nu_{2k-1}(x) = i\,\nu_{2k}(x)$.

(ii) Pour $x \in \partial D$, $\nu_j(x)$ est tangent à ∂D si $j \neq 2$.

On pose alors $w_1(x) = \psi^2(x)\, \nu_1(x)$, $w_j(x) = \psi(x)\, \nu_j(x)$ pour $j \geq 2$.
On notera $(w_{ij})_{i \leq 2n}$ les coordonnées du vecteur w_j .

En fait pour faire les calculs, il faut expliciter davantage une base $(\nu_1, \ldots, \nu_{2n})$ au voisinage d'un point de ∂D .

On désignera par $S_k(D)$ la classe des fonctions sur D qu'on peut mettre sous la forme $f(x, x^k \log \psi(x))$ avec $f \in \mathscr{C}^\infty(\bar{D} \times [0,1])$.

<u>Equations des géodésiques</u>. Les équations des géodésiques sont :

$$\ddot{X}_j = \sum_{r,s} \Gamma^j_{rs}\, \dot{X}_r\, \dot{X}_s \quad , \qquad 1 \leq j \leq 2n \tag{1}$$

où Γ^j_{rs} désignent les symboles de Christoffel. La proposition 1 permet d'expliciter les fonctions Γ^j_{rs} .

Introduisons les fonctions $P_j(X,\dot{X})$ en posant

$$\dot{X}_i = \sum_j P_j\, w_{ij}(X) .$$

On démontre alors le lemme suivant

<u>Lemme</u> 3.- Le système (1) se transforme en

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{X}_i = \Sigma\, w_{ij}(X)\, P_j \\ \dot{P}_i = \sum\limits_{r,s} \Omega^i_{rs}(X)\, P_r\, P_s \end{cases}$$

où les fonctions $\psi^{-1}\Omega^i_{rs}$ appartiennent à $S_{n-1}(D)$.

Si on pose $\tau = \int_0^t \psi(x(s))ds$; les équations (2) se transforment en

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{dX_i}{d\tau} = \sum\limits_j \psi^{-1} w_{ij}(X)\, P_j \\ \dfrac{dP_i}{d\tau} = \sum\limits_{r,s} (\psi^{-1}\Omega^i_{rs})\, P_r\, P_s . \end{cases}$$

On démontre alors le

<u>Lemme</u> 4.- Soit $X(t)$ une géodésique ne restant pas dans un compact de D .

Alors $\lim_{t\to\infty} X(t)$, $\lim_{t\to\infty} P_j$, $\lim_{t\to\infty} \tau$ existent, de plus $\lim_{t\to\infty} P_2 > 0$.

Pour la démonstration, on étudie le comportement des géodésiques de la boule unité, puis on utilise le lemme 2 qui affirme qu'un domaine strictement pseudo-convexe est localement une "perturbation" d'une boule, d'où l'on déduit une information sur le comportement de X, P_i , τ . L'utilisation de (3) et des estimations sur la métrique de Bergman permettent de conclure.

Principe de la démonstration du lemme fondamental

Soit $X_o(t)$ une géodésique ne restant pas dans un compact de D . D'après le lemme 4, il existe $p \in \partial D$ tel que $\lim_{t\to\infty} X_o(t) = p$; on peut supposer que $p = (0,\dots,0)$ et que la normale à ∂D en p est l'axe des x_2 .

Posons $T = \psi(x)$ et $Q_i = P_i/P_2$. Au voisinage de p , le système (3) devient

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{dX_i}{dT} = \sum\limits_j \widetilde{w}_{ij}(X,T)Q_j & i \neq 2 \\[2ex] \dfrac{dQ_i}{dT} = \sum\limits_{r,s} [\widetilde{\Omega}^1_{rs}(X,T) - \widetilde{\Omega}^2_{rs}(X,T)Q_i]Q_rQ_r & i \neq 2 , \end{cases}$$

où $\widetilde{w}_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}, T) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ et où $T \mapsto \widetilde{\Omega}^{rs}_i(\cdot\, , T)$ est une application continue à valeurs dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{2n-1})$.

Notons $X_i\left(\begin{smallmatrix} x_1,\dots,x_{2n} \\ q_1,\dots,q_{2n}\end{smallmatrix} \,\middle|\, T_o \,\middle|\, T\right)$, $Q_i\left(\begin{smallmatrix} x_1,\dots,x_{2n} \\ q_1,\dots,q_{2n}\end{smallmatrix} \,\middle|\, T_o \,\middle|\, T\right)$, $i \neq 2$, la valeur au point T de la solution des équations (4) avec les conditions initiales

$$X_i(T_o) = x_i \quad , \qquad Q_i(T_o) = q_i \quad , \qquad i \neq 2 .$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout entier k et pour tout $K > 1$, Il existe T_K tel que si $|T - T_o| \leq T_K$ et $|q_i| \leq K$, alors les fonctions $X_i\left(\begin{smallmatrix} x_1,\dots,x_{2n} \\ q_1,\dots,q_{2n}\end{smallmatrix} \,\middle|\, T_o \,\middle|\, T\right)$; $Q_i\left(\begin{smallmatrix} x_1,\dots,x_{2n} \\ q_1,\dots,q_{2n}\end{smallmatrix} \,\middle|\, T_o \,\middle|\, T\right)$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ en les variables (x,q) .

Désignons par (X^o,Q^o) la solution du système (4) qui correspond à la géodésique X_o . D'après le lemme 4, les $|Q^o_i(T)|$ sont bornés quand T tend vers zéro ; par exemple $|Q_i^o(T)| \leq K_o$. En choisissant $T_o < T_{K_o}$, on voit que l'application

$$\pi : (q_1,\dots,q_{2n}) \longmapsto \left(X_i\left(\begin{matrix} X_i^o(T_o) & ,\dots, & X_{2n}^o(T_o) \\ q_1 & ,\dots, & q_{2n} \end{matrix} \middle| T_o \middle| 0\right)\right)_{i\neq 2}$$

est de classe $\mathcal{C}^k$. Il suffit de calculer son jacobien pour montrer que c'est un difféomorphisme. Ce qui achève la démonstration de a). La partie b) résulte du théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz appliqué au système (4).

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. FEFFERMAN - The Bergman Kernel and Biholomorphic Mappings of Pseudoconvex Domains, Inv.

[2] G. M. HENKIN - An analytic polyhedrom is not holomorphically equivalent to a strictly pseudoconvex domain, Soviet Math. Dokl., vol. 14 (1973) n° 3.

[3] N. KERZMAN - The Bergman kernel function : differentiability at the boundary, Math. Ann., 195 (1972), 149-158.

[4] E. M. STEIN - Boundary Behavior of Holomorphic Function of Several Complex Variables, Princeton (1972).

[5] N. VORMOOR - Topologische Fortsetzung biholomorpher Funktionen..., Math. Ann., 204 (1973), 239-269.