SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PIERRE GABRIEL

Représentations indécomposables

Séminaire N. Bourbaki, 1975, exp. n° 444, p. 143-169

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1973-1974__16__143_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI 444-01
26e année, 1973/74 , n°444 Février 1974

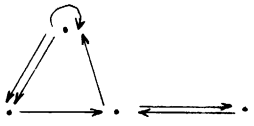
REPRÉSENTATIONS INDÉCOMPOSABLES

par Pierre GABRIEL

La matière présentée dans cet exposé a été rassemblée en collaboration constante avec C.M. RINGEL, que je tiens à remercier ici.

Première partie : Carquois de type de représentation classifiable

1.1. Carquois et représentations linéaires. Un carquois consiste en la donnée d'un ensemble de points P, d'un ensemble de flèches F et de deux applications s , b : $F \rightrightarrows P$ associant à toute flèche $\varphi \in F$ sa source $s(\varphi) \in P$ et son but $b(\varphi) \in P$. Si l'on veut, on peut se représenter un carquois comme une "catégorie sans composition des flèches" et le visualiser à l'aide d'un diagramme tel que le suivant :



Soit k un corps commutatif. Une représentation k-linéaire du carquois $C = (P , F , s , b)$ consiste en la donnée d'une famille de k-espaces vectoriels $(V(p))_{p \in P}$ et d'une famille d'applications k-linéaires $(V(\varphi) : V(s(\varphi)) \to V(b(\varphi)))_{\varphi \in F}$. Un morphisme de représentations $f : V \to V'$ est déterminé par des applications k-linéaires $f(p) : V(p) \to V'(p)$, $p \in P$, telles qu'on ait $f(q)\, V(\varphi) = V'(\varphi)\, f(p)$ pour toute flèche $\varphi : p \to q$ de C . Composant les morphismes de la manière qui est évidente, on obtient ainsi une catégorie abélienne, dont on voudrait pouvoir classifier les objets à isomorphisme près.

Pour simplifier, nous supposons dans toute la suite que le carquois $\underline{C}$ est fini, c'est-à-dire qu'il a un nombre fini de points et de flèches. Nous posons alors $K = k^{\underline{P}}$ = algèbre des fonctions $\underline{P} \to k$, et nous munissons $\omega = k^{\underline{F}}$ d'une structure de $K-K$-bimodule en posant $(\lambda f)(\varphi) = \lambda(p)f(\varphi)$ et $(f\lambda)(\varphi) = \lambda(q)f(\varphi)$ pour toute flèche $\varphi : p \to q$ et tous $f \in \omega$, $\lambda \in K$. L'algèbre du carquois est alors par définition l'algèbre tensorielle

$$k[\underline{C}] = \bigotimes_K \omega = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (\bigotimes_K^n \omega) = K \oplus \omega \oplus (\omega \otimes_K \omega) \oplus (\omega \otimes_K \omega \otimes_K \omega) \oplus \dots$$

du $K-K$-bimodule ω. A toute représentation k-linéaire V de C nous associons le module $\Pi V = \prod_{p \in \underline{P}} V(p)$ sur $\bigotimes_K^\omega$ tel que

$$(v\lambda)(p) = (\lambda(p)v(p))_{p \in \underline{P}}$$

et

$$(vf)(p) = \sum_{\varphi : q \to p} f(\varphi)\, V(\varphi)(v(q))$$

pour tous $v = (v(p))_{p \in \underline{P}} \in \Pi V$, $\lambda \in K$ et $f \in \omega$. Il est facile de voir que le foncteur $V \mapsto \Pi V$ établit une équivalence de catégories entre les représentations linéaires de $\underline{C}$ et les modules sur l'algèbre du carquois.

1.2 Remarque : Carquois et algèbres de dimension finie. Soit A une algèbre de dimension finie sur k de radical $\underline{r}$ et de "coiffe" $A/\underline{r}$. On sait que la catégorie des modules sur A est équivalente à celle des modules sur une algèbre sobre, c'est-à-dire dont la coiffe est un produit de corps. Nous pouvons donc supposer d'emblée que l'algèbre A est sobre. Nous la supposons en outre déployée (i.e. tous les facteurs simples de $A/\underline{r}$ sont isomorphes à k), ce qui est automatique lorsque k est algébriquement clos.

Considérons le carquois $\underline{C}$ qui a pour points les facteurs simples k_i de $A/\underline{r}$ et pour nombre de flèches de k_i vers k_j la dimension de $k_i(\underline{r}/\underline{r}^2)k_j$ sur k. On a $K = A/\underline{r}$ et $\omega = \underline{r}/\underline{r}^2$, et l'on voit facilement que A peut

s'écrire comme un quotient de $\bigotimes_K^\omega$ par un idéal contenant $\bigotimes_K^n \omega$ pour n assez grand. Ceci ramène l'étude des A-modules à celle de certaines représentations linéaires du carquois $\underline{C}$. Pour une généralisation au cas non déployé nous renvoyons à [11], [8], [17] et [9].

1.3 La forme quadratique de Tits. Nous nous intéressons à partir de maintenant aux représentations de dimension finie du carquois $\underline{C}$. Une telle représentation peut être décomposée en somme directe finie de sous-représentations indécomposables, et la décomposition est unique à isomorphisme près d'après Krull-Remak-Schmidt.

Une représentation V , telle qu'on ait $V(p) = k^{n_p}$ pour des entiers naturels donnés n_p , est déterminée par un point de la variété-produit

$$H = \prod_{p,q} \mathrm{Hom}_k(k^{n_p}, k^{n_q})^{[p,q]}$$

de dimension $\sum_{p,q} [p,q] n_p n_q$, où $[p,q]$ désigne le nombre de flèches $p \to q$ du carquois $\underline{C}$. Deux tels points déterminent des représentations isomorphes ssi ils appartiennent à la même orbite de H sous l'action du groupe

$$G = (\prod_p GL(n_p, k))/k^*$$

de dimension $(\sum_p n_p^2) - 1$. Supposons k infini. Si l'on a $\dim G < \dim H$, c'est-à-dire si

$$q(n) = \sum_p n_p^2 - \sum_{p,q} [p,q] n_p n_q \leq 0 ,$$

le nombre d'orbites est infini. Il y a donc une infinité de classes d'isomorphisme de représentations de la "dimension" donnée $n = (n_p)_{p \in \underline{P}}$. A fortiori, il y a une infinité de représentations indécomposables de dimension finie.

Dans le cas général, soit V_h la représentation associée au point $h \in H$. Le groupe d'isotropie de h dans G n'est autre que $(\mathrm{End}\ V_h)^*/k^*$, de sorte que l'orbite Gh de h s'identifie à $\prod_p GL(n_p, k)/(\mathrm{End}\ V_h)^*$ et que l'on a

$$\sum_p n_p^2 - [\mathrm{End}\ V_h : k] = \dim Gh \leq \dim H = \sum_{p,q} [p,q] n_p n_q$$

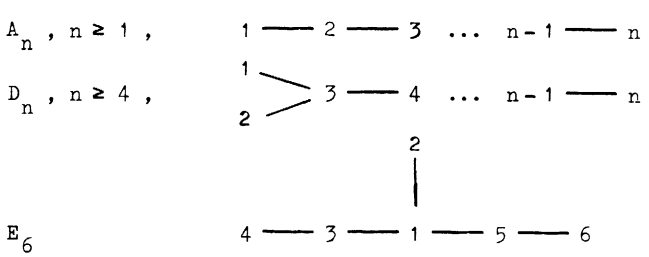
d'où $$q(n) = \sum_p n_p^2 - \sum_{p,q} [p,q] n_p n_q \leq [\mathrm{End}\ V_h : k] ,$$

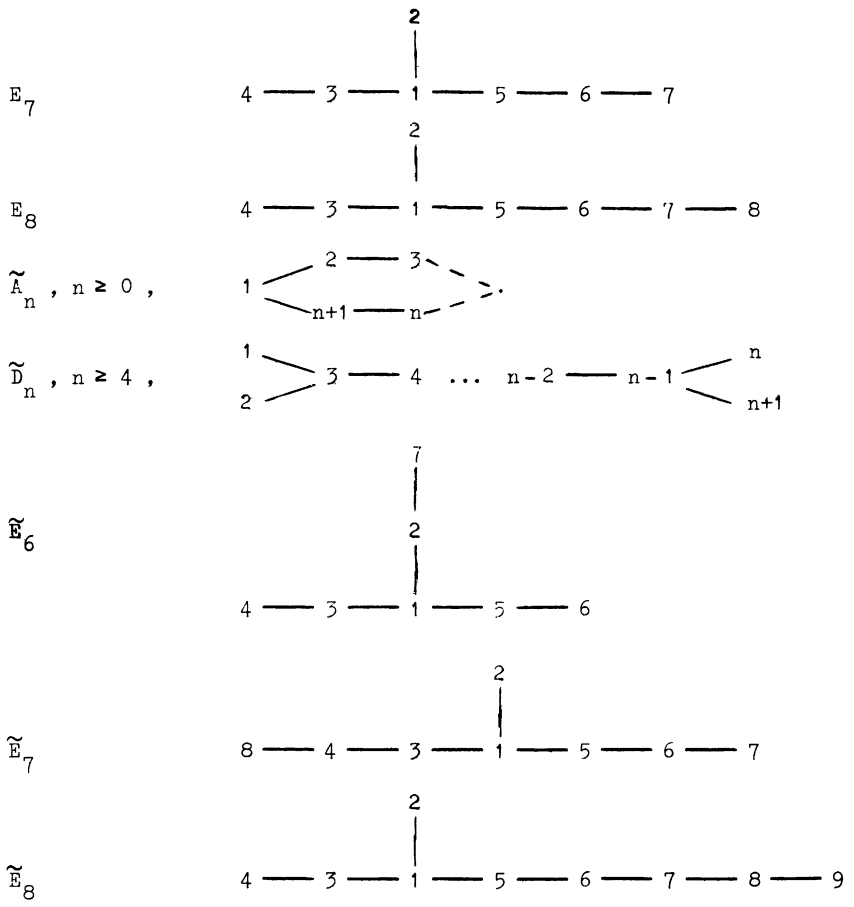
l'égalité ayant lieu ssi l'orbite Gh est ouverte dans H.

Considérons enfin le cas où C n'a qu'un nombre fini de classes de représentations indécomposables. Pour tout $0 \neq n = (n_p) \in \mathbb{N}^P$ on a alors un nombre fini d'orbites, qu'on sait être localement fermées au sens de Zariski. L'une de ces orbites est donc ouverte et donne lieu à l'égalité $q(n) = [\mathrm{End}\ V_h : k]$. En particulier, si $q(n) = 1$, on a $\mathrm{End}\ V_h = k$ et V_h est indécomposable. Réciproquement, comme on a $1 \leq q(n) \leq [\mathrm{End}\ V_h : k]$ d'après ce qui précède, l'égalité $\mathrm{End}\ V_h = k$ implique $q(n) = 1$, de sorte que les solutions de l'équation $q(n) = 1$, $n \in \mathbb{N}^P$, correspondent bijectivement aux classes de représentation V telles que $\mathrm{End}\ V = k$.

Ces quelques remarques préliminaires montrent l'importance de la forme q introduite par TITS et que nous devons examiner plus en détail.

1.4 Considérons les classes de carquois représentés par les diagrammes suivants :





Dans ces diagrammes chaque trait représente une flèche de sens arbitraire. Il y a par exemple deux classes d'isomorphisme de carquois de type $\tilde{A}_1$, à savoir $1 \rightrightarrows 2$ et $1 \rightleftarrows 2$.

Dans l'énoncé suivant nous appelons dimension de V la famille $\underline{\dim}\ V = (\dim V(p))_{p \in \underline{P}}$. La forme quadratique q de 1.3 est considérée comme définie sur $\mathbb{Q}^{\underline{P}}$. Enfin, nous supposons $\underline{C}$ "connexe".

THÉORÈME.- a) La forme de Tits q du carquois C est définie positive ssi C est du type A_n , D_n , E_6 , E_7 ou E_8 . Elle est positive non définie ssi C est du type $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{D}_n$, $\widetilde{E}_6$, $\widetilde{E}_7$ ou $\widetilde{E}_8$.

b) Supposons q positive, définie ou non. Pour toute représentation indécomposable V de C , on a $q(\underline{\dim}\ V) = 1$ ou $q(\underline{\dim}\ V) = 0$. Si $q(n) = 1$, $n \in \mathbb{N}^P$, il y a une et une seule représentation indécomposable V_n telle que $\dim V = n$. Si $q(n) = 0$, $n \in \mathbb{N}^P \setminus 0$, il y a une infinité de représentations indécomposables V telles que $\dim V = n$, du moins si k est infini.

c) En particulier, si q est définie positive, les classes de représentations indécomposables sont en nombre fini et correspondent bijectivement aux solutions de l'équation $q(n) = 1$.

Dans le cas défini positif, ce théorème est démontré dans [11] et sous une forme voisine dans [21]. Dans le cas positif non défini il est dû à NAZAROVA [20] et DONOVAN-FREISLICH [10]. Le cas particulier de $\widetilde{D}_4$ avait été obtenu précédemment par NAZAROVA et GELFAND-PONOMAREV [19], [14]. Nous donnons plus loin quelques indications sur la démonstration du cas général en suivant la méthode de BERNSTEIN-GELFAND-PONOMAREV, étendue au cas non défini par DLAB-RINGEL [2], [9].

Lorsque la forme de Tits q de C n'est pas positive, les représentations de dimension finie de C ne sont pas "classifiables". Expliquons-nous : si C est le carquois à un point et deux flèches, l'algèbre du carquois est l'algèbre associative libre $k\langle X,Y\rangle$ engendrée par deux variables X et Y . Nous prétendons qu'il existe pour toute algèbre A de type fini sur k un foncteur pleinement fidèle

$$F : \mathrm{modf}_A \to \mathrm{modf}_{k\langle X,Y\rangle} ,$$

où modf_A désigne la catégorie des A-modules de k-dimension finie. En effet, si A est engendrée par $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il suffit de poser $F(M) = M^{n+2}$ et de laisser opérer X et Y sur F(M) au moyen des matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & \ddots & & & \\ a_1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & a_n & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Une classification complète des représentations de $\underline{C}$ de dimension finie impliquerait donc une classification complète des modules de dimension finie sur toute algèbre de type fini. En particulier, toute algèbre de dimension finie sur k peut s'écrire comme algèbre des endomorphismes d'une représentation de dimension finie de $\underline{C}$.

Si nous remplaçons $\underline{C}$ par un autre carquois $\underline{D}$ de forme de Tits non positive et d'algèbre $k[\underline{D}]$, il est facile d'exhiber un foncteur pleinement fidèle

$$G : \mathrm{modf}_{k\langle X,Y\rangle} \to \mathrm{modf}_{k[\underline{D}]} ,$$

car il suffit manifestement de s'intéresser au cas où $\underline{D}$ est minimal, c'est-à-dire où tout sous-carquois propre de $\underline{D}$ a une forme de Tits positive. La liste de ces carquois minimaux est finie. Par exemple, si $\underline{D}$ est le carquois $1 \xrightarrow{\varphi} 2 \circlearrowright \psi$, on peut poser

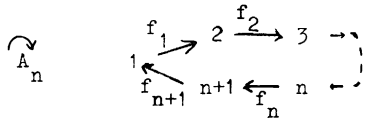
$$G(M)(1) = M \qquad \text{et} \qquad G(M)(2) = M \oplus M ,$$

φ et ψ opérant au moyen des matrices

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & \varphi \\ 1 & \psi \end{bmatrix} .$$

(Comparer avec [6] et [7].)

1.5 Avant d'esquisser la démonstration du théorème précédent, nous rappelons les résultats bien connus ([18], [16]) dans le cas du carquois



de type $\tilde{A}_n$: la catégorie $\mathrm{modf}_{k[\vec{A}_n]}$ est le produit de deux sous-catégories, la première étant formée par les représentations V telles que l'application $V(f_i)$ soit bijective pour tout i, la seconde par les représentations V telles que $V(f_{n+1})\ldots V(f_1)$ soit nilpotente. La première sous-catégorie est équivalente à $\mathrm{modf}_{k[T,T^{-1}]}$ au moyen du foncteur $M \longmapsto V$ tel que $V(i) = M$ pour tout i, $V(f_i) = \mathrm{id}_M$ pour $1 \leq i \leq n$ et $V(f_{n+1}) = T$? . Nous désignerons la seconde par $\tilde{\underline{U}}_n$ (U = unisériel). Ses objets indécomposables sont de la forme $V_{s,\ell}$, avec s , $\ell \in \mathbb{N}$, $1 \leq s \leq n+1$, $\ell \geq 1$ et

$$V_{s,\ell}(i) = \bigoplus ke_j \quad , \quad V_{s,\ell}(f_i)(e_j) = \begin{cases} e_{j+1} & \text{si } j \neq \ell \\ 0 & \text{si } j = \ell \end{cases},$$

la somme directe s'étendant à tous les j tels que $0 \leq j < \ell$ et $s + j \equiv i \bmod n+1$.

1.6 Appelons <u>graphe</u> la donnée Γ d'un ensemble de points $\underline{P}$, d'un ensemble d'arêtes $\underline{A}$ et d'une application a de $\underline{A}$ dans l'ensemble des parties de $\underline{P}$ à deux éléments. Une <u>orientation</u> de Γ est le couple Λ d'une application-source $\underline{s} : \underline{A} \to \underline{P}$ et d'une application-but $\underline{b} : \underline{A} \to \underline{P}$ telles qu'on ait a) et b) :

a) $\underline{a}(\varphi) = \{\underline{s}(\varphi), \underline{b}(\varphi)\}$ pour tout $\varphi \in \underline{A}$;

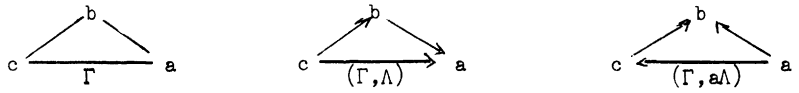
b) il n'existe pas de "circuit fermé"

$$\underline{b}(\varphi_1) = \underline{s}(\varphi_2) \ , \ \underline{b}(\varphi_2) = \underline{s}(\varphi_3) \ , \ldots , \ \underline{b}(\varphi_n) = \underline{s}(\varphi_1) \ .$$

Un <u>graphe orienté</u> (Γ,Λ) n'est donc pas autre chose qu'un carquois sans circuit fermé, ce qui exclut les carquois $\vec{A}_n$ de 1.5 de l'Eden des graphes orientés !

Soit (Γ,Λ) un graphe orienté. Nous munissons l'ensemble $\underline{P}$ de ses points

de la relation d'ordre minimale telle qu'on ait $\underline{s}(\varphi) \leq \underline{b}(\varphi)$ pour toute arête φ . Soient a un point maximal pour cette relation d'ordre et $a\Lambda$ l'orientation obtenue en changeant le sens des flèches de but a sans toucher aux autres :



Si $\mathrm{modf}_{(\Gamma,\Lambda)}$ désigne la catégorie des représentations de dimension finie du carquois (Γ,Λ) , BERNSTEIN-GELFAND-PONOMAREV associent au point maximal a le foncteur

$$F_a^+ : \mathrm{modf}_{(\Gamma,\Lambda)} \longrightarrow \mathrm{modf}_{(\Gamma,a\Lambda)}$$

construit comme suit : $F_a^+(V)(b) = V(b)$ si $a \neq b \in \underline{P}$ et $F_a^+(V)(\varphi) = V(\varphi)$ si l'arête φ n'a pas d'extrémité en a . Par contre, $F_a^+(V)(a)$ est le noyau de l'application $\bigoplus_{\varphi\,:\,b\to a} V(b) \to V(a)$ de composantes $V(\varphi)$, et $F_a^+(V)(\varphi) : F_a^+(V)(a) \to F_a^+(V)(b) = V(b)$ est la projection de ce noyau sur le facteur $V(b)$ (φ parcourant les arêtes de but b pour l'orientation $a\Lambda$). On a donc par construction la suite exacte

$$(*) \qquad 0 \to F_a^+(V)(a) \to \bigoplus_{\varphi\,:\,b \underset{\Lambda}{\to} a} V(b) \to V(a) .$$

Lorsque a est minimal pour l'ordre associé à Λ , nous notons Λa l'orientation obtenue en changeant le sens des flèches de source a sans toucher aux autres. On a dans ce cas le foncteur

$$F_a^- : \mathrm{modf}_{(\Gamma,\Lambda)} \to \mathrm{modf}_{(\Gamma,\Lambda a)}$$

tel que : $F_a^-(V)(b) = V(b)$ si $b \neq a$ et $F_a^-(V)(\varphi) = V(\varphi)$ si l'arête φ n'a pas d'extrémité en a . Par contre, $F_a^-(V)(a)$ est maintenant le conoyau de l'application $V(a) \to \bigoplus_{\varphi\,:\,a\to b} V(b)$ de composantes $V(\varphi)$ et $F_a^-(V)(\varphi)$ est la restriction à $V(b)$ de la projection canonique de $V(b)$ sur ce conoyau. On a la suite exacte

$$V(a) \to \bigoplus_{\varphi : a \xrightarrow[\Lambda]{} b} V(b) \to F_a^-(V)(a) \to 0 .$$

Supposons a maximal pour Λ . Alors a est minimal pour $a\Lambda$ et $F_a^-(F_a^+(V))$ est par construction le conoyau de $F_a^+(V)(a) \to \bigoplus_{a \xrightarrow[a\Lambda]{} b} F_a^+(V)(b)$, qui n'est autre que l'application $F_a^+(V)(a) \to \bigoplus_{b \xrightarrow[\Lambda]{} a} V(b)$ de (*) . Autrement dit, $F_a^-(F_a^+(V))$ s'identifie à la sous-représentation de V qui coïncide avec V en dehors de a et a pour valeur en a la somme des images $V(\varphi)(V(b))$, où $\varphi : b \xrightarrow[\Lambda]{} a$. Par conséquent, on a

$$V \cong F_a^-(F_a^+(V)) \oplus k_a^n ,$$

si k_a désigne la représentation irréductible telle que $k_a(a) = k$ et $k_a(b) = 0$ pour $b \neq a$. En particulier, si V est un indécomposable distinct de k_a , on a $F_a^-(F_a^+(V)) = V$, et $F_a^+(V)$ est indécomposable. Dans ce cas la suite (*) est exacte, ce qui fournit les formules

$$\dim F_a^+(V)(a) = -\dim V(a) + \sum_{\varphi : b \to a} \dim V(b)$$

$$\dim F_a^+(V)(b) = \dim V(b) \qquad \text{pour } b \neq a .$$

Ces formules peuvent aussi s'écrire

$$\underline{\dim}\, F_a^+(V) = \underline{\dim}\, V - 2B(\underline{\dim}\, V , a).a ,$$

si l'on pose $\underline{\dim}\, V = (\dim V(b)) \in \mathbb{Q}^P$, si l'on identifie $a \in \underline{P}$ à l'élément $\underline{\dim}\, k_a$ de la base canonique de $\mathbb{Q}^P$, et si $B(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$.

Autrement dit, si σ_a est la réflexion de $\mathbb{Q}^P$ telle que $\sigma_a(x) = x - 2B(x,a).a$, on a $\underline{\dim}\, F_a^+(V) = \sigma_a(\underline{\dim}\, V)$ dès que V est indécomposable et distinct de k_a .

1.7 Soient W le groupe (de Weyl !) engendré par les réflexions σ_a et R l'ensemble des racines, i.e. des transformés des vecteurs de base $b \in \underline{P} \subset \mathbb{Q}^P$ sous l'action de W. On voit facilement que la forme de Tits q est invariante sous σ_a, donc sous W, donc que toute racine $x \in R$ est solution de l'équation $q(r) = 1$. Réciproquement, si q est positive, on vérifie que tout $x \in \mathbb{N}^P$ tel que $q(x) = 1$ et $\sigma_a(x) \notin \mathbb{N}^P$ coïncide avec a. Lorsque q est définie positive, on en déduit que

$$R = \{x \in \mathbb{Z}^P \mid q(x) = 1\} .$$

Considérons maintenant un dénombrement non-croissant $a_1, \ldots, a_n$ de $\underline{P}$, i.e. tel que $a_{i+1} \not\leq a_i$ pour tout i. Alors a_{i+1} est maximal pour l'orientation $a_i \ldots a_1 \Lambda$, de sorte qu'on a, compte tenu de $a_i \ldots a_1 \Lambda = \Lambda a_n \ldots a_{i+1}$, les deux foncteurs composés de Coxeter

$$\Phi^+ : \operatorname{modf}(\Gamma,\Lambda) \xrightarrow{F^+_{a_1}} \operatorname{modf}(\Gamma,a_1\Lambda) \to \cdots \operatorname{modf}(\Gamma,\Lambda a_n) \xrightarrow{F^+_{a_n}} \operatorname{modf}(\Gamma,\Lambda)$$

$$\Phi^- : \operatorname{modf}(\Gamma,\Lambda) \xrightarrow{F^-_{a_n}} \operatorname{modf}(\Gamma,\Lambda a_n) \to \cdots \operatorname{modf}(\Gamma,a_1\Lambda) \xrightarrow{F^-_{a_1}} \operatorname{modf}(\Gamma,\Lambda) .$$

Ces deux foncteurs sont associés à la transformation de Coxeter $c = \sigma_{a_n} \ldots \sigma_{a_1}$ de $\mathbb{Q}^P$, en ce sens qu'on a par exemple $\underline{\dim}\, \Phi^+(V) = c(\underline{\dim}\, V)$ quand V est indécomposable et qu'aucune des représentations intermédiaires V, $F^+_{a_1}(V), \ldots, F^+_{a_{n-1}} \ldots F^+_{a_1}(V)$ n'est de la forme k_a, $a \in \underline{P}$.

Lorsque q est définie positive, W est fini de même que l'ordre h de c. Soit alors V une représentation indécomposable. On sait que c n'a pas de point fixe $\neq 0$ dans $\mathbb{Q}^P$, de sorte que $(1 + c + \ldots + c^{h-1})(\underline{\dim}\, V) = 0$, donc que $c^m(\underline{\dim}\, V) = 0$ pour quelque m. Ceci ne peut se produire que si

$$F^+_{a_r} \ldots F^+_{a_1} \Phi^{+p}(V) = k_a$$

pour quelques $p \leq m$ et $r < n$. Mais on a alors

$$V = \Phi^{-p} F^-_{a_1} \ldots F^-_{a_r} (k_a)$$

et

$$\underline{\dim}\ V = c^{-p} \sigma_{a_1} \ldots \sigma_{a_r} (\mathbf{a}) \quad ,$$

ce qui démontre le théorème 1.4 dans le cas défini positif.

1.8 Dans le cas positif non défini, nous nous contentons d'énoncer le résultat principal (voir [20], [10], ou [9]) :

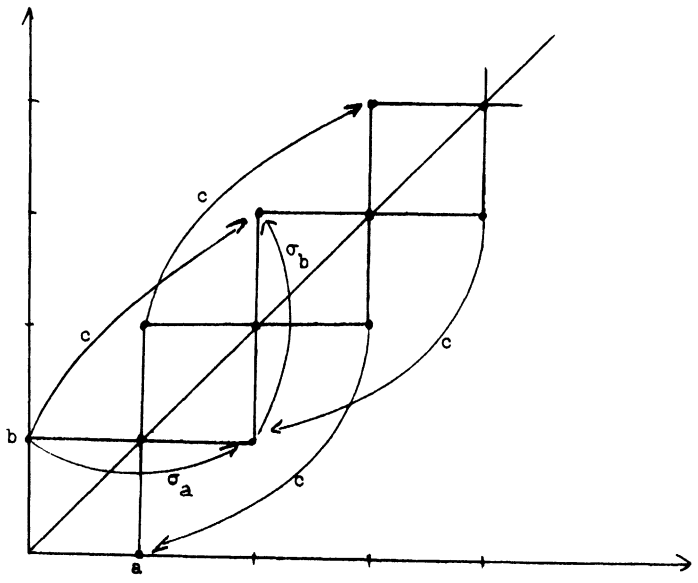
THÉORÈME.- Soit (Γ,Λ) un graphe orienté connexe de forme de Tits positive non définie. Soient $P_1,\ldots,P_n$ une liste complète de représentations projectives indécomposables non isomorphes deux à deux, et $I_1,\ldots,I_n$ une liste analogue d'injectifs.

a) On a $\Phi^+(P_i) = 0 = \Phi^-(I_i)$ pour tout i, et les représentations $\Phi^{-p}(P_i)$ et $\Phi^{+q}(I_j)$ sont indécomposables et non isomorphes deux à deux ($p, q \in \mathbb{N}$, $i, j \in \{1,2,\ldots,n\}$).

b) Soit Reg la sous-catégorie pleine de $\mathrm{modf}_{(\Gamma,\Lambda)}$ formée des représentations dites régulières, i.e. dont aucun facteur direct n'est de la forme $\Phi^{-p}(P_i)$ ou $\Phi^{+q}(I_j)$. La catégorie Reg est la somme directe d'une famille de sous-catégories pleines Reg_x indexées par les points fermés du k-schéma-droite-projective. Pour $x \neq 0, 1, \infty$, le "bloc" Reg_x est équivalent à $\mathrm{modf}_{\mathcal{O}_x}$, où $\mathcal{O}_x$ est l'anneau local de la droite projective en x. Pour $x = 0, 1, \infty$, Reg_x est équivalente à une catégorie unisérielle $\tilde{U}_{n(x)}$, $n(x) \geq 0$ (1.5 - on a $\tilde{U}_{n(x)} = \mathrm{modf}_{\mathcal{O}_x}$ si $n(x) = 0$, !). La catégorie Reg est abélienne et le plongement Reg $\to$ $\mathrm{modf}_{(\Gamma,\Lambda)}$ est exact.

1.9 Exemples.- a) $(\Gamma,\Lambda) = b \underset{d}{\overset{c}{\rightrightarrows}} a$. On a alors $q(xa + yb) = (x - y)^2$. Les réflexions σ_a et σ_b sont des symétries obliques d'axe $\Delta = k(1,1)$, alors que

c est une transvection d'axe Δ . Dans la figure nous avons marqué les solutions de l'équation



$q(x) = 0$ ou 1 appartenant à $\mathbb{N}^P \setminus 0$, i.e. associées à des représentations indécomposables.

Posons $\hat{n} = k^n \rightleftarrows k^{n+1}$ pour $n \geq 0$, avec $g(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_n,0)$, $d(x_1,\ldots,x_n) = (0, x_1,\ldots,x_n)$. De même, soit $\overset{\vee}{n} = k^{n+1} \rightleftarrows k^n$ avec $g(x_o,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_n)$ et $d(x_o,\ldots,x_n) = (x_o,\ldots,x_{n-1})$. On a alors $\Phi^{-p}(P_1) = \overset{\wedge}{2p}$, $\Phi^{-p}(P_2) = \overset{\wedge}{2p+1}$, $\Phi^{+q}(I_1) = \overset{\vee}{2q}$ et $\Phi^{+q}(I_2) = \overset{\vee}{2q+1}$.

Enfin, le foncteur

$$\mathrm{modf}_{k[T]} \times \mathrm{modf}_{k[[T]]} \to \mathrm{Reg} \ ,$$

de composantes $M \longmapsto (M \underset{T?}{\overset{id}{\rightrightarrows}} M)$ et $N \longmapsto (N \underset{id}{\overset{T?}{\rightrightarrows}} N)$ est une équivalence.

Cet exemple est connu depuis KRONECKER.

b) $(\Gamma,\Lambda) = c \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} a$ (b, γ) .

On a alors $q(xa + yb + zc) = x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy$. Nous avons la flemme de faire un dessin propre dans $\mathbb{R}^3$. Au lecteur d'être plus courageux !

Nous posons pour $n \geq 0$

$\overset{\frown}{2n} = k^n \underset{k^{n+1}}{\overset{k^n}{\rightrightarrows}}$ avec $\alpha = id$, $\gamma(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_n,0)$ et $\beta(x_1,\ldots,x_n) = (0, x_1,\ldots,x_n)$

$\overset{\frown}{2n+1} = k^n \underset{k^{n+1}}{\overset{k^{n+1}}{\rightrightarrows}}$ avec $\alpha(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_n,0)$, $\gamma = id$ et $\beta(x_1,\ldots,x_n) = (0, x_1,\ldots,x_n)$

$\overset{\smile}{2n} = k^{n+1} \underset{k^n}{\overset{k^n}{\rightrightarrows}}$ avec $\alpha(x_0,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_n)$, $\gamma = id$ et $\beta(x_0,\ldots,x_n) = (x_0,\ldots,x_{n-1})$

$\overset{\smile}{2n+1} = k^{n+1} \underset{k^n}{\overset{k^{n+1}}{\rightrightarrows}}$ avec $\alpha = id$, $\beta(x_0,\ldots,x_n) = (x_0,\ldots,x_{n-1})$ et $\gamma(x_0,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_{n-1})$.

On a alors $\Phi^{-p}(P_i) = \overset{\frown}{3p+i-1}$ et $\Phi^q(I_j) = \overset{\smile}{3q+j-1}$.

Enfin le foncteur

$$\mathrm{modf}_{k[T]} \times \widetilde{\underline{U}}_1 \to \mathrm{Reg} ,$$

de composantes $M \mapsto \left(M \underset{M}{\overset{id}{\rightrightarrows}} M \text{ (id, T?)}\right)$ et $g \circlearrowright V \to f \mapsto \left(W \underset{W}{\overset{g}{\rightrightarrows}} V \text{ (f, id)}\right)$,

est une équivalence.

Annexe : Une technique générale de classification des indécomposables

La méthode développée par Bernstein-Gelfand-Ponomarev est très élégante, mais limitée à une situation particulière. L'un des problèmes qui agitent les spécialistes, reste donc de déterminer les anneaux (artiniens) de type de représentation finie, i.e. n'ayant qu'un nombre fini de (classes) d'indécomposables. Nous nous proposons d'esquisser ici un algorithme qui, appliqué à un anneau de type de représentation finie, aboutit à la classification de ses indécomposables et permet de s'assurer que la liste obtenue est complète.

Dans toute la suite, nous désignons par $\underline{A}$ une catégorie additive où tout objet est somme directe finie d'indécomposables, les anneaux des endomorphismes de ceux-ci étant locaux. Nous désignons par $\widehat{\underline{A}^{o}}$ la catégorie des foncteurs covariants de $\underline{A}$ dans $\underline{Ab}$ (groupes abéliens), par M^{o} le foncteur $(M, ?)$ représenté par $M \in \underline{A}$ Dans $\widehat{\underline{A}^{o}}$ tout foncteur projectif est libre, i.e. somme directe de représentables (la démonstration de KAPLANSKY [15] s'applique presque sans modifications : appeler base de $F \in \widehat{\underline{A}^{o}}$ toute famille $(m_i \in F(M_i))$ telle que tout $m \in F(M)$ s'écrive de manière unique sous la forme $m = \Sigma F(\varphi_i)(m_i)$, les $\varphi_i : M_i \to M$ étant presque tous nuls).

Lorsque $F \in \widehat{A^{o}}$ et $M \in \underline{A}$, nous identifions $F(M)$ et $\mathrm{Hom}(M^{o}, F)$ au moyen de l'isomorphisme canonique, écrivant souvent $m : M^{o} \to F$ au lieu de $m \in F(M)$.

2.1 M. AUSLANDER [1] a remarqué que les classes d'objets simples de $\widehat{\underline{A}^{o}}$ correspondent bijectivement aux classes d'indécomposables de $\underline{A}$. La bijection est la suivante : lorsque $M \in \underline{A}$ est indécomposable, M^{o} contient un unique sous-foncteur maximal M' ($M'(N)$ est formé des morphismes $M \to N$ n'ayant pas de

rétraction). L'application $M \longmapsto M^o/M'$, associant à tout indécomposable un foncteur simple, est manifestement surjective ; elle est injective parce que M^o n'est autre que la couverture projective de M^o/M' !

2.2 On a donc un accès théorique vers les objets indécomposables de $\underline{A}$ à partir de tout foncteur fidèle $F \in \widehat{\underline{A}^o}$. En effet, si F est fidèle, il y a par définition un morphisme non nul $m : M^o \to F$ pour tout objet M , que nous pouvons ici supposer indécomposable. On a alors $M^o/M' \xrightarrow{\sim} m(M^o)/m(M')$, de sorte que tout foncteur simple apparaît comme sous-quotient de F et que la connaissance des sous-foncteurs de F implique celle des indécomposables de $\underline{A}$. Pour un bel exemple illustrant cette situation on pourra se reporter à [13], où GELFAND-PONOMAREV classifient les modules indécomposables de k-dimension finie sur $k[[a,b]]/(ab)$ (prendre pour $\underline{A}$ la catégorie des modules de k-dimension finie, pour F le foncteur-oubli associant à tout module le groupe sous-jacent !).

2.3 Soit (M_i) une liste complète et sans répétitions des indécomposables de $\underline{A}$. Soit (F_i) la liste des foncteurs simples correspondants. Tout endomorphisme de M_i induit un endomorphisme de M_i^o/M_i' , et l'application $\mathrm{End}(M_i)^o \to \mathrm{End}\, F_i$ ainsi obtenue identifie $\mathrm{End}\, F_i$ au corps résiduel K_i de l'anneau local $\mathrm{End}(M_i)^o$. Cette identification fait de $F_i(N)$ un espace vectoriel sur K_i pour tout $N \in \underline{A}$. De plus, on voit facilement que la famille (M_i , F_i) a les deux propriétés suivantes :

a) La famille (F_i) réfléchit les isomorphismes (i.e. un morphisme f de $\underline{A}$ est inversible ssi $F_i(f)$ est bijectif pour tout i) ;

b) on a $[F_i(M_j) : K_i] = \delta_{ij}$ = symbole de Kronecker, et $[F_i(M) : K_i] < \infty$ pour tout $M \in \underline{A}$ et tous i , j .

Il nous paraît important que la réciproque soit vraie. De façon précise,

appelons famille classifiante la donnée d'une famille d'épimorphismes m_i $m_i : M_i^o \to F_i$ et de corps $K_i \subset \mathrm{End}\, F_i$ vérifiant les conditions a) et b) ci-dessus. On a alors la

PROPOSITION.- Si $(m_i \in F_i(M_i), K_i)$ est une famille classifiante, les M_i forment une liste complète et sans répétitions d'objets indécomposables de $\underline{A}$, les F_i sont les foncteurs simples correspondants, et l'on a $K_i = \mathrm{End}\, F_i$.

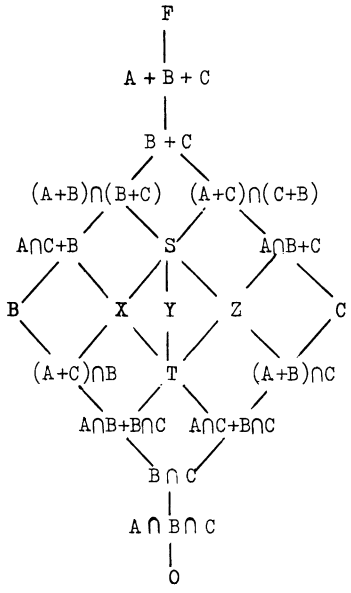
Montrons simplement que les définitions sont bien faites. Soit $M \in \underline{A}$. Pour tout i, soit $(m_{i\alpha})$ une base de l'espace vectoriel $F_i(M)$ sur K_i. Comme $m_i : M_i^o \to F_i$ est un épimorphisme, il y a des morphismes $\varphi_{i\alpha} : M_i \to M$ tels que $F_i(\varphi_{i\alpha})(m_i) = m_{i\alpha}$. Le morphisme induit $\varphi = (\varphi_{i\alpha}) : \coprod_{i,\alpha} M_i \to M$ est par construction tel que $F_i(\varphi)$ soit bijectif pour tout i. C'est un isomorphisme d'après a). Le reste est (encore plus) facile.

2.4 Tout cela est trivial et utile. Donnons deux exemples, simplistes vu la place qui nous reste :

a) Soit $\underline{A}$ la catégorie des modules de longueur finie sur $A = k[t]/(t^n)$. Soient S_i le foncteur $M \mapsto \mathrm{Ker}\, t_M \cap \mathrm{Im}\, t_M^{i-1}$ pour $i = 1,\dots,n+1$, $F_i = S_i/S_{i+1}$ et $K_i = k$ pour $i = 1,\dots,n$. Posons $M_i = A/At^i$ et $s_i = t^{i-1} \bmod t^i \in S_i(M_i)$. On a manifestement la suite exacte $0 \to M_{i-1}^o \to M_i^o \xrightarrow{s_i} S_i \to 0$ dans $\widehat{\underline{A}^o}$. L'image canonique m_i de s_i dans $F_i(M_i)$ est donc un épimorphisme $M_i^o \to F_i$. La condition b) de 2.3 est trivialement vérifiée. La condition a) l'est, puisque les foncteurs $M \to \mathrm{Ker}\, t_M^i \cap \mathrm{Im}\, t_M^j + \mathrm{Ker}\, t_M^{i-1}$ donnent manifestement naissance à une suite de composition du foncteur oubli, dont les quotients successifs sont isomorphes aux F_i, chaque F_i apparaissant avec la multipli-

cité i .

b) Soit $\underline{A}$ la catégorie (non abélienne) des espaces vectoriels de dimension finie sur k munis d'une suite de 3 sous-espaces vectoriels. Soient F , A , B et C les foncteurs associant à un objet $(V ; V_1, V_2, V_3)$ les groupes sous-jacents respectivement à V , V_1 , V_2 et V_3 . Les sous-foncteurs A , B et C de F engendrent dans F un treillis modulaire de sous-foncteurs (mais oui !), dont nous représentons ci-dessous quelques éléments, les autres s'en déduisant par permutation de A , B et C [3] :



$S = (B + C) \cap (C + A) \cap (A + B)$

$X = A \cap C + B \cap (A + C)$

$Y = B \cap C + A \cap (B + C)$

$Z = A \cap B + C \cap (A + B)$

$T = B \cap C + C \cap A + A \cap B$

Remontant notre diagramme de bas en haut en suivant par exemple la bordure droite, on obtient une suite de composition

$$0 \to A \cap B \cap C \to B \cap C \to A \cap C + B \cap C \to \ldots \to A + B + C \to F ,$$

dont les quatrième et septième quotients s'identifient au moyen d'isomorphismes à la Noether. Par construction, les suites de composition induites dans les sous-

foncteurs A , B et C ont des quotients nuls ou isomorphes aux quotients $F_1,\ldots,F_{10}$ de la suite précédente. La suite de foncteurs $(F_i)_{i\neq 7}$ réfléchit donc les isomorphismes. D'autre part, F_1 est "recouvert" par $(k\,;k,k,k)$, F_2 par $(k\,;0,k,k)$, F_3 par $(k\,;k,0,k)$, F_4 par $(k^2\,;k\times 0,0\times k,k(1,1))$, F_5 par $(k\,;0,0,k)$, F_6 par $(k\,;k,k,0)$, F_8 par $(k\,;0,k,0)$, F_9 par $(k\,;k,0,0)$ et finalement F_{10} par $(k\,;0,0,0)$. Prenant $K_i = k$ pour tout i , on a une famille classifiante !

2.5 Nous en venons maintenant à l'algorithme annoncé. Celui-ci présuppose connu un algorithme permettant de décomposer tout objet de $\underline{A}$ en indécomposables Par exemple, lorsque $\underline{A}$ est une catégorie de modules, nous aurons à faire de telles décompositions sur des modules donnés par générateurs et relations Cela peut évidemment s'avérer délicat dans la pratique du "calcul à la main".

Hypothèses : Pour simplifier, nous supposons donnés un anneau commutatif artinien k et des structures de k-modules sur les groupes $\mathrm{Hom}_{\underline{A}}(M,N)$ de telle manière que $\mathrm{Hom}_{\underline{A}}(M,N)$ soit de k-longueur finie pour tous M , N et que les applications de composition soient k-bilinéaires. Nous supposons en outre que $\underline{A}$ possède des conoyaux (mais non pas que $\underline{A}$ soit abélienne !). Tout cela est réalisé dans les principales applications que nous avons en vue. Nous supposons en outre que $\underline{A}$ est de type de représentation finie (i.e. n'a qu'un nombre fini de classes d'indécomposables) ; car notre but principal est de prouver qu'alors notre algorithme converge vers une famille classifiante.

Dans ces conditions, F(M) est muni pour tous $F \in \widehat{\underline{A}^0}$ et $M \in \underline{A}$ d'une structure de k-module, et la longueur $\ell(F)$ dans la catégorie $\widehat{\underline{A}^0}$ est bornée supérieurement par la somme des k-longueurs de F(M) , lorsque M parcourt une liste finie d'indécomposables. En particulier, $\ell(F)$ est finie si F(M) est de

k-longueur finie pour tout $M \in \underline{A}$.

L'algorithme démarre avec la donnée d'une famille de foncteurs non nuls (F_i) , finie et réfléchissant les isomorphismes. En outre, nous supposons donnée pour tout i une présentation finie

$$\coprod_{i,\alpha} M_i^0 \to M_i^0 \xrightarrow{m_i} F_i \to 0$$

de F_i . Tout cela est facile à réaliser dans la pratique : par exemple, dans le cas des modules de longueur finie sur une k-algèbre de k-longueur finie A , on peut démarrer avec le seul foncteur oubli, qui est représenté par A . Un autre exemple est donné plus loin.

Nous associons à la famille (F_i) son défaut de classification, qui est le nombre

$$d = \sum_i (\ell(F_i) - 1) .$$

Ce défaut est ≥ 0 ; il est $= 0$ ssi tous les F_i sont simples. Dans ce cas, plus de problème, car la famille réfléchit les isomorphismes, donc elle est "complète". Si $d > 0$, notre but est de construire pour quelque i un sous-foncteur $0 \neq F_i' \neq F_i$ de F_i et d'abandonner F_i au profit de F_i' et F_i/F_i' . La nouvelle famille, qui réfléchit encore les isomorphismes, contient alors un foncteur de plus, mais dans son défaut d' la contribution de F_i est remplacée par $\ell(F_i') + \ell(F_i/F_i') - 2 = \ell(F_i) - 2$, de sorte que $d' < d$ et qu'on a gagné un cran !

Dans la suite, nous associons un sous-foncteur F_i' de F_i à tout $m \in F(M)$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & M^0 & & & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle n^0} & \searrow{\scriptstyle m} & & & \\ \coprod M_{i\alpha}^0 & \longrightarrow & M_i^0 & \xrightarrow[m_i]{} & F & \to & 0 . \end{array}$$

Posant $F'_i = \operatorname{Im} m$, on obtient pour F'_i et F/F'_i les présentations

$$(\coprod_{i,\alpha} M_i^o) \coprod M^o \to M_i^o \to F/F'_i \to 0$$

et $$N^o \to M^o \to F'_i \to 0 ,$$

où N est la somme amalgamée du diagramme $\coprod M_{i\alpha} \leftarrow M_i \xrightarrow{n} M$.

Remplaçant F_i par F'_i et F_i/F'_i , nous disposons donc pour la nouvelle famille des données de départ nécessaires.

2.6 L'algorithme : Soit (F_i) la famille de départ donnée en 2.5 :

a) Si M_i n'est pas indécomposable, nous le décomposons d'abord en indécomposables, remplaçant M_i par l'un des facteurs, si l'un de ceux-ci suffit à "recouvrir" F_i . Sinon, l'un des facteurs a pour image dans F_i un sous-foncteur propre, et on applique 2.5.

Nous pouvons donc supposer chaque M_i indécomposable.

b) Soient $f_1,\dots,f_r$ des générateurs du k-module $\operatorname{Hom}_{\underline{A}}(M_i, M_i)$. Si $m_i \circ f_j^o$ a une restriction non nulle à $M_{i\alpha}$ pour quelque α , nous pouvons de nouveau appliquer 2.5 en posant $M = M_{i\alpha}$ et $n^o = f_j^o | M_{i\alpha}^o$.

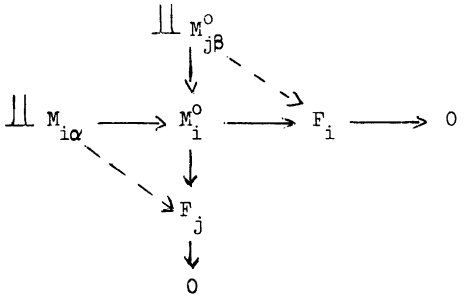
Nous nous ramenons ainsi au cas où tout endomorphisme de M_i^o peut être "descendu" à F_i , ce qui nous fournit un homomorphisme $\operatorname{End} M_i^o \to \operatorname{End} F_i$.

c) Soient $x_1,\dots,x_s$ des générateurs de l'idéal maximal de $\operatorname{End} M_i$. Si $m_i \circ x_j^o \neq 0$ pour quelque j , on applique 2.5 à $M = M_i$ et $n = x_j$.

Nous nous ramenons ainsi au cas où l'homomorphisme $\operatorname{End} M_i^o \to \operatorname{End} F_i$ se factorise par le corps résiduel K_i de l'anneau local $\operatorname{End} M_i^o$. Dans ce cas, $F_i(N)$ est un espace vectoriel sur K_i pour tout N , et l'on a $[F_i(M_i) : K_i] = 1$, parce que $m_i : M_i^o \to F_i$ est un épimorphisme.

d) Supposons enfin que $F_i(M_j) \neq 0$ pour quelques $i \neq j$. Si quelque $m \neq 0$

de $F_i(M_j)$ n'est pas un épimorphisme de M_j^o dans F_i, on peut appliquer 2.5. Sinon, M_j^o est une couverture projective de F_i et l'on a $M_i \cong M_j$, ainsi que le diagramme



On applique alors 2.5 à l'un des morphismes $M^o_{j\beta} \to F_i$ ou $M^o_{i\alpha} \to F_j$, à moins que tous ces morphismes ne soient nuls. Dans ce dernier cas, on a $F_i \cong F_j$, et l'on peut retirer F_j de la famille.

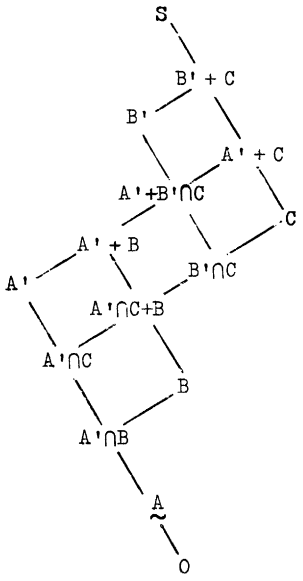
Finalement, on est ramené à la situation où $K_i \subset \mathrm{End}\, F_i$ et $[F_i(M_j) : K_i] = \delta_{ij}$, qui est le terme de l'algorithme !

2.7 Exemple.- Soient k un corps, $A = k[T]/(T^3)$ et $t = T \bmod T^3$. Soit $\underset{\sim}{A}$ la catégorie (non abélienne) des couples (M,N) formés d'un A-module de longueur finie M et d'un sous-module N. Considérons le foncteur-socle $S : (M,N) \longmapsto S_M = \mathrm{Ker}\, t_M$ et les sous-foncteurs $\underset{\sim}{A}$, B, C, A' et B' de S associant à (M,N) les sous-groupes suivants de S_M

$$\begin{array}{ccccc} S_M & \longleftarrow & S_M \cap tM & \longleftarrow & t^2M \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ S_M \cap N & \longleftarrow & S_M \cap tN & \longleftarrow & t^2N \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} S & \longleftarrow & B' & \longleftarrow & A' \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ C & \longleftarrow & B & \longleftarrow & \underset{\sim}{A} \end{array} .$$

Il est clair que la famille de ces foncteurs réfléchit les isomorphismes (comparer avec 2.4a)). Afin d'assurer à notre algorithme une convergence rapide, nous ne démarrons pas avec cette famille, préférant la "raffiner" au préalable par l'étude du treillis engendré par $\underset{\sim}{A}$, B, C, A' et B'. Ce dernier a la forme

suivante



$$S \xleftarrow[F_9]{(A/t,0)} B'+C \xleftarrow[F_8]{(A/t^2,0)} A'+C \xleftarrow[F_7]{(A,0)} C$$

$$C \xleftarrow[F_6]{(A/t,1)} B'\cap C \xleftarrow[F_5]{(A/t^2,t)} A'\cap C+B \xleftarrow[F_4]{(A,t^2)} B$$

$$B \xleftarrow[F_3]{(A/t^2,1)} A'\cap B \xleftarrow[F_2]{(A\mu\oplus A/t.\xi,t\mu+\xi)} \underset{\sim}{A}$$

$$\underset{\sim}{A} \xleftarrow[F_1]{(A,1)} 0$$

Remontant notre diagramme de bas en haut en suivant par exemple la bordure droite, nous obtenons une suite de composition (mais pas encore de Jordan-Hölder !) du foncteur-socle S . Nous notons $F_1,\ldots,F_9$ les différents quotients. Dans la figure ci-jointe, nous avons fait figurer au-dessus de chaque flèche un objet indécomposable de $\underline{A}$ "recouvrant" le quotient F_i correspondant (le sous-module est représenté par un générateur).

Considérons par exemple l'indécomposable (M_2,N_2) recouvrant F_2 : il représente le foncteur associant à tout (M,N) le groupe des solutions (m,x) des équations $tx = 0$ et $x + tm \in N$ dans M . L'épimorphisme $(M_2,N_2)^o \xrightarrow{m_2} F_2$ envoie (m,x) sur $t^2m \bmod t^2 N$. Son noyau est formé des (m,x) tels qu'il existe $n \in N$ avec $t^2m = t^2n$. Posant $m - n = y$ et $x + ty = z$, il est équivalent de dire qu'on a $m = n + y$ et $x = z - ty$, où (n,y,z) est une solution

de $t^2y = 0$, $tz = 0$, $n \in N$ et $z \in N$. Le foncteur de ces dernières solutions est représenté par $(A,1) \oplus (A/t^2, 0) \oplus (A/t,1)$. Ceci fournit une présentation de F_2 . Nous n'aurons pas besoin ici de "présenter" les autres F_i .

La suite de composition de S induit pour chaque (M_i, N_i) une suite de composition du socle S_{M_i} . Comme on a $[S_{M_i} : k] = 1$ pour $i \neq 2$, (M_2,N_2) est le seul "contrevenant" aux égalités $[F_i(M_j) : k] = \delta_{ij}$. On a en fait $F_2(M_2,N_2) \cong k \cong F_9(M_2,N_2)$ et $F_i(M_2,N_2) = 0$ pour $i \neq 2$. Nous sommes donc en mesure d'appliquer la partie d) de notre algorithme. Soit $m'_9 : (M_2,N_2)^0 \to F_9$ le morphisme associant à toute solution (m,x) des équations $tx = 0$ et $x + tm \in N$ la classe de x mod $S_M \cap N + S_M \cap tM$. L'image de ce morphisme est manifestement le sous-foncteur $F'_9 = C'/B' + C$ de F_9 tel que $C'(M,N) = S_M \cap (N + tM)$. Nous déterminons directement $\operatorname{Ker} m'_9$, qui est formé des (m,x) tels que $x = n + ty$ avec $tn = t^2y = 0$ et $n \in N$. Autrement dit, on a $(m,x) \in (\operatorname{Ker} m'_9)(M,N)$ ssi $m = m' - y$ et $x = n + ty$, où (m',y,n) est solution de $t^2y = tn = 0$, $n \in N$, $tm' \in N$. Le foncteur de ces dernières solutions est représenté par $(A,t) \oplus (A/t^2,0) \oplus (A/t,1)$, ce qui fait apparaître un nouvel indécomposable $(M'_2,N'_2) = (A,t)$. Nous sommes ainsi confronté avec le diagramme

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & (A,t)^0 \oplus (A/t^2,0)^0 \oplus (A/t,1)^0 & & \\
 & & & \nearrow & \downarrow & & \\
(A,1)^0 \oplus (A/t^2,0)^0 \oplus (A/t,1)^0 & \longrightarrow & (M_2,N_2) & \longrightarrow & F_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & F'_9 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
\end{array}
$$

Le morphisme induit $m_2' : (A,t)^o \to F_2$ a pour image le foncteur $F_2' = A_1/\underset{\sim}{A}$ tel que $A_1(M,N) = t(N \cap tM)$. On a de plus $F_2/F_2' = F_9'$, ces deux foncteurs ayant la même présentation. Nous pouvons donc retirer F_9' du "jeu" et obtenir la famille classifiante cherchée, formée de $(F_i , (M_i , N_i))$ pour $i \neq 2 , 9$, de $(F_2',(A,t))$, $(F_2/F_2',(M_2,N_2))$ et de $(F_9/F_9',(M_9,N_9))$. Si nous raffinons la suite de composition de départ en y intercalant les foncteurs A_1 et C' , nous obtenons une suite de Jordan-Hölder, où seul F_2/F_2' a la multiplicité" 2 . On a End $F = k$ pour tout foncteur simple F !

Remarques.- L'exemple précédent, évidemment plus simple à traiter par des moyens ad hoc, veut seulement illustrer la technique utilisée. Nous avons testé cette technique dans des cas plus compliqués, par exemple pour classifier les couples (M,W) formés d'un A-module et d'un sous-espace vectoriel. Il y a alors 29 indécomposables, résultat obtenu précédemment à l'aide d'autres méthodes par BONGARTZ [4]. D'après l'expérience que nous en avons, l'algorithme peut être poussé à son terme "à la main", lorsqu'il y a jusqu'à une cinquantaine d'indécomposables de longueurs "raisonnables". La méthode exige évidemment quelque patience. Elle "dépoètise" le sujet, mais prise les raccourcis astucieux. De quoi faire quelques longs problèmes de Taupe !

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. AUSLANDER - Representation theory of Artin algebras, I-III, Communications in Algebra (à paraître).

[2] I. N. BERNSTEIN - I. M. GELFAND - V. A. PONOMAREV - Coxeter functors and a theorem of Gabriel, Uspechi Mat. Nauk 28 (1973), 19-33.

[3] G. BIRKHOFF - Lattice theory, AMS Colloquium Publications XXV.

[4] BONGARTZ - Moduln mit Unterräumen, Diplomarbeit, Bonn 1974.

[5] N. BOURBAKI - Groupes et algèbres de Lie, chap. 4, 5, 6 ; Eléments de Mathématique, Hermann, Paris 1968.

[6] S. BRENNER - Some modules with nearly prescribed endomorphism rings, J. Alg. 23 (1972), 250-262.

[7] A. L. S. CORNER - Endomorphism algebras of large modules with distinguished submodules, J. Alg., 11 (1969), 155-185.

[8] V. DLAB - C. M. RINGEL- On algebras of finite representation type, à paraître dans J. Alg., Résumé dans C. R. Acad. Sc. Paris, t. 276 (1973), 1393-1396 et 1441-1442.

[9] V. DLAB - C. M. RINGEL - Representations of valued graphs, à paraître, Résumé dans le Compte-rendu du Colloque "Werkstätte über unzerlegbare Darstellungen von Ringen und Gruppen", Bonn, Sonderforschungsbereich Theoretische Mathematik, Novembre 1973.

[10] P. DONOVAN - M. R. FREISLICH - The representation theory of finite graphs and associated algebras, Carleton Lecture Notes 5, 1973.

[11] P. GABRIEL - Unzerlegbare Darstellungen I, man. math., 6 (1972), 71-103.

[12] P. GABRIEL - Indecomposable representations II, Symposia math Ist. Naz. di Alta Mat., Vol. XI, 1973.

[13] I. M. GELFAND - V. A. PONOMAREV - Non-decomposable representations of the Lorentz group, Usp. Mat. Nauk, 23 (1968), 3-60.

[14] I. M. GELFAND - V. A. PONOMAREV - Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite dimensional vector space, Coll. Math. Soc. Bolyai 5, Tihany, Hungary, 1970.

[15] I. KAPLANSKY - Projective modules, Ann. of Maths., 68 (1958), 372-377.

[16] H. KUPISCH - Beiträge zur Theorie nichthalbeinfacher Ringe mit Minimalbedingung, J. R. Ang. Mat., 201 (1959), 100-112.

[17] W. MULLER - Unzerlegbare Moduln über artinschen Ringen, Habilitationsschrift, München, 1974, à paraître dans Mat. Zeitschrift.

[18] NAKAYAMA - Note on uniserial and generalized uniserial rings, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 16 (1940), 285-289.

[19] L. A. NAZAROVA - Representations of quadruples, Isv. Acad. Nauk, 1964, 1361-1378.

[20] I. A. NAZAROVA - Representations of quivers of infinite type, Isv. Akad. Nauk SSSR, 37(1973), 752-791.

[21] L. A. NAZAROVA - A. V. ROITER - Representations of ordered sets, Zapiski nau. Sem. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova, 28 (1972), 5-31.

Informations dernières : Entre la frappe de cet exposé et la correction des épreuves, NAZAROVA et ROITER viennent de publier leur démonstration de la conjecture de Brauer-Thrall : si une algèbre A de dimension finie sur un corps infini k a une infinité de classes de modules indécomposables, alors il y a une infinité de n tels que le nombre de classes d'indécomposables de k-dimension n soit infini. Un tirage provisoire peut être obtenu auprès des auteurs : " Problèmes matriciels "catégoriques" et conjecture de Brauer-Thrall ", Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences d'Ukraine, Kiev.