

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PIERRE CARTIER

Inégalités de corrélation en mécanique statistique

Séminaire N. Bourbaki, 1974, exp. n° 431, p. 242-264

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1972-1973__15__242_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

INÉGALITÉS DE CORRÉLATION EN MÉCANIQUE STATISTIQUE

par Pierre CARTIER (*)

INTRODUCTION

Les phénomènes de transition de phase : ébullition de l'eau, fusion de la glace, magnétisation des substances ferromagnétiques, sont familiers à chacun, et tous les cours de physique en contiennent une description plus ou moins approfondie. Cependant, on est très loin de pouvoir les expliquer par les principes généraux de la théorie atomique et de la mécanique statistique.

Le modèle le plus étudié a été le modèle d'Ising plan, donnant une image très grossière d'un aimant plan, ou de certains types d'alliages. On a pu prouver dans ce cas l'existence de transitions de phase, et l'on a même une idée assez précise du mécanisme probabiliste de ces transitions de phase.

Un nouveau courant de recherches s'est développé depuis les premiers travaux de Griffiths sur les inégalités de corrélation (1967). Pour la première fois, on commence à pouvoir prouver dans des cas assez généraux des théorèmes expliquant l'allure qualitative des courbes de magnétisation, par exemple. De plus, les inégalités de corrélation ont permis de gros progrès dans le difficile problème du passage à la limite thermodynamique, c'est-à-dire la description probabiliste des systèmes à une infinité de particules.

(*) Texte révisé en décembre 1973.

Cet exposé comprend deux parties. Dans la première, nous décrivons à grands traits le modèle d'Ising plan, nous formulons les inégalités de corrélation et montrons comment ces inégalités permettent d'expliquer le comportement qualitatif des phénomènes de magnétisation. La seconde partie contient la démonstration de trois inégalités qui entraînent les inégalités de corrélation utilisées dans la première partie.

§ 1. Le modèle d'Ising en Mécanique Statistique.

1. Rappelons pour commencer les principes généraux de la Mécanique Statistique. Notons J la constante de Joule (équivalent mécanique de la chaleur) et k la constante de Boltzmann. Si un système thermodynamique passe d'une configuration S_1 à une configuration S_2 , l'accroissement d'entropie est $(k/J) \cdot \log P_1/P_2$, où P_j est la probabilité de la configuration S_j (loi de Boltzmann). En particulier, si la transformation thermodynamique se fait à température constante T , l'accroissement d'entropie est égal à $(E_2 - E_1)/JT$, la différence entre l'énergie interne finale E_2 et l'énergie interne initiale E_1 correspondant à la quantité de chaleur reçue. On est donc conduit avec Gibbs à postuler que la probabilité d'une configuration d'énergie E est proportionnelle à $e^{-E/kT}$.

Précisons le postulat de Gibbs dans le cas particulier d'un système mécanique hamiltonien à un nombre fini n de degrés de liberté. L'espace de configuration est une variété différentiable M de dimension n , l'espace des phases X est le fibré cotangent T^*M de M . Il existe sur X une forme différentielle α de degré 1, caractérisée par la propriété suivante : si β est une forme différen-

tielle de degré 1 sur M , correspondant à la section s du fibré X de base M , alors β est l'image réciproque de α par s . Posons $\omega = d\alpha$ et notons v la puissance extérieure d'ordre n de ω . La quantité physique "énergie" correspond à une fonction H sur X , l'hamiltonien du système. Il existe un unique champ de vecteurs ξ sur X tel que $i(\xi)\omega = -dH$, et les évolutions possibles du système au cours du temps correspondent aux courbes intégrales du champ de vecteurs ξ .

La fonction de partition de Gibbs est définie par $Z = \int_X e^{-H/kT} v$. Si cette intégrale est finie pour toute valeur T de la température (ce qui est presque toujours le cas), on définit la mesure de Gibbs μ sur X par $d\mu = Z^{-1} e^{-H/kT} v$; c'est une mesure de probabilité sur X , et la moyenne thermique d'une fonction F sur X est donnée par la formule

$$(1) \quad \langle F \rangle = Z^{-1} \int_X F \cdot e^{-H/kT} v.$$

Toutes les quantités thermodynamiques : entropie, pression, potentiel chimique,... sont définies à partir de telles moyennes selon des règles universelles.

2. Un des modèles les plus étudiés en Mécanique Statistique est le modèle d'Ising, dont nous décrirons la version plane, et qui fournit une description simplifiée des phénomènes de ferromagnétisme. Choisissons une origine dans le plan, et notons L un réseau carré, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers de deux vecteurs orthogonaux $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de même longueur ; on prendra cette longueur comme unité. On suppose qu'en chacun des points x du réseau L (appelés "sites") se trouve un atome, dont le spin mesuré

dans une direction donnée ne prend que deux valeurs 1 et -1 . Ce spin crée un moment magnétique atomique, et l'on ne tient compte que des interactions entre les moments magnétiques de deux atomes situés à la distance 1 .

Soit Λ une partie finie de L ; dans un champ magnétique extérieur B , l'énergie de la partie Λ du système est de la forme

$$(2) \quad H_{\Lambda} = - B \cdot \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x - \frac{J}{2} \sum_{x,y} \sigma_x \sigma_y .$$

On a noté σ_x le spin au site x et la somme double est étendue aux couples $\vec{x}, \vec{y}$ tels que $\vec{x} - \vec{y}$ soit de longueur 1 ; la constante J est supposée > 0 . Une configuration du système dans Λ est une fonction qui associe à chaque site dans Λ une valeur 1 ou -1 du spin. L'ensemble de ces configurations sera noté Ω_{Λ} ; il a $2^{|\Lambda|}$ éléments, si l'on note $|\Lambda|$ le nombre d'éléments de Λ . Si R est une configuration et x un site, on note $\sigma_x(R)$ la valeur du spin en x dans la configuration R ; autrement dit, σ_x est interprété comme une fonction sur Ω_{Λ} , et il en est de même de l'hamiltonien H_{Λ} d'après (2). Enfin, pour toute partie A de Λ , on pose

$$\sigma_A = \prod_{x \in A} \sigma_x .$$

Si T est la température et si $\beta = 1/kT$, la fonction de partition de Gibbs est donnée par $Z = \sum_{R \in \Omega_{\Lambda}} e^{-\beta H_{\Lambda}(R)}$, et la probabilité de se trouver dans la configuration R est égale à $Z^{-1} e^{-\beta H_{\Lambda}(R)}$. La moyenne thermique d'une quantité physique correspondant à la fonction F sur Ω_{Λ} est donc donnée par la formule

$$(3) \quad \langle F \rangle_{\Lambda} = Z^{-1} \sum_{R \in \Omega_{\Lambda}} F(R) \cdot e^{-\beta H_{\Lambda}(R)} .$$

3. Venons-en aux inégalités de corrélation pour le modèle d'Ising ; elles ont été démontrées en 1967 et 1968 par Griffiths, Kelly et

Sherman et sont habituellement désignées par le sigle GKS . Pour toute partie A de Λ , posons $\sigma_A^* = \sigma_A - \langle \sigma_A \rangle_\Lambda$ et notons $\langle \sigma_{A_1} \dots \sigma_{A_p} \rangle_\Lambda^t$ la valeur moyenne du produit $\sigma_{A_1}^* \dots \sigma_{A_p}^*$ (valeurs moyennes tronquées. On a évidemment $\langle \sigma_A \rangle_\Lambda^t = 0$; pour $p = 2, 3$, on obtient les cas particuliers (*)

$$(4) \quad \langle \sigma_A \sigma_B \rangle_\Lambda^t = \langle \sigma_A \sigma_B \rangle_\Lambda - \langle \sigma_A \rangle_\Lambda \langle \sigma_B \rangle_\Lambda$$

$$(5) \quad \langle \sigma_A \sigma_B \sigma_C \rangle_\Lambda^t = \langle \sigma_A \sigma_B \sigma_C \rangle_\Lambda + 2 \langle \sigma_A \rangle_\Lambda \langle \sigma_B \rangle_\Lambda \langle \sigma_C \rangle_\Lambda \\ - \langle \sigma_A \rangle_\Lambda \langle \sigma_B \sigma_C \rangle_\Lambda - \langle \sigma_B \rangle_\Lambda \langle \sigma_A \sigma_C \rangle_\Lambda - \langle \sigma_C \rangle_\Lambda \langle \sigma_A \sigma_B \rangle_\Lambda .$$

Les inégalités GKS sont valables dans le cas plus général où l'hamiltonien est de la forme

$$(6) \quad H_\Lambda = - \sum_{A \subset \Lambda} J_A \sigma_A \quad (J_A \geq 0 \text{ pour toute partie } A \text{ de } \Lambda) ,$$

la valeur moyenne étant toujours définie par la formule (3) . On a alors

$$(7) \quad \langle \sigma_A \rangle_\Lambda \geq 0$$

$$(8) \quad \langle \sigma_A \sigma_B \rangle_\Lambda^t \geq 0 .$$

Nous donnerons plus loin la démonstration d'inégalités encore plus générales.

Il existe une autre inégalité de corrélation, démontrée par Griffiths, Hurst et Sherman, et désignée par le sigle GHS. Elle est valable pour les hamiltoniens de la forme

$$(9) \quad H_\Lambda = - \sum_{x \in \Lambda} J_x \sigma_x - \frac{1}{2} \sum_{x, y} J_{xy} \sigma_x \sigma_y$$

(*) Ces cas seront les seuls utilisés dans la suite ; lorsque $p \geq 4$, la définition des moyennes tronquées donnée ici ne coïncide pas avec la définition usuelle en Mécanique Statistique.

avec des constantes $J_x \geq 0$ et $J_{xy} \geq 0$, en particulier pour le modèle d'Ising avec un champ extérieur $B \geq 0$. Voici l'inégalité GHS

$$(10) \quad \langle \sigma_x \sigma_y \sigma_z \rangle_{\Lambda}^t \leq 0.$$

La variation d'une valeur moyenne par rapport à un paramètre extérieur u tel que la température T , le champ magnétique extérieur B , la constante de couplage J , etc..., est donnée par le corollaire suivant de la définition (3)

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial u} \langle F \rangle_{\Lambda} = \langle F \cdot \frac{\partial}{\partial u} (-\beta H) \rangle_{\Lambda} - \langle F \rangle_{\Lambda} \langle \frac{\partial}{\partial u} (-\beta H) \rangle_{\Lambda}.$$

On en déduit immédiatement les deux relations suivantes pour H_{Λ} de la forme (6)

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial J_A} \langle \sigma_B \rangle_{\Lambda} = \beta \langle \sigma_A \sigma_B \rangle_{\Lambda}^t, \quad \frac{\partial^2}{\partial J_A \partial J_B} \langle \sigma_C \rangle_{\Lambda} = \beta^2 \langle \sigma_A \sigma_B \sigma_C \rangle_{\Lambda}^t.$$

Dans le cas du modèle d'Ising avec $B \geq 0$, on a $\langle \sigma_x \rangle_{\Lambda} \geq 0$ d'après (7); ceci signifie que le spin en un site quelconque x a une probabilité au moins égale à $\frac{1}{2}$ d'être dirigé dans le sens du champ extérieur. Lorsque $B = 0$, la mesure de probabilité de Gibbs est invariante par le changement $\sigma_x \mapsto -\sigma_x$ (pour tout site $x \in \Lambda$); on a par suite $\langle \sigma_x \rangle_{\Lambda} = 0$ et l'inégalité (8) se réduit à $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda} \geq 0$. Autrement dit, le spin en un site x prend les deux valeurs 1 et -1 avec la même probabilité $\frac{1}{2}$, et si x et y sont deux sites distincts, la probabilité que σ_x et σ_y aient même signe est au moins égale à $\frac{1}{2}$. Cette tendance à l'alignement des spins est conséquence de l'hypothèse $J > 0$ du ferromagnétisme.

4. Le passage à la limite thermodynamique consiste à faire tendre en un sens convenable l'ensemble fini $\Lambda \subset L$ vers l'infini. On définit une configuration du système infini L comme un élément de l'espace produit $\Omega = \{1, -1\}^L$; pour la topologie produit des topologies

discrètes des facteurs, l'espace Ω est compact et métrisable. Un état (thermodynamique) du système est une mesure de probabilité sur l'espace Ω (définie sur la tribu borélienne de Ω). Si un tel état μ est fixé, on pose $\langle F \rangle = \int_{\Omega} F d\mu$ pour toute fonction mesurable F sur Ω . Si A et A' sont deux parties finies de L , telles que $A \supset A'$, on a l'inégalité

$$(13) \quad \sum_{B \subset A} (-1)^{|B \cap A'|} \langle \sigma_B \rangle \geq 0 ;$$

en effet, le premier membre représente $2^{|A|}$ fois la probabilité que tous les spins aient la valeur 1 dans $A - A'$ et la valeur -1 dans A' . Réciproquement, si l'on se donne pour toute partie finie A de L un nombre $\langle \sigma_A \rangle$ avec $\langle \sigma_{\phi} \rangle = 1$, et que les inégalités linéaires (13) soient satisfaites, il existe une unique mesure de probabilité μ sur Ω telle que $\langle \sigma_A \rangle = \int \sigma_A d\mu$ pour toute partie A .

Le groupe des translations du réseau L agit de manière naturelle sur l'espace Ω et donc sur l'ensemble des états $\mathcal{X}$; l'ensemble des états invariants par translations est convexe et compact pour la topologie vague; ses points extrémaux sont les états ergodiques du système.

Physiquement, un état d'équilibre est un état dans lequel toute partie finie Λ de L est en équilibre sous l'action du champ magnétique créé par les sites extérieurs à Λ ; voici la formulation mathématique précise de cette condition, due à Dobrushin. Notons $\partial\Lambda$ l'ensemble des sites n'appartenant pas à Λ , mais qui se trouvent à la distance 1 d'un site appartenant à Λ ; comme les ensembles finis Λ et $\partial\Lambda$ sont disjoints, on a une identification naturelle de $\Omega_{\Lambda} \times \Omega_{\partial\Lambda}$ avec l'espace de configuration $\Omega_{\Lambda \cup \partial\Lambda}$, et l'on notera $R.S$ la configuration sur $\Omega_{\Lambda \cup \partial\Lambda}$ obtenue en juxtaposant la configu-

ration R sur Λ et la configuration S sur $\partial\Lambda$. Par opposition avec la loi de probabilité "libre" sur Ω_Λ définie à la fin du n° 2, une loi de probabilité de Gibbs avec conditions aux limites est une loi de la forme

$$(14) \quad \pi(R) = \sum_{S \in \Omega_{\partial\Lambda}} c_S \exp - \beta H_{\Lambda \cup \partial\Lambda}(R, S) \quad (\text{pour } R \text{ dans } \Omega_\Lambda),$$

avec des constantes positives c_S . Un état d'équilibre du système L est une mesure de probabilité sur Ω dont la projection sur Ω_Λ est de la forme (14) pour toute partie finie Λ de L .

Par définition, une phase thermodynamique est un état d'équilibre ergodique ; par application des théorèmes de représentation intégrale de Choquet, on montre que pour tout état d'équilibre μ invariant par translation, il existe une unique mesure de probabilité π sur l'ensemble Φ des phases thermodynamiques telle que $\mu = \int_{\Phi} t. d\pi(t)$; autrement dit, μ est un mélange de phases thermodynamiques. Il se peut qu'une phase thermodynamique ne soit pas un point extrémal de l'ensemble des états d'équilibre extrémaux, qui ne sont plus invariants par translation ; on dit qu'il y a alors brisure de symétrie (*).

Les inégalités de corrélation GKS permettent de définir deux états d'équilibre invariants. Tout d'abord, les moyennes "libres" étant définies comme dans (3), on a $\langle \sigma_A \rangle_\Lambda \leq \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda'} \leq 1$ lorsque

(*) La définition des phases thermodynamiques dépend du groupe de symétrie envisagé ; dans le modèle d'Ising plan, on peut par exemple ajouter aux translations le renversement de tous les spins, et ceci modifie effectivement les phases.

$A \subset \Lambda \subset \Lambda'$; en effet, on passe de l'hamiltonien $H_{\Lambda'}$ à l'hamiltonien H_{Λ} en supprimant certaines paires de "liaisons" $J\sigma_x\sigma_y$, ce qui revient à annuler certaines constantes J_A dans un hamiltonien général du type $H_{\Lambda'} = - \sum_{A \subset \Lambda'} J_A \sigma_A$; or les formules (8) et (12) montrent que $\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda'}$ est fonction croissante de toutes les variables J_B . Comme les inégalités (13) se conservent par passage à la limite, il existe un état π caractérisé par

$$(15) \quad \int_{\Omega} \sigma_A d\pi = \sup_{\Lambda \subset L} \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda}.$$

Pour toute partie finie Λ de L , soit e_{Λ} la configuration sur Λ telle que $\sigma_x(e_{\Lambda}) = 1$ pour tout x dans Λ . Les moyennes "de Dirichlet" sont définies par la formule

$$(16) \quad \langle F \rangle_{D, \Lambda} = \frac{\sum_{R \in \Omega_{\Lambda}} F(R) \cdot \exp - \beta H_{\Lambda \cup \partial \Lambda}(R, e_{\Lambda})}{\sum_{R \in \Omega_{\Lambda}} \exp - \beta H_{\Lambda \cup \partial \Lambda}(R, e_{\Lambda})}.$$

De manière intuitive, on aligne les spins de $\partial \Lambda$ par un champ magnétique très fort dans $\partial \Lambda$. En utilisant comme plus haut les inégalités GKS, on établit l'inégalité $\langle \sigma_A \rangle_{D, \Lambda} \geq \langle \sigma_A \rangle_{D, \Lambda'}$ lorsque $\Lambda \cup \partial \Lambda \subset \Lambda' \subset \Lambda'$. L'état π_D est alors défini par

$$(17) \quad \int_{\Omega} \sigma_A d\pi_D = \inf_{\Lambda \subset L} \langle \sigma_A \rangle_{D, \Lambda}.$$

Avec ces définitions, π et π_D sont des états d'équilibre invariants.

5. Les inégalités de corrélation permettent de donner une description qualitative des phénomènes de magnétisme. Nous considérerons l'état π défini ci-dessus et nous poserons $\langle F \rangle = \int_{\Omega} F d\pi$; il est immédiat que les inégalités (7), (8) et (10) du n° 3 passent à la limite.

D'après l'invariance par translation de π , il existe un nombre

$M = M(B, T)$ tel que $\sum_{x \in \Lambda} \langle \sigma_x \rangle = |\Lambda| \cdot M$ pour toute partie finie Λ de L ; il mesure la magnétisation du système à la température T et dans le champ extérieur B . Les inégalités GHS et GKS entraînent alors les résultats suivants :

- a) A champ B constant, la magnétisation $M(B, T)$ est fonction décroissante de la température T .
- b) A température T constante et lorsque l'on a $B > 0$, la magnétisation $M(B, T)$ est fonction croissante et concave du champ magnétique B .

Enfin, la formule $M(-B, T) = -M(B, T)$ résulte de l'invariance de l'état π par renversement des spins.

On montre aussi que l'on peut définir l'énergie libre $p(B, T)$ par la limite de $|\Lambda|^{-1} \cdot \log \left[\sum_{R \in \Omega_\Lambda} \exp -\beta H_\Lambda(R) \right]$ lorsque Λ tend vers l'infini en un sens convenable (on peut prendre par exemple des carrés concentriques). En appliquant le théorème de Lee-Yang (cf. le livre de Ruelle) et le fait qu'une limite uniforme de fonctions holomorphes sans zéros ne peut acquérir de zéro, on montre que $p(B, T)$ est fonction analytique dans le demi-plan $T > 0$, dont on a ôté un intervalle défini par $B = 0$, $0 < T \leq T_c$. La température critique T_c n'est autre que la température de Curie, et l'on peut prouver les résultats suivants, en accord avec l'expérience :

- a) Supposons d'abord qu'on ait $0 < T < T_c$. Lorsque $B \neq 0$, il y a une seule phase. Lorsque B tend vers 0 par valeurs positives, $M(B, T)$ tend vers une limite $M_+(0, T) > 0$, et il existe de même une valeur limite $M_-(0, T) = -M_+(0, T)$ pour les valeurs de B négatives. Pour $B = 0$, il existe deux phases π_+ et π_- , correspondant respectivement aux magnétisations $M_+(0, T)$ et $M_-(0, T)$; elles se déduisent l'une de l'autre par retournement de tous les spins, on a $\pi_+ = \pi_D$ et le mélange de phases $\pi = (\pi_+ + \pi_-)/2$. Enfin, lorsque

T tend vers 0, l'état π_+ (resp. π_-) tend vers la masse unité sur la configuration dans laquelle tous les spins sont égaux à 1 (resp. -1).

b) Lorsque l'on a $T \geq T_c$, il y a une seule phase pour toute valeur de B , et $M(B, T)$ est fonction continue de B aussi lorsque $B = 0$.

Il est important de noter que la température critique ne se manifeste qu'après le passage à la limite thermodynamique.

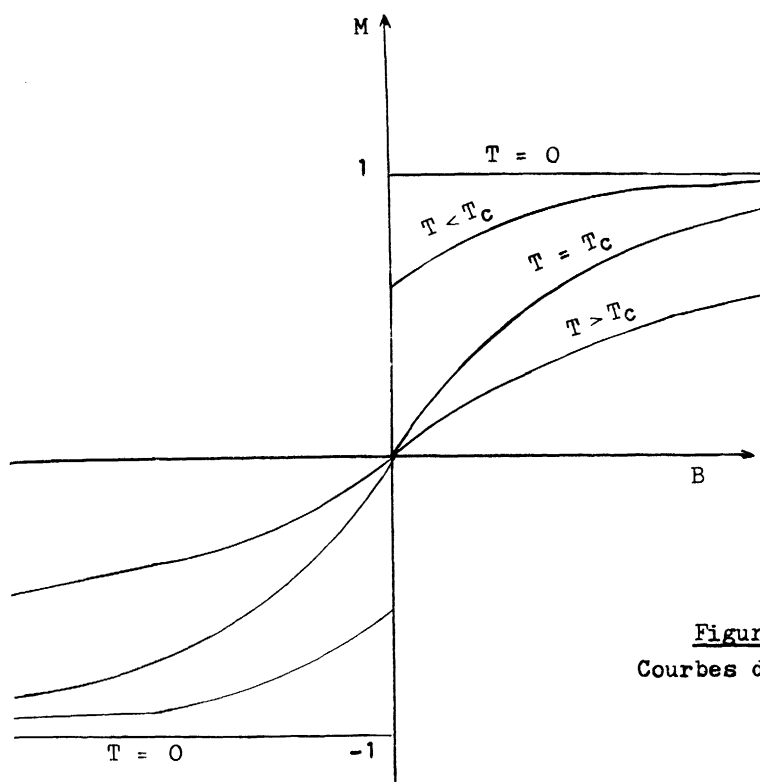


Figure 1
Courbes de magnétisation

§ 2. Démonstration des inégalités de corrélation.

6. Voici les notations. On choisit un entier $k \geq 1$, et l'on pose $X = \underline{\mathbb{R}}^k$; la mesure μ sur X est de la forme $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_k$, où $\mu_1, \dots, \mu_k$ sont des mesures positives sur $\underline{\mathbb{R}}$. Si V est une fonction mesurable réelle sur X , telle que e^V soit μ -intégrable, on définit une mesure de probabilité π_V sur X par la formule

$$(18) \quad \int_X f \, d\pi_V = \frac{\int_X f \cdot e^V d\mu}{\int_X e^V d\mu} \quad ;$$

la quantité précédente sera aussi notée $\pi_V(f)$.

Nous empruntons maintenant à la statistique les notions usuelles de covariance et corrélation. Soit f une fonction réelle dans $L^2(X, \pi_V)$; on pose $f^* = f - \pi_V(f)$ (centrage de f) et l'on pose $\sigma_V(f) = \|f^*\|_{L^2}$ (écart-type de f). Si g est une autre fonction réelle dans $L^2(X, \pi_V)$, la covariance de f et g est définie par la formule

$$(19) \quad C_V(f, g) = \pi_V(f^* g^*) = \pi_V(fg) - \pi_V(f) \cdot \pi_V(g) .$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le coefficient de corrélation de f et g , défini lorsque f et g ne sont pas constantes par

$$(20) \quad r_V(f, g) = C_V(f, g) / \sigma_V(f) \sigma_V(g) ,$$

est compris entre 1 et -1; il ne peut être égal à 1 ou -1 que s'il existe une relation linéaire de la forme $af + bg + c = 0$, avec trois constantes réelles a , b et c non toutes nulles.

On dit que les fonctions f et g sont positivement corrélées si l'on a $r_V(f, g) \geq 0$, c'est-à-dire $C_V(f, g) \geq 0$. Ceci équivaut à l'inégalité

$$(21) \int_X \int_X [f(x) - f(x')] \cdot [g(x) - g(x')] e^{V(x) + V(x')} d\mu(x) d\mu(x') \geq 0 ,$$

car la quantité ci-dessus n'est autre que $2 C_V(f, g) \left[\int_X e^V d\mu \right]^2$.

7. Voici le premier critère de corrélation positive, obtenu par une application immédiate des méthodes de Ginibre.

THÉORÈME 1. On suppose que les mesures $\mu_1, \dots, \mu_k$ sur $\mathbb{R}$ sont invariantes par la symétrie $x \mapsto -x$, et que les fonctions f , g et V sur $X = \mathbb{R}^k$ se développent en séries de puissances à coefficients positifs par rapport aux coordonnées. Alors f et g sont positivement corrélées.

Pour tout entier $n \geq 1$, notons X_n la partie compacte de X définie par les inégalités $|x_1| \leq n, \dots, |x_k| \leq n$. Comme l'intégrale (21) est la limite des intégrales analogues étendues à $X_n \times X_n$, on peut supposer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que la mesure μ soit à support dans X_n . Comme on a $e^V = \sum_{m=0}^{\infty} V^m/m!$ et que cette série converge uniformément dans X_n , on voit qu'il suffit de démontrer l'inégalité

$$(22) \int_X \int_X [f(x) - f(x')] \cdot [g(x) - g(x')] \cdot [V(x) + V(x')]^m d\mu(x) d\mu(x') \geq 0$$

pour tout entier $m \geq 0$.

Considérons plus généralement les intégrales de la forme suivante

$$(23) J_{m,p}(f_1, \dots, f_m; g_1, \dots, g_p) = \int_X \int_X \prod_{i=1}^m [f_i(x) - f_i(x')] \prod_{j=1}^p [g_j(x) + g_j(x')] d\mu(x) d\mu(x') .$$

Nous allons montrer que ces intégrales sont positives lorsque les

fonctions f_i et g_j ont des développements en séries de puissances à coefficients positifs ; ceci prouvera l'inégalité (22) et donc le théorème 1 .

La démonstration est basée sur les remarques suivantes :

a) Toute série de puissances à coefficients positifs qui converge en tout point de X_n converge uniformément dans cet ensemble.

b) L'intégrale $J_{m,p}(f_1, \dots, f_m; g_1, \dots, g_p)$ dépend de manière symétrique de $f_1, \dots, f_m$ et aussi de $g_1, \dots, g_p$.

c) Si $f_1 = f_1 f_1''$, on a l'identité

$$(24) \quad 2 J_{m,p}(f_1, \dots, f_m; g_1, \dots, g_p) = J_{m,p+1}(f_1', f_2, \dots, f_m; f_1'', g_1, \dots, g_p) \\ + J_{m,p+1}(f_1'', f_2, \dots, f_m; f_1', g_1, \dots, g_p) ;$$

pour obtenir cette formule, il suffit de transformer

$$f_1(x) - f_1(x') = f_1'(x)f_1''(x) - f_1'(x')f_1''(x')$$

au moyen de la relation élémentaire

$$(25) \quad 2(a'a'' - b'b'') = (a' - b')(a'' + b'') + (a'' - b'')(a' + b') ,$$

et d'intégrer. On laisse au lecteur le soin d'écrire la relation analogue lorsque $g_1 = g_1' g_1''$.

La remarque a) permet de se limiter au cas où $f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_p$ sont des monômes par rapport aux coordonnées. Les remarques b) et c) permettent de raisonner par récurrence sur le degré de ces monômes, et donc de se ramener au cas où chacune des fonctions

$f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_p$ est une coordonnée. Mais comme la mesure μ sur $X = \mathbb{R}^k$ est un produit de k mesures sur $\mathbb{R}$, l'intégrale $J_{m,p}$ se ramène dans ce dernier cas à un produit de k intégrales de la forme

$$(26) \quad K_{r,s} = \int_{\underline{R}} \int_{\underline{R}} (x - x')^r (x + x')^s d\lambda(x) d\lambda(x') ;$$

on suppose que la mesure λ sur $\underline{R}$ est invariante par la symétrie $x \mapsto -x$.

Si l'on change x' en $-x'$ dans (26), on obtient donc

$K_{r,s} = K_{s,r}$; par contre l'échange de x et x' entraîne $K_{r,s} = (-1)^r K_{r,s}$. Par suite, $K_{r,s}$ est nul si l'un des nombres r ou s est impair ; mais si r et s sont pairs, la fonction à intégrer dans (26) est positive, d'où $K_{r,s} \geq 0$.

C.Q.F.D.

8. Explicitons quelques conséquences du théorème 1. Tout d'abord, si f et V se développent en séries de puissances à coefficients positifs, et si les mesures $\mu_1, \dots, \mu_k$ sont invariantes par la symétrie $x \mapsto -x$, on a l'inégalité

$$(27) \quad \pi_V(f) \geq 0.$$

Comme dans la démonstration du théorème 1, on se ramène d'abord au cas où μ est à support compact ; on utilise alors la convergence uniforme sur tout compact de la série exponentielle et l'identité

$$(28) \quad 2\pi_V(f) \cdot \int_X e^V d\mu = \int_X \int_X [f(x) + f(x')] \cdot e^{V(x) + V(x')} d\mu(x) d\mu(x') \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_X \int_X [f(x) + f(x')] \cdot [V(x) + V(x')]^m d\mu(x) d\mu(x'),$$

et l'on se trouve de nouveau ramené à la positivité des intégrales $J_{m,p}$.

Conservons les hypothèses précédentes, et considérons une fonction V' sur X , développable en série de puissances à coefficients positifs. Je dis que l'on a

$$(29) \quad \pi_V(f) \leq \pi_{V+V'}(f).$$

En effet, on constate immédiatement que $\pi_{V+V'}(f) - \pi_V(f)$ est égal à

$$C_V(f, e^{V'}) \frac{\int_X e^V d\mu}{\int_X e^{V+V'} d\mu}$$

et l'on a $C_V(f, e^{V'}) \geq 0$ d'après le théorème 1, puisque $e^{V'}$ se développe en série de puissances à coefficients positifs.

Pour obtenir les inégalités GKS, il suffit de considérer le cas où $\mu_1, \dots, \mu_k$ sont égales à la mesure de probabilité sur $\underline{\mathbb{R}}$ qui attribue la masse $\frac{1}{2}$ aux deux points 1 et -1, et où f et g sont produits d'une partie de l'ensemble des coordonnées.

9. THÉOREME 2. On suppose que les fonctions f et g sur $X = \underline{\mathbb{R}}^k$ sont croissantes par rapport à chacune des k variables, et que l'on a l'inégalité (*)

$$(30) \quad V(x) + V(y) \leq V(x \wedge y) + V(x \vee y) .$$

Alors, f et g sont positivement corrélées.

Pour appliquer ce théorème au modèle d'Ising, on suppose comme plus haut que les mesures $\mu_1, \dots, \mu_k$ sont égales à la mesure de probabilité sur $\underline{\mathbb{R}}$ qui a la masse $\frac{1}{2}$ en chacun des points 1 et -1 ; la fonction V est de la forme

$$(31) \quad V(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^k J_i x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k J_{ij} x_i x_j ,$$

et l'inégalité (30) se démontre sans difficulté sous l'hypothèse $J_{ij} \geq 0$, sans restriction de signe sur les coefficients J_i (représentant le champ magnétique extérieur).

(*) On note $x \wedge y$ (resp. $x \vee y$) le vecteur dont la i -ème coordonnée est le minimum (resp. le maximum) des nombres x_i et y_i .

Démonstration du théorème 2.

On raisonne par récurrence sur la dimension k ; on pose $Y = \mathbb{R}^{k-1}$ et l'on identifie X à $Y \times \mathbb{R}$; la mesure μ sur X est donc de la forme $\alpha \otimes \beta$. Nous avons à démontrer que l'intégrale

$$(32) \quad A = \int_X \int_X [f(x) - f(x')] \cdot [g(x) - g(x')] U(x) \cdot U(x') \, d\mu(x) \, d\mu(x')$$

est positive (on a posé $U = e^V$). Or, le théorème de Fubini montre que l'on a $A = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} B(s, s') \, d\beta(s) \, d\beta(s')$ avec la définition

$$(33) \quad B(s, s') = \int_Y \int_Y [f(y, s) - f(y', s')] \cdot [g(y, s) - g(y', s')] U(y, s) U(y', s') \, d\alpha(y) \, d\alpha(y') .$$

Il suffit donc de prouver que la fonction B est positive sur $\mathbb{R}^2$.

Introduisons de nouvelles fonctions Z , F , G et H sur $\mathbb{R}$ comme suit :

$$(34) \quad Z(s) = \int_Y U(y, s) \, d\alpha(y)$$

$$(35) \quad F(s) = \int_Y f(y, s) U(y, s) \, d\alpha(y)$$

$$(36) \quad G(s) = \int_Y g(y, s) U(y, s) \, d\alpha(y)$$

$$(37) \quad H(s) = \int_Y f(y, s) g(y, s) U(y, s) \, d\alpha(y) .$$

L'application de l'hypothèse de récurrence aux fonctions $f(., s)$, $g(., s)$ et $V(., s)$ sur Y fournit immédiatement l'inégalité

$$(38) \quad F(s)G(s) \leq Z(s)H(s) .$$

On a évidemment $B(s, s') = B(s', s)$ et il nous suffit donc de prouver l'inégalité $B(s, s') \geq 0$ sous l'hypothèse supplémentaire $s \leq s'$. Soient y et y' deux points de Y tels que $y_i \geq y'_i$ pour $1 \leq i \leq k-1$; posons $x = (y, s)$ et $x' = (y', s')$. On a $x \wedge x' = (y', s)$ et $x \vee x' = (y, s')$; l'hypothèse faite sur V donne par exponentiation

$$(39) \quad U(x)U(x') \leq U(x \wedge x')U(x \vee x') ,$$

c'est-à-dire

$$(40) \quad \frac{U(y, s')}{U(y, s)} \geq \frac{U(y', s')}{U(y', s)} .$$

Autrement dit, la fonction sur Y définie par $g_1(y) = U(y, s')/U(y, s)$ est croissante par rapport à chacune des $k-1$ coordonnées. Par application de l'hypothèse de récurrence aux fonctions $f(., s)$, g_1 et $V(., s)$ sur Y , on obtient l'inégalité

$$(41) \quad F(s)Z(s') \leq Z(s) \int_Y f(y, s)U(y, s') \, d\alpha(y) .$$

L'hypothèse de croissance faite sur f entraîne $f(y, s) \leq f(y, s')$ puisque $s \leq s'$, et (41) a donc le corollaire suivant

$$(42) \quad Z(s).F(s') - Z(s').F(s) \geq 0 .$$

En remplaçant f par g , on a aussi l'inégalité

$$(43) \quad Z(s).G(s') - Z(s').G(s) \geq 0 .$$

Un calcul immédiat donne

$$(44) \quad B(s, s') = Z(s').H(s) - F(s).G(s') - F(s').G(s) + Z(s).H(s') ,$$

et par conséquent

$$(45) \quad \begin{aligned} Z(s)Z(s')B(s, s') = & [Z(s).F(s') - Z(s').F(s)] \cdot [Z(s).G(s') - Z(s').G(s)] \\ & + Z(s')^2 \cdot [Z(s).H(s) - F(s).G(s)] \\ & + Z(s)^2 \cdot [Z(s').H(s') - F(s').G(s')] . \end{aligned}$$

Les inégalités (38), (42) et (43) entraînent alors $B(s, s') \geq 0$ lorsque $Z(s)$ et $Z(s')$ ne s'annulent pas. Par ailleurs, $Z(s) = 0$ entraîne $U(y, s) = 0$ pour α -presque tout $y \in Y$, d'où $F(s) = G(s) = H(s) = 0$ et donc $B(s, s') = 0$. De même $Z(s') = 0$ entraîne $B(s, s') = 0$. C.Q.F.D.

Avec les notations du théorème 2, posons $U_1 = e^V$ et $U_2 = g.e^V$.

L'inégalité (30) jointe au caractère croissant de g entraîne

$$(46) \quad U_1(x \wedge y) U_2(x \vee y) \geq U_1(x) U_2(y) ,$$

et la conclusion du théorème 2 s'écrit sous la forme équivalente

$$(47) \quad \frac{\int_X f U_1 d\mu}{\int_X U_1 d\mu} \geq \frac{\int_X f U_2 d\mu}{\int_X U_2 d\mu} .$$

En fait, on peut montrer (Holley-Preston) que si les fonctions positives U_1 et U_2 satisfont à (46), l'inégalité (47) est valable pour toute fonction croissante f .

10. Venons-en à la démonstration de l'inégalité GHS ; la démonstration qui suit nous a été communiquée par Percus lors d'un colloque de Mécanique Statistique à Yeshiva University (New York, 10/11 décembre 1973).

Soit Λ un ensemble fini de "sites". Notons $\Omega = \{1, -1\}^\Lambda$ l'espace des configurations de spin, et notons $\sigma_x : \Omega \rightarrow \{1, -1\}$ la projection d'indice $x \in \Lambda$. On pose

$$(48) \quad V = \sum_{x \in \Lambda} c_x \sigma_x + \frac{1}{2} \sum_{x \neq y} c_{xy} \sigma_x \sigma_y$$

où les constantes c_x et c_{xy} sont positives et $c_{xy} = c_{yx}$. Pour toute fonction F sur Ω , à valeurs complexes, on pose

$$(49) \quad \text{Tr}(F) = \sum_{R \in \Omega} F(R) ;$$

en particulier, on pose

$$(50) \quad Z = \text{Tr}(e^V)$$

et les fonctions de corrélation u_n sont définies par

$$(51) \quad u_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial c_{x_1} \dots \partial c_{x_n}} \log Z$$

pour $n \geq 1$ et $x_1, \dots, x_n$ dans Λ . En particulier, on a

$$(52) \quad Z \cdot u_1(x) = \text{Tr}(\sigma_x e^V)$$

$$(53) \quad Z^2 \cdot u_2(x_1, x_2) = Z \cdot \text{Tr}(\sigma_{x_1} \sigma_{x_2} e^V) - \text{Tr}(\sigma_{x_1} \cdot e^V) \text{Tr}(\sigma_{x_2} \cdot e^V)$$

$$(54) \quad Z^3 \cdot u_3(x_1, x_2, x_3) = Z^2 \cdot \text{Tr}(\sigma_{x_1} \sigma_{x_2} \sigma_{x_3} e^V) - Z \cdot \sum_{(ijk)} \text{Tr}(\sigma_{x_i} e^V) \text{Tr}(\sigma_{x_j} \sigma_{x_k} e^V) + 2 \text{Tr}(\sigma_{x_1} e^V) \text{Tr}(\sigma_{x_2} e^V) \text{Tr}(\sigma_{x_3} e^V) ,$$

la somme étant étendue aux permutations circulaires (ijk) de (123). Les inégalités $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$ résultent de GKS, l'inégalité $u_3 \leq 0$ n'est autre que GHS. Enfin de (54), on déduit que u_3 s'annule lorsque tous les nombres c_x sont nuls; or si $\phi(t)$ est une fonction dérivable de la variable positive t , et si $\phi(0) = 0$, $\phi(t) \leq 0$ pour $t \geq 0$, on a $\phi'(0) \leq 0$, d'où $u_4 \leq 0$ lorsque toutes les constantes c_x sont nulles. On conjecture que l'on a $(-1)^n u_{2n} \leq 0$ pour $n \geq 3$ lorsque tous les c_x sont nuls; sous cette hypothèse, on a $u_{2n+1} = 0$ par raison de symétrie.

L'artifice principal de la démonstration de Percus est le suivant. Soit A une algèbre commutative sur le corps complexe $\mathbb{C}$, engendrée par trois éléments $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)$ de carrés égaux à 1. Définissons les éléments s et d par

$$(55) \quad d = -\frac{1}{2}(\sigma(1) + \omega\sigma(2) + \omega^2\sigma(3))$$

$$(56) \quad s = \frac{1}{4}(\sigma(1) + \sigma(2) + \sigma(3) + \sigma(1)\sigma(2)\sigma(3))$$

où $\omega = e^{2\pi i/3}$. On vérifie de suite les relations

$$(57) \quad \sigma(j) = s + \frac{1}{3}(-2d\omega^{1-j} + d^3 - 2d^5\omega^{j-1})$$

$$(58) \quad sd = 0, \quad s^2 + d^6 = 1.$$

En particulier, l'algèbre A est engendrée par s et d d'après (57), et d'après (58), les éléments $s, s^2, d, d^2, d^3, d^4, d^5, d^6$ engendrent l'espace vectoriel A . Pour la même raison, l'ensemble A_+ des combinaisons linéaires à coefficients positifs de ces éléments est stable par multiplication et contient 1, s et d .

Considérons maintenant l'algèbre B des fonctions complexes sur $\Omega^3 = \Omega \times \Omega \times \Omega$. Pour chaque $x \in \Lambda$, définissons les éléments

$\sigma_x(1)$, $\sigma_x(2)$ et $\sigma_x(3)$ de B par

$$(59) \quad \sigma_x(j)(R_1, R_2, R_3) = \sigma_x(R_j)$$

pour R_1, R_2, R_3 dans Ω . Soit A_x la sous-algèbre de B engendrée par $\sigma_x(1)$, $\sigma_x(2)$ et $\sigma_x(3)$. Il est immédiat que B est le produit tensoriel $\bigotimes_{x \in \Lambda} A_x$. La trace sur B est définie par $\text{Tr}(F) = \sum_{R \in \Omega^3} F(R)$.

Définissons d_x et s_x dans A_x en analogie avec (55) et (56). Par un calcul direct, on vérifie que la fonction W définie sur Ω^3 par

$$(60) \quad W(R_1, R_2, R_3) = V(R_1) + V(R_2) + V(R_3)$$

est donnée par

$$(61) \quad W = \sum_{x \in \Lambda} c_x (3s_x + d_x^3) + \sum_{x \neq y} c_{xy} \left[\frac{3}{2} s_x s_y + s_x d_y^3 + \frac{1}{6} d_x^3 d_y^3 + \frac{4}{3} d_x^5 d_y \right].$$

De (54), on déduit

$$(62) \quad Z^3 u_3(x_1, x_2, x_3) = -\text{Tr}(F \cdot e^W)$$

avec

$$(63) \quad F = \frac{4}{9} d_{x_1} d_{x_2} d_{x_3} (1 + d_{x_1}^4 d_{x_2}^4 d_{x_3}^4).$$

Comme les constantes c_x et c_{xy} sont positives, les formules (61) et (63) montrent que Fe^W s'exprime comme série à coefficients positifs en les s_x et d_x , donc appartient au cône convexe C engendré par les éléments de la forme $\bigotimes_{x \in \Lambda} u_x$ avec $u_x \in (A_x)_+$ pour tout $x \in \Lambda$. Or la forme linéaire Tr sur B est produit tensoriel de formes linéaires Tr_x sur les algèbres A_x vérifiant

$$\text{Tr}_x(s_x) = \text{Tr}(d_x) = \dots = \text{Tr}(d_x^5) = 0$$

$$\text{Tr}(s_x^2) = 2, \quad \text{Tr}(d_x^6) = 6.$$

Il en résulte que la trace est positive sur le cône convexe C , et en particulier $\text{Tr}(Fe^W) \geq 0$, d'où $u_3 \leq 0$ d'après (62).

Ceci achève la démonstration de l'inégalité GHS.

BIBLIOGRAPHIE COMMENTÉE

A. Mécanique statistique, modèle d'Ising.

Voici deux ouvrages de base pour mathématiciens :

D.RUELLE, Statistical mechanics, rigorous results, Benjamin, New York 1969.

DE WITT et STORA (éditeurs), Mécanique Statistique et Théorie Quantique des Champs, Ecole d'Eté des Houches 1970, Gordon and Breach, New York 1971.

Le livre de Ruelle est particulièrement remarquable pour la rigueur de sa présentation et son caractère synthétique. Le volume des Houches contient des articles par Ruelle, Griffiths, Lieb et Ginibre donnant un panorama équilibré des recherches actuelles.

Les idées de Dobrushin et Ruelle sont résumées dans D.RUELLE, Etats d'équilibre des systèmes infinis en mécanique statistique, Actes du Congrès International des Mathématiciens, Nice 1970, Tome 3, p. 15-19.

Les articles principaux de Dobrushin sont les suivants :

R.L.DOBRUSHIN, The description of a random field by means of conditional probabilities and conditions of its regularity, Theory Prob. and Appl. 13 (1968), p. 197-224.

R.L.DOBRUSHIN, The problem of uniqueness of a gibbsian random field and the problem of phase transitions, Journ. Funct. Anal. 2 (1968), p. 302-312.

On pourra enfin consulter l'article suivant de synthèse

R.A.MINLOS, Lectures on Statistical Physics, Russian Math. Surveys, 23 (1968), p. 137-196.

B. Inégalités de corrélation.

Les inégalités GKS sont établies dans les travaux suivants :

R.B.GRIFFITHS, Correlation in Ising ferromagnets I, Journ. Math. Phys. 8 (1967) , p. 478-483 ; II External magnetic fields, ibid, p.484-489.

D.G.KELLY et S.SHERMAN, General Griffith's Inequalities on Correlations in Ising Ferromagnets, Journ. Math. Phys. 9 (1968), p.466-484.

Pour diverses généralisations, voir

J.GINIBRE, General Formulation of Griffith's Inequalities, Commun. Math. Phys. 16 (1970), p.310-328.

Le théorème 2 est une généralisation, essentiellement due à B.Simon, des résultats combinatoires contenus dans

C.M.FORTUIN, P.W.KASTELEYN et J.GINIBRE, Correlation inequalities on some partially ordered sets, Commun. Math. Phys., 22 (1971), p. 89-103.

La généralisation de FKG mentionnée à la fin du n°9 est contenue dans
 R.A.HOLLEY, Recent results on the stochastic Ising model, à paraître dans le Rocky Mountains Math. Journal, 1973 (pour le cas discret), et dans une note non publiée de Preston pour le cas général.

Les inégalités GHS sont établies dans

R.B.GRIFFITHS, C.A.HURST et S.SHERMAN, Concavity of magnetization of an Ising ferromagnet in a positive external field, Journ. Math. Phys., 11 (1970), p.790-795.

Une nouvelle démonstration est contenue dans

J.L. LEBOWITZ, GHS and other inequalities, à paraître dans Comm. Math. Phys., 1973.