

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

LUC ILLUSIE

Travaux de Quillen sur la cohomologie des groupes

Séminaire N. Bourbaki, 1973, exp. n° 405, p. 89-105

http://www.numdam.org/item?id=SB_1971-1972__14__89_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TRAVAUX DE QUILLEN SUR LA COHOMOLOGIE DES GROUPES

par Luc ILLUSIE

Un nombre premier p est fixé pour toute la suite. Si X est un espace topologique, on note $H^*(X) = H^*(X, \mathbb{F}_p)$ la cohomologie de X à valeurs dans le faisceau constant \mathbb{F}_p ; c'est une \mathbb{F}_p -algèbre graduée, commutative (resp. strictement anticommutative) si p est pair (resp. impair), et munie d'opérations de Steenrod.

1. Cohomologie équivariante et p -groupes abéliens élémentaires ([7], [8], [9]).

1.1. Soit G un groupe de Lie compact, et soit X un G -espace, i.e. un espace topologique sur lequel G opère continûment. Soit $PG \rightarrow BG$ un fibré principal de groupe G tel que PG soit contractile. On dit que

$$H_G^*(X) = H^*(PG \times^G X) \quad (1)$$

est la cohomologie équivariante de X . On montre (2) que $H_G^*(X)$ est essentiellement indépendant du choix de $PG \rightarrow BG$, et dépend de façon contravariante de la paire (G, X) , un morphisme $(G, X) \rightarrow (G', X')$ étant défini comme un couple (u, f) formé d'un homomorphisme $u : G \rightarrow G'$ et d'une application continue $f : X \rightarrow X'$ telle que $f(gx) = u(g)f(x)$ pour $g \in G$, $x \in X$. Si X est un point, on écrit H_G^* au lieu de $H_G^*(X) = H^*(BG)$. Quand G est un groupe fini, H_G^* coïncide avec la cohomologie habituelle de G à valeurs dans le G -module trivial \mathbb{F}_p . Quand

(1) Si Y, Z sont des G -espaces, on note comme d'habitude $Y \times^G Z$ le quotient de $Y \times Z$ par l'action diagonale de G , $g(y, z) = (gy, gz)$.

(2) par un petit argument dû à Borel, reproduit dans [8]; d'aucuns préféreront définir la cohomologie équivariante à l'aide du topos classifiant de Grothendieck (SGA 4 IV 2.5) (cf. n° 4) (N.B. les deux définitions coïncident)

G est le groupe unité, on a bien entendu $H_G^*(X) = H^*(X)$.

Soit $K \subset G$ un sous-groupe fermé, et soit Y un K -espace. Le morphisme $(K, Y) \rightarrow (G, G \times^K Y)$, $(k, y) \mapsto (k, \text{cl}(1, y))$, induit un isomorphisme

$$(1.1.1) \quad H_G^*(G \times^K Y) \xrightarrow{\sim} H_K^*(Y) \quad (\text{"formule d'induction"}).$$

En particulier, si Y est réduit à un point et $K = G_x$ est le stabilisateur d'un point x de X , le morphisme $(G_x, Y) \rightarrow (G, Gx)$, $(k, y) \mapsto (k, x)$, induit un isomorphisme

$$(1.1.2) \quad H_G^*(Gx) \xrightarrow{\sim} H_{G_x}^*.$$

PROPOSITION 1.2 ([8], [17]).- Supposons $\dim_{\mathbb{F}_p} H^*(X) < \infty$. Alors $H_G^*(X)$ est une \mathbb{F}_p -algèbre de type fini. En particulier, la série de Poincaré de $H_G^*(X)$,

$$PS_t(H_G^*(X)) = \sum_{i \geq 0} \dim_{\mathbb{F}_p} H_G^i(X) t^i,$$

est une fonction rationnelle de t .

Preuve. Plongeant G dans un groupe unitaire $U = U(n)$, on se ramène, grâce à la formule d'induction (1.1.1), au cas où $G = U$. Comme $H_U^* = \mathbb{F}_p[c_1, \dots, c_n]$, la suite spectrale de Leray de la projection $PU \times^U X \rightarrow BU$ permet alors de conclure.

DÉFINITION 1.3.- On dit qu'un groupe G est un p -groupe abélien élémentaire s'il existe un entier r tel que $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$. L'entier r s'appelle alors le rang de G .

On notera \underline{A} la catégorie des p -groupes abéliens élémentaires.

1.4. Soit $A \in \text{ob } \underline{A}$. Identifions H_A^1 à $A^\vee = \text{Hom}(A, \mathbb{F}_p)$ par l'isomorphisme canonique. L'homomorphisme de Bockstein $\beta : A^\vee \rightarrow H_A^2$ est injectif, et l'on a des isomorphismes fonctoriels canoniques

$$H_A^* \simeq \begin{cases} \Lambda A^\vee \otimes S(\beta A^\vee) & \text{si } p \text{ est impair} \\ S(A^\vee) & \text{si } p = 2, \end{cases}$$

où Λ (resp. S) est le foncteur algèbre extérieure (resp. symétrique) sur \mathbb{F}_p . En effet, par Künneth on se ramène au cas où A est de rang un, pour lequel les assertions précédentes sont bien connues.

1.5. Revenant à la situation de (1.1), on définit une catégorie $A(G, X)$ de la manière suivante. Les objets de $A(G, X)$ sont les couples (A, c) , où $A \in \text{ob } \underline{A}$ est un sous-groupe de G et $c \in \pi_0(X^A)$, X^A désignant l'ensemble des points de X fixes par A . Une flèche $(A, c) \rightarrow (A', c')$ de $A(G, X)$ est un homomorphisme $u : A \rightarrow A'$ de la forme $u(x) = gxg^{-1}$ pour un élément g de G tel que $gc \supset c'$ (N.B. $gAg^{-1} \subset A' \Rightarrow X^{A'} \subset X^{gAg^{-1}} = gX^A$). En d'autres termes, si l'on pose

$$\begin{aligned} \text{Transp}(A, c; A', c') &= \{g \in G \mid gAg^{-1} \subset A', gc \supset c'\}, \\ \text{Norm}(A, c) &= \text{Transp}(A, c; A, c), \\ \text{Cent}(A, c) &= \{g \in G \mid gag^{-1} = a \text{ pour tout } a \in A, gc = c\}, \end{aligned}$$

on a :

$$\text{Hom}_{A(G, X)}((A, c), (A', c')) = \text{Transp}(A, c; A', c') / \text{Cent}(A, c).$$

En particulier,

$$\text{End}_{A(G, X)}(A, c) = \text{Norm}(A, c) / \text{Cent}(A, c)$$

est un groupe, noté $W(A, c)$, et appelé groupe de Weyl de (A, c) . Quand X est un point, on retrouve les notions habituelles de transporteur, normalisateur, etc.

Pour $(A, c) \in \text{ob } A(G, X)$, notons

$$(1.5.1) \quad (A, c)^* : H_G^*(X) \rightarrow H_A^*$$

l'homomorphisme induit par $(A, \text{pt}) \rightarrow (G, X)$, $(a, \text{pt}) \mapsto (a, x)$, où x est un

point donné de c ⁽¹⁾. On vérifie facilement que, pour toute flèche $u : (A, c) \rightarrow (A', c')$ de $A(G, X)$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & H_A^* \\ & \nearrow^{(A, c)^*} & \uparrow u^* \\ H_G^*(X) & & H_{A'}^* \\ & \searrow_{(A', c')^*} & \end{array}$$

est commutatif (quand X est un point, cela résulte du fait bien connu que les automorphismes intérieurs agissent trivialement sur H_G^*). Les $(A, c)^*$ définissent par suite un homomorphisme

$$(1.5.2) \quad a(G, X) : H_G^*(X) \rightarrow \varinjlim_{(A, c) \in A(G, X)} H_A^* .$$

DÉFINITION 1.6- Soit $f : R \rightarrow S$ un morphisme de \mathbb{F}_p -algèbres. On dit que f est un F -isomorphisme (resp. un F -isomorphisme uniforme) si tout élément de $\text{Ker}(f)$ est nilpotent et si, pour tout $s \in S$, il existe un entier n tel que $s^p \in \text{Im}(f)$ (resp. si $\text{Ker}(f)$ est nilpotent et s'il existe un entier n tel que, pour tout $s \in S$, on ait $s^p \in \text{Im}(f)$).

Le résultat principal de Quillen ([8] 6.2) est le suivant :

THÉORÈME 1.7.- Soit G un groupe de Lie compact, et soit X un G -espace. On suppose X compact (resp. paracompact et de p -dimension cohomologique finie ⁽²⁾) et tel que, pour tout p -sous-groupe abélien élémentaire A de G , $\pi_0(X^A)$ soit

⁽¹⁾ l'homomorphisme en question est évidemment indépendant du choix de x ; quand $X^A = \emptyset$, on convient que $(A, c)^* = 0$.

⁽²⁾ la p -dimension cohomologique de X est le sup des entiers n tels qu'il existe un faisceau \mathcal{M} de \mathbb{F}_p -modules tel que $H^n(X, \mathcal{M}) \neq 0$.

fini ⁽¹⁾. Alors $a(G, X)$ (1.5.2) est un F-isomorphisme (resp. un F-isomorphisme uniforme).

La démonstration sera donnée à la fin de ce numéro.

COROLLAIRE 1.8.- Sous les hypothèses de (1.7), supposons $H^*(X)$ de dimension finie. Alors l'ordre du pôle de $PS_t(H_G^*(X))$ (1.2) pour $t = 1$ est égal à la borne supérieure des rangs des p -sous-groupes abéliens élémentaires A de G tels que $X^A \neq \emptyset$.

En particulier :

COROLLAIRE 1.8.1.- L'ordre du pôle de $PS_t(H_G^*)$ pour $t = 1$ est égal à la borne supérieure des rangs des p -sous-groupes abéliens élémentaires de G . ⁽²⁾

Pour la démonstration de (1.8), voir ([8] 7.7) : c'est une conséquence facile du fait que le noyau de $a(G, X)$ est nilpotent.

1.9. Quand X est un point, nous noterons $a(G)$ l'homomorphisme (1.5.2), qui est simplement donné par la famille des restrictions $H_G^* \rightarrow H_A^*$, $A \hookrightarrow G$, $A \in \text{ob } \underline{A}$. Voici, dans ce cas, quelques illustrations de (1.7).

1.9.1. $G = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, $n \geq 2$; soit $A = p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ le p -sous-groupe abélien élémentaire maximal ; d'après ([3], p. 252) on a $H_G^* = \Lambda[x] \otimes S[y]$, où x (resp. y) est un générateur de H_G^1 (resp. H_G^2) ; $a(G)$ est la restriction $H_G^* \rightarrow H_A^*$, qui est un isomorphisme en degré pair et zéro en degré impair ; pour $u \in \text{Ker } a(G)$ (resp. H_A^*) on a $u^p = 0$ (resp. $u^p \in \text{Im } a(G)$).

1.9.2. $G = U(n)$; soit T un tore maximal, et soit $A \subset T$ le sous-groupe des

⁽¹⁾ Quillen montre ([8] 4.3) que cette hypothèse est vérifiée par exemple si $H^*(X)$ est de dimension finie ; voir ([8] 6.2) pour un énoncé légèrement plus général.

⁽²⁾ ce résultat avait été conjecturé indépendamment par Atiyah et Swan.

points d'ordre p ; tout p -sous-groupe abélien élémentaire de G est conjugué à un sous-groupe de A , et $a(G)$ n'est autre que la restriction $H_G^* \rightarrow (H_A^*)^W$, où l'exposant W signifie qu'on prend les invariants par le groupe de Weyl ; elle est injective (voir ([10] § 3) pour le calcul de $(H_A^*)^W$).

1.9.3. $p = 2$, $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ est le groupe des quaternions d'ordre 8 ; le centre $A = \{\pm 1\}$ est l'unique 2-sous-groupe abélien élémentaire non trivial ; $a(G)$ est la restriction $H_G^* \rightarrow H_A^*$; on a $H_A^* = \mathbb{F}_2[z]$, où z est le générateur de H_A^1 , et $H_G^* = \mathbb{F}_2[x, y, e]/(x^2 + xy + y^2, x^2y + xy^2)$, où $\{x, y\}$ forment une base de H_G^1 et e engendre H_G^4 ; $a(G)$ est donné par $a(G)x = a(G)y = 0$, $a(G)e = z^4$; donc, pour $u \in \text{Ker } a(G)$ (resp. H_A^*), on a $u^4 = 0$ (resp. $u^4 \in \text{Im } a(G)$). Plus généralement, Quillen dévise complètement H_G^* pour G extension centrale d'un 2-groupe abélien élémentaire par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ [12].

1.9.4. $G = \mathfrak{S}_n$, groupe des permutations de n lettres ; Quillen montre [6] que $a(G)$ est injectif.

1.10. Preuve de (1.7). a) Examinons d'abord le cas particulier où, pour tout $x \in X$, le groupe d'isotropie G_x est un p -groupe abélien élémentaire. On montre alors facilement que $a(G, X)$ s'identifie à l'homomorphisme latéral

$$(1.10.1) \quad H_G^*(X) \rightarrow H^0(X/G, R^*_{q_*}(\mathbb{F}_p))$$

défini par la suite spectrale de Leray

$$E_2^{i,j} = H^i(X/G, R^j_{q_*}(\mathbb{F}_p)) \Rightarrow H_G^*(X)$$

relative à la projection canonique $q : PG \times^G X \rightarrow X/G$. Les ingrédients de cette vérification sont d'une part l'hypothèse que chaque X^A n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, qui permet de considérer un élément du second membre de

(1.5.2) comme une famille d'applications localement constantes $X^A \rightarrow H_A^*$ vérifiant une certaine condition de compatibilité, d'autre part le fait ([8] 6.3) que G ne

possède qu'un nombre fini de classes de p -sous-groupes abéliens élémentaires à conjugaison près, grâce à quoi on se ramène à une limite projective finie, enfin la formule d'induction (1.1.2) qui résout le cas crucial où X n'a qu'une orbite. Il s'agit maintenant de montrer que (1.10.1) est un F -isomorphisme (resp. un F -isomorphisme uniforme). Pour cela, on n'a plus besoin de l'hypothèse sur les groupes d'isotropie. Dans le cas compact, l'assertion résulte d'une suite exacte de Mayer-Vietoris équivariante, et, dans le cas paracompact, de la structure multiplicative de la suite spectrale de Leray (une fois établi que X/G est de p -dimension cohomologique finie).

b) Dans le cas général, plongeons G dans un groupe unitaire U . Soient T un tore maximal de U , et $S \subset T$ le sous-groupe des points d'ordre p . Faisons agir G sur $F = U/S$ par translations à gauche. Les G -espaces $X \times F$ et $X \times F \times F$ vérifient encore les hypothèses de (1.7), et le diagramme de G -espaces

$$X \times F \times F \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Pr}_{12}} \\ \xrightarrow{\text{Pr}_{13}} \end{array} X \times F \xrightarrow{\text{Pr}_1} X$$

fournit un diagramme commutatif

$$(1.10.2) \quad \begin{array}{ccccc} H_G^*(X) & \longrightarrow & H_G^*(X \times F) & \xrightarrow{\quad} & H_G^*(X \times F \times F) \\ \downarrow a(G, X) & & \downarrow a(G, X \times F) & & \downarrow a(G, X \times F \times F) \\ \varprojlim_{A(G, X)} H_A^* & \longrightarrow & \varprojlim_{A(G, X \times F)} H_A^* & \xrightarrow{\quad} & \varprojlim_{A(G, X \times F \times F)} H_A^* \end{array} .$$

Les groupes d'isotropie de $X \times F$ (resp. $X \times F \times F$) sont conjugués à des sous-groupes de S , donc appartiennent à \underline{A} . D'après le cas particulier a), $a(G, X \times F)$ et $a(G, X \times F \times F)$ sont donc des F -isomorphismes (resp. des F -isomorphismes uniformes). Pour en conclure qu'il en est de même de $a(G, X)$, il suffit donc, d'après une variante du lemme des 5, de montrer que les lignes de (1.10.2) sont exactes. L'exactitude de la ligne inférieure résulte trivialement du fait que, pour

tout p -sous-groupe abélien élémentaire A de G , on a $F^A \neq \emptyset$. Celle de la ligne supérieure découle, par l'argument de descente habituel, du fait que $H_G^*(X \times F) = H_G^*(X) \otimes_{H_U^*} H_S^*$ et que H_S^* est un module libre de type fini sur H_U^* , ces deux derniers points se déduisant facilement du "splitting principle" de la théorie des classes de Chern. Ceci achève la démonstration de (1.7).

2. Stratification de $\text{Spec } H_G(X)$ ([9]).

2.1. Notation. Si X est un G -espace comme en (1.1), on posera

$$H_G(X) = \begin{cases} \bigoplus H_G^{2i}(X) & \text{si } p \text{ est impair} \\ H_G^*(X) & \text{si } p = 2. \end{cases}$$

2.2. Soit A un p -groupe abélien élémentaire. Les formules (1.4) montrent que $\text{Spec } H_A$ est irréductible, et que le sous-schéma intègre sous-jacent s'identifie (canoniquement et fonctoriellement) au fibré vectoriel $\underline{A} = \text{Spec } S(A^\vee)$ (qui dépend de façon covariante de A).

2.3. Plaçons-nous dans la situation de (1.7). Pour $(A, c) \in \text{ob } A(G, X)$, l'homomorphisme $(A, c)^*$ (1.5.1) définit un morphisme de schémas

$$(2.3.1) \quad (A, c)_* : \underline{A} \rightarrow \text{Spec } H_G(X).$$

Les applications continues sous-jacentes aux $(A, c)_*$ fournissent, par passage à la limite, une application continue

$$(2.3.2) \quad \lim_{(A, c) \in \vec{A}(G, X)} \underline{A} \rightarrow \text{Spec } H_G(X),$$

où le premier membre désigne l'espace topologique limite inductive des espaces sous-jacents aux \underline{A} . Le théorème (1.7) exprime essentiellement que (2.3.2) est un homéomorphisme. Compte tenu de ce que les H_A^* sont "finis" sur H_G^* (variante du théorème de finitude (1.2)) et du fait, signalé plus haut, que les classes de

conjugaison de p -sous-groupes abéliens élémentaires de G sont en nombre fini, la traduction précédente découle en effet du

Lemme 2.3.3 ([9] B.7).- Soient R un anneau noethérien, $A \rightarrow B \rightrightarrows C$ un diagramme exact de R -algèbres, B et C étant finies sur R . Alors le diagramme d'espaces topologiques correspondant $\text{Spec}(C) \rightrightarrows \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ est exact.

2.4. Quillen pousse plus loin la description du cône $\text{Spec } H_G(X)$. Pour $(A,c) \in \text{ob } A(G,X)$, notons $\underline{p}_{A,c}$ l'image par (2.3.1) du point générique de \underline{A} (i.e. l'idéal premier (gradué) noyau de l'application composée

$H_G(X) \xrightarrow{(A,c)^*} H_A \rightarrow H_A/\text{nilradical} = S(A^\vee)$), et $V_{A,c} = \{\overline{\underline{p}_{A,c}}\}$ le sous-schéma fermé image de \underline{A} . Notons $\underline{A}^+ \subset \underline{A}$ le complémentaire de la réunion des \underline{A}' , pour $A' \subset A$, $A' \neq A$; en d'autres termes, \underline{A}^+ est l'ouvert d'inversibilité de $e_A = \prod_{f \in A^\vee - \{0\}} f$. Notons enfin $V_{A,c}^+ \subset V_{A,c}$ le complémentaire de la réunion des $V_{A',c'}$, pour $A' \subset A$, $A' \neq A$, c' désignant la composante connexe de $X^{A'}$ contenant c . Cela posé, on a le

THÉORÈME 2.5 ([9] 10.2, 11).- (i) Pour $(A,c) \in \text{ob } A(G,X)$, $V_{A,c}^+$ est affine et irréductible. Le groupe de Weyl $W(A,c)$ (1.5) agit sur \underline{A}^+ et $(A,c)_*$ (2.3.1) induit un homéomorphisme $\underline{A}^+/W(A,c) \rightarrow V_{A,c}^+$ (1).

(ii) Soit I un système de représentants pour les classes d'isomorphie d'objets de $A(G,X)$. Alors $\text{Spec } H_G(X)$ admet une décomposition

$$\text{Spec } H_G(X) = \bigsqcup_{(A,c) \in I} V_{A,c}^+$$

en sous-schémas localement fermés disjoints.

(1) N.B.- Si Ω est une extension de \mathbb{F}_p , $W(A,c)$ agit librement sur $\underline{A}^+(\Omega)$.

Remarques 2.6.- La décomposition précédente est une "stratification" au sens naïf du terme : $V_{A,c}$ est l'adhérence de $V_{A,c}^+$, et se décompose à son tour en somme disjointe de $V_{A',c'}$, pour $A' \subset A$, $A' \neq A$. On a $V_{A_1,c_1} \hookrightarrow V_{A_2,c_2}$ (i.e. $\underline{P}_{A_2,c_2} \supset \underline{P}_{A_1,c_1}$) si et seulement si $\text{Hom}_{A(G,X)}((A_1,c_1),(A_2,c_2)) \neq \emptyset$. En particulier, les composantes irréductibles de $\text{Spec } H_G(X)$ correspondent bijectivement aux classes d'isomorphie d'objets maximaux de $A(G,X)$ ⁽¹⁾. On retrouve ainsi (1.8), car la dimension de $\text{Spec } H_G(X)$ (qui dans ce cas est finie) coïncide avec l'ordre du pôle de $\text{PS}_t(H_G^*(X))$ pour $t = 1$, comme il résulte d'un exercice facile sur les polynômes de Hilbert.

De plus, Quillen caractérise les sous-schémas fermés de $\text{Spec } H_G(X)$ de la forme $V_{A,c}$:

THÉORÈME 2.7 ([9] 12.1).- Les $V_{A,c}$ sont exactement les sous-cônes fermés irréductibles de $\text{Spec } H_G(X)$ stables par les opérations de Steenrod. ⁽²⁾

En d'autres termes, un idéal premier de $H_G(X)$ est de la forme $\underline{P}_{A,c}$ pour un objet (A,c) de $A(G,X)$ si et seulement s'il est homogène et stable par les opérations de Steenrod.

2.8. Pour la démonstration de (2.5), nous renvoyons à ([9] 9, 10) (c'est assez facile à partir du fait que (2.3.2) est un homéomorphisme). Le lecteur pourra aussi consulter [11], qui contient, dans le cas où X est ponctuel et G fini, une

⁽¹⁾ on dit que (A,c) est maximal si toute flèche issue de (A,c) est un isomorphisme.

⁽²⁾ Rappelons que $H_G^*(X)$ ($\stackrel{\text{dfn}}{=} H^*(PG \times^G X)$) est muni d'opérations de Steenrod $P^i : H_G^*(X) \rightarrow H_G^{*+2i(p-1)}(X)$ (resp. $H_G^{*+i}(X)$) pour p impair (resp. $p = 2$) ; $P_t = \sum P^i t^i : H_G^*(X) \rightarrow H_G^*(X)[t]$ est un homomorphisme d'anneaux ; pour u de degré 2 (resp. 1), on a $P_t(u) = u + u^p t$.

jolie démonstration directe de (2.5) (ainsi que de la F -injectivité de (1.5.2)) utilisant l'homomorphisme norme pour les revêtements finis.

L'ingrédient essentiel de (2.7) est le fait [13] qu'un sous-cône fermé irréductible de \underline{A} ($A \in \text{ob } \underline{A}$) qui est stable par les opérations de Steenrod est nécessairement de la forme \underline{A}' , pour $A' \subset A$.

Exemple 2.9.— Soit G le groupe diédral d'ordre 8, i.e. le produit semi-direct $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \tilde{\times} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \langle x \rangle \tilde{\times} \langle y \rangle$, avec $x^2 = y^4 = 1$, $xyx^{-1} = y^{-1}$. On peut aussi regarder G comme extension centrale de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ par $\langle y^2 \rangle (\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. La suite spectrale de Hochschild-Serre correspondante ($p = 2$) fournit (cf. [12]) $H_G^* = \mathbb{F}_2[u, v, e]/(uv + v^2)$, avec u, v de degré 1, e de degré 2. $\text{Spec } H_G^*$ est un "dièdre", dont les composantes irréductibles correspondent aux 2-sous-groupes abéliens élémentaires (de rang 2) $\langle x, y^2 \rangle$ et $\langle xy, y^2 \rangle$. Noter en passant que ceux-ci "détectent" la cohomologie de G , i.e. $a(G)$ (1.5.2) est injectif. On conseille au lecteur d'explicitier une stratification (2.5 (ii)) ... et de faire un dessin.

3. Variantes : groupes compacts, groupes discrets ([9] 13, 14).

Les résultats des n^{os} précédents s'étendent, au moins pour X ponctuel, au cas de certains groupes compacts (tels que les pro- p -groupes analytiques) et de certains groupes discrets (tels que les groupes arithmétiques).

3.1. Soit G un groupe compact. D'après Peter-Weyl, G est limite projective de ses quotients G_i qui sont des groupes de Lie compacts. On pose

$$H_G^* = \varprojlim H_{G_i}^* .$$

On note d'autre part $A(G) = \varprojlim A(G_i)$ la catégorie des pro- p -sous-groupes abéliens

élémentaires de G , les morphismes étant donnés par conjugaison par des éléments de G . Alors les théorèmes (1.7), (2.5), (2.7) sont encore valables, mutatis mutandis ⁽¹⁾, pourvu que $A(G)$ n'ait qu'un nombre fini de classes d'isomorphie d'objets. Quillen montre que cette hypothèse est vérifiée dès que G possède un sous-groupe distingué G' tel que H_G^* , soit de dimension finie et que G/G' soit un groupe de Lie compact, ce qui est le cas par exemple pour les pro- p -groupes analytiques de Lazard ([5] V 2).

3.2. Soit Γ un groupe discret. Notons H_Γ^* la cohomologie de Γ à valeurs dans le Γ -module trivial \mathbb{F}_p , et $A(\Gamma)$ la catégorie des p -sous-groupes abéliens élémentaires de Γ (les flèches étant les homomorphismes de la forme $\text{ad}(g)$, $g \in \Gamma$). Alors ([9] 14.1), si Γ possède un sous-groupe Γ' d'indice fini tel que $\text{cd}_p(\Gamma') < \infty$ ⁽²⁾, la flèche canonique (définie comme en (1.5.2))

$$a(\Gamma) : H_\Gamma^* \rightarrow \varprojlim_{A \in A(\Gamma)} H_A^*$$

est un \mathbb{F} -isomorphisme uniforme (1.6). Si, de plus, Γ ne possède qu'un nombre fini de p -sous-groupes abéliens élémentaires à conjugaison près, on a, pour Γ , des théorèmes analogues à (2.5) et (2.7). Les hypothèses précédentes sont vérifiées par les groupes S -arithmétiques de Borel-Serre, comme il résulte facilement du fait ([14], [15]) que de tels groupes possèdent des sous-groupes distingués d'indice fini de dimension cohomologique finie. La réduction des résultats qu'on vient d'énoncer à ceux des nos 1 et 2 est particulièrement facile dans le cas où Γ est un groupe arithmétique : en effet, si X est "l'espace symétri-

⁽¹⁾ voir ([9] 13) pour des énoncés en forme !

⁽²⁾ si G est un groupe discret, $\text{cd}_p(G)$ désigne la borne supérieure des entiers n tels qu'il existe un $\mathbb{F}_p[G]$ -module M tel que $H^n(G, M) \neq 0$.

que" correspondant ([15]), et si $\Gamma' \subset \Gamma$ est un sous-groupe distingué d'indice fini sans torsion, on a $H_{\Gamma}^* \simeq H_{\Gamma/\Gamma'}^*(X/\Gamma')$, et l'on est ramené aux théorèmes des nos 1 et 2 pour l'action du groupe fini Γ/Γ' sur la variété X/Γ' . Pour le cas général, voir ([9] 14, 15).

4. Calculs utilisant l'isomorphisme de Lang ([7] § 2).

Ce n° est indépendant des précédents. Il reproduit pratiquement tels quels les résultats annoncés dans (loc. cit.) (1).

4.1. Soient T un topos, G un Groupe de T , BG le topos classifiant de G , i.e. (SGA 4 IV 2.4) la catégorie des G -objets de T . Pour $X \in \text{ob } BG$, on note X_G le topos localisé $(BG)_{/X}$ (catégorie des G -objets au-dessus de X). Fixons un anneau A . La "cohomologie équivariante" de X à valeurs dans A , $H^*(X_G, A)$, notée encore $H_G^*(X, A)$ (voire $H_G^*(X)$), est l'aboutissement d'une suite spectrale de Leray

$$(4.1.1) \quad E_2^{i,j} = H^i(BG, R^j u_* (A)) \Rightarrow H_G^*(X, A),$$

où $u : X_G \rightarrow BG$ est le morphisme de localisation. Supposons que A soit un corps et que, pour tout $Y \in \text{ob } T$ et tout $j \geq 0$, la flèche de changement de base $H^j(X, A)_{(Y)} \rightarrow R^j \text{pr}_{1*}(A)$ (où $\text{pr}_1 : Y \times X \rightarrow Y$) soit un isomorphisme. Alors $R^j u_* (A)$ est le faisceau constant de valeur $H^j(X, A)$, et (4.1.1) prend la forme

$$(4.1.2) \quad E_2^{i,j} = H^i(BG) \otimes H^j(X) \Rightarrow H_G^*(X).$$

Soit H un sous-Groupe de G , faisons agir G sur G/H par translations à gauche. Le topos localisé $(G/H)_G$ est canoniquement équivalent à BH (SGA 4 IV

(1) Nous espérons que Quillen en donnera prochainement une version détaillée, ainsi que de ses résultats sur les K_i ([7] § 3).

5.8.1), donc $H_G^*(G/H) = H^*(BH)$. Par suite, si $X = G/H$ vérifie l'hypothèse de propriété cohomologique indiquée plus haut, (4.1.2) s'écrit, pour $X = G/H$,

$$(4.1.3) \quad E_2^{i,j} = H^i(BG) \otimes H^j(G/H) \Rightarrow H^*(BH).$$

En particulier, prenant pour H le sous-Groupes unité, on obtient (sous réserve de propriété cohomologique pour G) une suite spectrale

$$(4.1.4) \quad E_2^{i,j} = H^i(BG) \otimes H^j(G) \Rightarrow H^*(T).$$

4.2. Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique p , k_0 un sous-corps fini de k , G_0 un groupe algébrique sur k_0 , G le groupe induit sur k . On suppose G connexe, et l'on note $f: G \rightarrow G$ l'endomorphisme de Frobenius associé à (k_0, G_0) , dont le sous-groupe des points fixes $G^f \subset G$ est le groupe fini $G_0(k_0)$. Rappelons ([16] VI 4) que le morphisme $G \rightarrow G$, $x \mapsto x(fx)^{-1}$, est un revêtement étale surjectif de noyau G^f , qui induit donc un isomorphisme

$$(4.2.1) \quad G/G^f \xrightarrow{\sim} G,$$

appelé isomorphisme de Lang. Prenons pour topos T de (4.1) le topos des faisceaux sur la catégorie des schémas sur k munie de la topologie étale ("grand site étale de k "), et pour anneau de coefficients A le corps premier \mathbb{F}_ℓ , avec $\ell \neq p$. Compte tenu de l'isomorphisme de Lang, la suite spectrale (4.1.3) pour $H = G^f$ s'écrit

$$(4.2.2) \quad E_2^{i,j} = H^i(BG) \otimes H^j(G) \Rightarrow H_{G^f}^*$$

(l'hypothèse de propriété cohomologique de (loc. cit.) est vérifiée du fait que $G/G^f \simeq G$ se dévise en G/B et en groupes G_a et G_m). Elle permet d'atteindre la structure de $H_{G^f}^*$ lorsqu'on connaît celles de $H^*(BG)$ et $H^*(G)$ ou plus précisément celle de la suite spectrale (4.1.4), qui s'écrit ici

$$(4.2.3) \quad E_2^{i,j} = H^i(BG) \otimes H^j(G) \Rightarrow \mathbb{F}_\ell .$$

Supposons en particulier que $H^*(G)$ possède un système simple de générateurs transgressifs pour (4.2.3), de sorte que, d'après ([2] 13.1, 16.1), $H^*(BG)$ est une algèbre de polynômes $S(V)$, la transgression donnant un isomorphisme de degré 1 entre le sous-espace des éléments primitifs de $H^*(G)$ et l'espace vectoriel gradué V , et supposons de plus que V puisse être choisi de manière à être stable sous $f^* : H^*(BG) \rightarrow H^*(BG)$. Quillen affirme que, sous les hypothèses précédentes, il existe un isomorphisme de \mathbb{F}_ℓ -vectoriels gradués

$$(4.2.4) \quad H_{G,f}^* \simeq S(V_f) \otimes \Lambda(V^f(-1)) ,$$

qui est un isomorphisme d'algèbres pour ℓ impair, V_f et V^f étant définis par la suite exacte $0 \rightarrow V^f \rightarrow V \xrightarrow{\text{Id} - f^*} V \rightarrow V_f \rightarrow 0$.

Exemple (cf. ([10] 2.2)).- Si q est une puissance de p , et r désigne l'ordre de q mod. ℓ (i.e. le degré de l'extension $\mathbb{F}_q(\mu_\ell)$), il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués

$$H^*(BGL_n(\mathbb{F}_q), \mathbb{F}_\ell) \simeq S[c'_r, \dots, c'_{mr}] \otimes \Lambda[c''_r, \dots, c''_{mr}] ,$$

où $\deg(c'_{jr}) = 2jr$, $\deg(c''_{jr}) = 2jr - 1$, $m = [n/r]$. Celui-ci est un isomorphisme d'algèbres si ℓ est impair, ou $\ell = 2$ et $q \equiv 1 \pmod{4}$. Les c'_{jr} , c''_{jr} sont les classes de Chern, définies à la Grothendieck (cf. (loc. cit.) et ([4])), de la représentation standard de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ sur \mathbb{F}_q^n (les c''_{jr} sont "de nature arithmétique").

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK, et J.-L. VERDIER - Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963/64, à paraître aux Lecture Notes, cité (SGA 4).
- [2] A. BOREL - Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Ann. of Math., 57 (1953), p. 115-207.
- [3] H. CARTAN and S. EILENBERG - Homological Algebra, Princ. Univ. Press, (1956).
- [4] A. GROTHENDIECK - Classes de Chern et représentations linéaires des groupes discrets, in Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holl. Pub. Co. (1968).
- [5] M. LAZARD - Groupes analytiques p-adiques, Pub. Math. de l'I.H.E.S., 26 (1965).
- [6] D. G. QUILLEN - The Adams conjecture, à paraître.
- [7] D. G. QUILLEN - Cohomology of groups, exposé au Congrès International de Nice 1970.
- [8] D. G. QUILLEN - The spectrum of an equivariant cohomology ring I, à paraître.
- [9] D. G. QUILLEN - The spectrum of an equivariant cohomology ring II, à paraître.
- [10] D. G. QUILLEN - The K-theory associated to a finite field I, à paraître.
- [11] D. G. QUILLEN - A cohomological criterion for p-nilpotence, à paraître.
- [12] D. G. QUILLEN - The mod 2 cohomology rings of extra-special 2-groups and the spinor groups, à paraître.
- [13] J.-P. SERRE - Sur la dimension cohomologique des groupes profinis, Topology, 3 (1965), p. 413-420.
- [14] J.-P. SERRE - Cohomologie des groupes discrets, Ann. of Math. Studies, Princ. Univ. Press, 1971. (Voir aussi C. R. Acad. Sci. Paris, 268, série A (1969), p. 268-271.)

- [15] J.-P. SERRE - Cohomologie des groupes discrets, Séminaire Bourbaki, exposé 399, Juin 1971, Lecture Notes 244, Springer-Verlag.
- [16] J.-P. SERRE - Groupes algébriques et corps de classes, Hermann (1959).
- [17] B. B. VENKOV - Cohomology algebras for some classifying spaces, Dokl. Akad. Nauk., 127 (1959), p. 943-944, Math. Rev. 21, n° 7500.