LUC ILLUSIE

Travaux de Quillen sur la cohomologie des groupes

Séminaire N. Bourbaki, 1973, exp. nº 405, p. 89-105

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1971-1972__14__89_0>

Séminaire BOURBAKI
24e année, 1971/72, n° 405

TRAVAUX DE QUILLEN SUR LA COHOMOLOGIE DES GROUPES

par Luc ILLUSIE

Un nombre premier p est fixé pour toute la suite. Si X est un espace topologique, on note $H^*(X) = H^*(X, \mathbb{F}_p)$ la cohomologie de X à valeurs dans le faisceau constant $\mathbb{F}_p$; c'est une $\mathbb{F}_p$-algèbre graduée, commutative (resp. strictement anticommutative) si p est pair (resp. impair), et munie d'opérations de Steenrod.

1. Cohomologie équivariante et p-groupes abéliens élémentaires ([7], [8], [9]).

1.1. Soit G un groupe de Lie compact, et soit X un G-espace, i.e. un espace topologique sur lequel G opère continûment. Soit $PG \to BG$ un fibré principal de groupe G tel que PG soit contractile. On dit que

$$H_G^*(X) = H^*(PG \times^G X) \qquad (^1)$$

est la cohomologie équivariante de X. On montre (2) que $H_G^*(X)$ est essentiellement indépendant du choix de $PG \to BG$, et dépend de façon contravariante de la paire (G,X), un morphisme $(G,X) \to (G',X')$ étant défini comme un couple (u,f) formé d'un homomorphisme $u : G \to G'$ et d'une application continue $f : X \to X'$ telle que $f(gx) = u(g)f(x)$ pour $g \in G$, $x \in X$. Si X est un point, on écrit H_G^* au lieu de $H_G^*(X) = H^*(BG)$. Quand G est un groupe fini, H_G^* coïncide avec la cohomologie habituelle de G à valeurs dans le G-module trivial $\mathbb{F}_p$. Quand

(1) Si Y, Z sont des G-espaces, on note comme d'habitude $Y \times^G Z$ le quotient de $Y \times Z$ par l'action diagonale de G, $g(y,z) = (gy,gz)$.

(2) par un petit argument dû à Borel, reproduit dans [8] ; d'aucuns préféreront définir la cohomologie équivariante à l'aide du topos classifiant de Grothendieck (SGA 4 IV 2.5) (cf. n° 4) (N.B. les deux définitions coïncident)

G est le groupe unité, on a bien entendu $H_G^*(X) = H^*(X)$.

Soit $K \subset G$ un sous-groupe fermé, et soit Y un K-espace. Le morphisme $(K,Y) \to (G, G\times^K Y)$, $(k,y) \mapsto (k, cl(1,y))$, induit un isomorphisme

(1.1.1) $\quad H_G^*(G\times^K Y) \xrightarrow{\sim} H_K^*(Y)$ ("formule d'induction").

En particulier, si Y est réduit à un point et $K = G_x$ est le stabilisateur d'un point x de X , le morphisme $(G_x, Y) \to (G, Gx)$, $(k,y) \mapsto (k,x)$, induit un isomorphisme

(1.1.2) $\quad H_G^*(Gx) \xrightarrow{\sim} H_{G_x}^*$.

PROPOSITION 1.2 ([8], [17]).- *Supposons* $\dim_{\mathbb{F}_p} H^*(X) < \infty$. *Alors* $H_G^*(X)$ *est une* $\mathbb{F}_p$*-algèbre de type fini. En particulier, la série de Poincaré de* $H_G^*(X)$,

$$PS_t(H_G^*(X)) = \sum_{i\geq 0} \dim_{\mathbb{F}_p} H_G^i(X)t^i ,$$

est une fonction rationnelle de t .

Preuve. Plongeant G dans un groupe unitaire $U = U(n)$, on se ramène, grâce à la formule d'induction (1.1.1), au cas où $G = U$. Comme $H_U^* = \mathbb{F}_p[c_1,\dots,c_n]$, la suite spectrale de Leray de la projection $PU\times^U X \to BU$ permet alors de conclure.

DÉFINITION 1.3.- *On dit qu'un groupe* G *est un* p*-groupe abélien élémentaire s'il existe un entier* r *tel que* $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$. *L'entier* r *s'appelle alors le rang de* G .

On notera $\underline{\underline{A}}$ la catégorie des p-groupes abéliens élémentaires.

1.4. Soit $A \in \mathrm{ob}\,\underline{\underline{A}}$. Identifions H_A^1 à $A^\vee = \mathrm{Hom}(A, \mathbb{F}_p)$ par l'isomorphisme canonique. L'homomorphisme de Bockstein $\beta : A^\vee \to H_A^2$ est injectif, et l'on a des isomorphismes fonctoriels canoniques

$$H_A^* \xleftarrow{\sim} \begin{cases} \Lambda A^{\vee} \otimes S(\beta A^{\vee}) & \text{si } p \text{ est impair} \\ S(A^{\vee}) & \text{si } p = 2 , \end{cases}$$

où Λ (resp. S) est le foncteur algèbre extérieure (resp. symétrique) sur $\mathbb{F}_p$. En effet, par Künneth on se ramène au cas où A est de rang un, pour lequel les assertions précédentes sont bien connues.

1.5. Revenant à la situation de (1.1), on définit une catégorie $A(G,X)$ de la manière suivante. Les objets de $A(G,X)$ sont les couples (A,c) , où $A \in \mathrm{ob}\,\underline{\underline{A}}$ est un sous-groupe de G et $c \in \pi_0(X^A)$, X^A désignant l'ensemble des points de X fixes par A . Une flèche $(A,c) \to (A',c')$ de $A(G,X)$ est un homomorphisme $u : A \to A'$ de la forme $u(x) = gxg^{-1}$ pour un élément g de G tel que $gc \supset c'$ (N.B. $gAg^{-1} \subset A' \Rightarrow X^{A'} \subset X^{gAg^{-1}} = gX^A$). En d'autres termes, si l'on pose

$$\mathrm{Transp}(A,c\,;A',c') = \{g \in G \mid gAg^{-1} \subset A' , \ gc \supset c'\} ,$$

$$\mathrm{Norm}(A,c) = \mathrm{Transp}(A,c\,;A,c) ,$$

$$\mathrm{Cent}(A,c) = \{g \in G \mid gag^{-1} = a \ \text{ pour tout } \ a \in A , \ \ gc = c\} ,$$

on a :

$$\mathrm{Hom}_{A(G,X)}((A,c),(A',c')) = \mathrm{Transp}(A,c\,;A',c')/\mathrm{Cent}(A,c) .$$

En particulier,

$$\mathrm{End}_{A(G,X)}(A,c) = \mathrm{Norm}(A,c)/\mathrm{Cent}(A,c)$$

est un groupe, noté $W(A,c)$, et appelé <u>groupe de Weyl de</u> (A,c) . Quand X est un point, on retrouve les notions habituelles de transporteur, normalisateur, etc. Pour $(A,c) \in \mathrm{ob}\, A(G,X)$, notons

(1.5.1) $\quad (A,c)^* : H_G^*(X) \to H_A^*$

l'homomorphisme induit par $(A,pt) \to (G,X)$, $(a,pt) \mapsto (a,x)$, où x est un point donné de c [1]. On vérifie facilement que, pour toute flèche $u : (A,c) \to (A',c')$ de $A(G,X)$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& H_A^* \\
H_G^*(X) \arrow[ur, "(A,c)^*"] \arrow[dr, "(A',c')^*"'] & \\
& H_{A'}^* \arrow[uu, "u^*"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif (quand X est un point, cela résulte du fait bien connu que les automorphismes intérieurs agissent trivialement sur H_G^*). Les $(A,c)^*$ définissent par suite un homomorphisme

(1.5.2) $$a(G,X) : H_G^*(X) \to \varprojlim_{(A,c)\in A(G,X)} H_A^* .$$

DÉFINITION 1.6- *Soit* $f : R \to S$ *un morphisme de* $\mathbb{F}_p$*-algèbres. On dit que* f *est un* F-*isomorphisme* (*resp. un* F-*isomorphisme uniforme*) *si tout élément de* $\mathrm{Ker}(f)$ *est nilpotent et si, pour tout* $s \in S$, *il existe un entier* n *tel que* $s^{p^n} \in \mathrm{Im}(f)$ (*resp. si* $\mathrm{Ker}(f)$ *est nilpotent et s'il existe un entier* n *tel que, pour tout* $s \in S$, *on ait* $s^{p^n} \in \mathrm{Im}(f)$).

Le résultat principal de Quillen ([8] 6.2) est le suivant :

THÉORÈME 1.7.- *Soit* G *un groupe de Lie compact, et soit* X *un* G-*espace. On suppose* X *compact* (*resp. paracompact et de* p-*dimension cohomologique finie* [2]) *et tel que, pour tout* p-*sous-groupe abélien élémentaire* A *de* G , $\pi_0(X^A)$ *soit*

---

[1] l'homomorphisme en question est évidemment indépendant du choix de x ; quand $X^A = \emptyset$, on convient que $(A,c)^* = 0$.

[2] la p-dimension cohomologique de X est le sup des entiers n tels qu'il existe un faisceau $\mathcal{M}$ de $\mathbb{F}_p$-modules tel que $H^n(X,\mathcal{M}) \neq 0$.

fini (1). *Alors* $a(G,X)$ (1.5.2) *est un* F-*isomorphisme* (*resp. un* F-*isomorphisme uniforme*).

La démonstration sera donnée à la fin de ce numéro.

COROLLAIRE 1.8.- *Sous les hypothèses de* (1.7), *supposons* $H^*(X)$ *de dimension finie. Alors l'ordre du pôle de* $PS_t(H^*_G(X))$ (1.2) *pour* $t = 1$ *est égal à la borne supérieure des rangs des* p-*sous-groupes abéliens élémentaires* A *de* G *tels que* $X^A \neq \emptyset$.

En particulier :

COROLLAIRE 1.8.1.- *L'ordre du pôle de* $PS_t(H^*_G)$ *pour* $t = 1$ *est égal à la borne supérieure des rangs des* p-*sous-groupes abéliens élémentaires de* G . (2)

Pour la démonstration de (1.8), voir ([8] 7.7) : c'est une conséquence facile du fait que le noyau de $a(G,X)$ est nilpotent.

1.9. Quand X est un point, nous noterons $a(G)$ l'homomorphisme (1.5.2), qui est simplement donné par la famille des restrictions $H^*_G \to H^*_A$, $A \hookrightarrow G$, $A \in \operatorname{ob} \underline{\underline{A}}$. Voici, dans ce cas, quelques illustrations de (1.7).

1.9.1. $G = \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, $n \geq 2$; soit $A = p^{n-1}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ le p-sous-groupe abélien élémentaire maximal ; d'après ([3], p. 252) on a $H^*_G = \Lambda[x] \otimes S[y]$, où x (resp. y) est un générateur de H^1_G (resp. H^2_G) ; $a(G)$ est la restriction $H^*_G \to H^*_A$, qui est un isomorphisme en degré pair et zéro en degré impair ; pour $u \in \operatorname{Ker} a(G)$ (resp. H^*_A) on a $u^p = 0$ (resp. $u^p \in \operatorname{Im} a(G)$).

1.9.2. $G = U(n)$; soit T un tore maximal, et soit $A \subset T$ le sous-groupe des

---

(1) Quillen montre ([8] 4.3) que cette hypothèse est vérifiée par exemple si $H^*(X)$ est de dimension finie ; voir ([8] 6.2) pour un énoncé légèrement plus général.

(2) ce résultat avait été conjecturé indépendamment par Atiyah et Swan.

points d'ordre p ; tout p-sous-groupe abélien élémentaire de G est conjugué à un sous-groupe de A, et $a(G)$ n'est autre que la restriction $H_G^* \to (H_A^*)^W$, où l'exposant W signifie qu'on prend les invariants par le groupe de Weyl ; elle est injective (voir ([10] § 3) pour le calcul de $(H_A^*)^W$).

1.9.3. $p = 2$, $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ est le groupe des quaternions d'ordre 8 ; le centre $A = \{\pm 1\}$ est l'unique 2-sous-groupe abélien élémentaire non trivial ; $a(G)$ est la restriction $H_G^* \to H_A^*$; on a $H_A^* = \mathbf{F}_2[z]$, où z est le générateur de H_A^1, et $H_G^* = \mathbf{F}_2[x,y,e]/(x^2 + xy + y^2, x^2y + xy^2)$, où $\{x,y\}$ forment une base de H_G^1 et e engendre H_G^4 ; $a(G)$ est donné par $a(G)x = a(G)y = 0$, $a(G)e = z^4$; donc, pour $u \in \operatorname{Ker} a(G)$ (resp. H_A^*), on a $u^4 = 0$ (resp. $u^4 \in \operatorname{Im} a(G)$). Plus généralement, Quillen dévisse complètement H_G^* pour G extension centrale d'un 2-groupe abélien élémentaire par $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ [12].

1.9.4. $G = \mathfrak{S}_n$, groupe des permutations de n lettres ; Quillen montre [6] que $a(G)$ est injectif.

1.10. Preuve de (1.7). a) Examinons d'abord le cas particulier où, pour tout $x \in X$, le groupe d'isotropie G_x est un p-groupe abélien élémentaire. On montre alors facilement que $a(G,X)$ s'identifie à l'homomorphisme latéral

(1.10.1) $$H_G^*(X) \to H^0(X/G, R^*q_*(\mathbf{F}_p))$$

défini par la suite spectrale de Leray

$$E_2^{ij} = H^i(X/G, R^jq_*(\mathbf{F}_p)) \Rightarrow H_G^*(X)$$

relative à la projection canonique $q : PG \times^G X \to X/G$. Les ingrédients de cette vérification sont d'une part l'hypothèse que chaque X^A n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, qui permet de considérer un élément du second membre de (1.5.2) comme une famille d'applications localement constantes $X^A \to H_A^*$ vérifiant une certaine condition de compatibilité, d'autre part le fait ([8] 6.3) que G ne possède qu'un nombre fini de classes de p-sous-groupes abéliens élémentaires à conjugaison près, grâce à quoi on se ramène à une limite projective finie, enfin la formule d'induction (1.1.2) qui résout le cas crucial où X n'a qu'une orbite. Il s'agit maintenant de montrer que (1.10.1) est un F-isomorphisme (resp. un F-isomorphisme uniforme). Pour cela, on n'a plus besoin de l'hypothèse sur les groupes d'isotropie. Dans le cas compact, l'assertion résulte d'une suite exacte de Mayer-Vietoris équivariante, et, dans le cas paracompact, de la structure multiplicative de la suite spectrale de Leray (une fois établi que X/G est de p-dimension cohomologique finie).

b) Dans le cas général, plongeons G dans un groupe unitaire U. Soient T un tore maximal de U, et $S \subset T$ le sous-groupe des points d'ordre p. Faisons agir G sur $F = U/S$ par translations à gauche. Les G-espaces $X \times F$ et $X \times F \times F$ vérifient encore les hypothèses de (1.7), et le diagramme de G-espaces

$$X \times F \times F \overset{pr_{12}}{\underset{pr_{13}}{\rightrightarrows}} X \times F \xrightarrow{pr_1} X$$

fournit un diagramme commutatif

$$(1.10.2)\qquad \begin{array}{ccccc} H_G^*(X) & \longrightarrow & H_G^*(X\times F) & \rightrightarrows & H_G^*(X\times F\times F) \\ \downarrow{\scriptstyle a(G,X)} & & \downarrow{\scriptstyle a(G\,,\,X\times F)} & & \downarrow{\scriptstyle a(G\,,\,X\times F\times F)} \\ \varprojlim_{A(G,X)} H_A^* & \longrightarrow & \varprojlim_{A(G\,,\,X\times F)} H_A^* & \rightrightarrows & \varprojlim_{A(G\,,\,X\times F\times F)} H_A^* \end{array} .$$

Les groupes d'isotropie de $X \times F$ (resp. $X \times F \times F$) sont conjugués à des sous-groupes de S, donc appartiennent à $\underline{\underline{A}}$. D'après le cas particulier a), $a(G\,,\,X\times F)$ et $a(G\,,\,X\times F\times F)$ sont donc des F-isomorphismes (resp. des F-isomorphismes uniformes). Pour en conclure qu'il en est de même de $a(G,X)$, il suffit donc, d'après une variante du lemme des 5, de montrer que les lignes de (1.10.2) sont exactes. L'exactitude de la ligne inférieure résulte trivialement du fait que, pour tout p-sous-groupe abélien élémentaire A de G, on a $F^A \neq \emptyset$. Celle de la ligne supérieure découle, par l'argument de descente habituel, du fait que $H^*_G(X\times F) = H^*_G(X) \otimes_{H^*_U} H^*_S$ et que H^*_S est un module libre de type fini sur H^*_U, ces deux derniers points se déduisant facilement du "splitting principle" de la théorie des classes de Chern. Ceci achève la démonstration de (1.7).

2. Stratification de $\mathrm{Spec}\ H_G(X)$ ([9]).

2.1. Notation. Si X est un G-espace comme en (1.1), on posera

$$H_G(X) = \begin{cases} \oplus H^{2i}_G(X) & \text{si } p \text{ est impair} \\ H^*_G(X) & \text{si } p = 2\ . \end{cases}$$

2.2. Soit A un p-groupe abélien élémentaire. Les formules (1.4) montrent que $\mathrm{Spec}\ H_A$ est irréductible, et que le sous-schéma intègre sous-jacent s'identifie (canoniquement et fonctoriellement) au fibré vectoriel $\underline{A} = \mathrm{Spec}\ S(A^\vee)$ (qui dépend de façon covariante de A).

2.3. Plaçons-nous dans la situation de (1.7). Pour $(A,c) \in \mathrm{ob}\ A(G,X)$, l'homomorphisme $(A,c)^*$ (1.5.1) définit un morphisme de schémas

(2.3.1) $\qquad (A,c)_* : \underline{A} \to \mathrm{Spec}\ H_G(X)$.

Les applications continues sous-jacentes aux $(A,c)_*$ fournissent, par passage à la limite, une application continue

(2.3.2) $$\varinjlim_{(A,c)\in A(G,X)} \underline{A} \to \mathrm{Spec}\ H_G(X)\ ,$$

où le premier membre désigne l'espace topologique limite inductive des espaces sous-jacents aux $\underline{A}$. Le théorème (1.7) exprime essentiellement que (2.3.2) <u>est un homéomorphisme</u>. Compte tenu de ce que les H^*_A sont "finis" sur H^*_G (variante du théorème de finitude (1.2)) et du fait, signalé plus haut, que les classes de conjugaison de p-sous-groupes abéliens élémentaires de G sont en nombre fini, la traduction précédente découle en effet du

Lemme 2.3.3 ([9] B.7).- Soient R un anneau noethérien, $A \to B \rightrightarrows C$ un diagramme exact de R-algèbres, B et C étant finies sur R. Alors le diagramme d'espaces topologiques correspondant $\mathrm{Spec}(C) \rightrightarrows \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ est exact.

2.4. Quillen pousse plus loin la description du cône $\mathrm{Spec}\, H_G(X)$. Pour $(A,c) \in \mathrm{ob}\, \mathcal{A}(G,X)$, notons $\underline{p}_{A,c}$ l'image par (2.3.1) du point générique de $\underline{A}$ (i.e. l'idéal premier (gradué) noyau de l'application composée

$H_G(X) \xrightarrow{(A,c)^*} H_A \to H_A/\text{nilradical} = S(A^\vee)$), et $V_{A,c} = \overline{\{\underline{p}_{A,c}\}}$ le sous-schéma fermé image de $\underline{A}$. Notons $\underline{A}^+ \subset \underline{A}$ le complémentaire de la réunion des $\underline{A}'$, pour $A' \subset A$, $A' \neq A$; en d'autres termes, $\underline{A}^+$ est l'ouvert d'inversibilité de $e_A = \prod_{f \in A^\vee - \{0\}} f$. Notons enfin $V^+_{A,c} \subset V_A$ le complémentaire de la réunion des $V_{A',c'}$, pour $A' \subset A$, $A' \neq A$, c' désignant la composante connexe de $X^{A'}$ contenant c. Cela posé, on a le

THÉORÈME 2.5 ([9] 10.2, 11).- (i) Pour $(A,c) \in \mathrm{ob}\, \mathcal{A}(G,X)$, $V^+_{A,c}$ est affine et irréductible. Le groupe de Weyl $W(A,c)$ (1.5) agit sur $\underline{A}^+$ et $(A,c)_*$ (2.3.1) induit un homéomorphisme $\underline{A}^+/W(A,c) \to V^+_{A,c}$ (1).

(ii) Soit I un système de représentants pour les classes d'isomorphie d'objets de $\mathcal{A}(G,X)$. Alors $\mathrm{Spec}\, H_G(X)$ admet une décomposition

$$\mathrm{Spec}\, H_G(X) = \coprod_{(A,c) \in I} V^+_{A,c}$$

en sous-schémas localement fermés disjoints.

---

(1) N.B.- Si Ω est une extension de $\mathbb{F}_p$, $W(A,c)$ agit librement sur $\underline{A}^+(\Omega)$.

Remarques 2.6.- La décomposition précédente est une "stratification" au sens naïf du terme : $V_{A,c}$ est l'adhérence de $V^+_{A,c}$, et se décompose à son tour en somme disjointe de $V^+_{A',c'}$ pour $A' \subset A$, $A' \neq A$. On a $V_{A_1,c_1} \hookrightarrow V_{A_2,c_2}$ (i.e. $\underline{p}_{A_2,c_2} \supset \underline{p}_{A_1,c_1}$) si et seulement si $\mathrm{Hom}_{A(G,X)}((A_1,c_1),(A_2,c_2)) \neq \emptyset$. En particulier, les composantes irréductibles de $\mathrm{Spec}\ H_G(X)$ correspondent bijectivement aux classes d'isomorphie d'objets maximaux de $A(G,X)$ ([1]). On retrouve ainsi (1.8), car la dimension de $\mathrm{Spec}\ H_G(X)$ (qui dans ce cas est finie) coïncide avec l'ordre du pôle de $PS_t(H^*_G(X))$ pour $t = 1$, comme il résulte d'un exercice facile sur les polynômes de Hilbert.

De plus, Quillen caractérise les sous-schémas fermés de $\mathrm{Spec}\ H_G(X)$ de la forme $V_{A,c}$:

THÉORÈME 2.7 ([9] 12.1).- Les $V_{A,c}$ sont exactement les sous-cônes fermés irréductibles de $\mathrm{Spec}\ H_G(X)$ stables par les opérations de Steenrod. ([2])

En d'autres termes, un idéal premier de $H_G(X)$ est de la forme $\underline{p}_{A,c}$ pour un objet (A,c) de $A(G,X)$ si et seulement s'il est homogène et stable par les opérations de Steenrod.

2.8. Pour la démonstration de (2.5), nous renvoyons à ([9] 9, 10) (c'est assez facile à partir du fait que (2.3.2) est un homéomorphisme). Le lecteur pourra aussi consulter [11], qui contient, dans le cas où X est ponctuel et G fini, une

---

([1]) on dit que (A,c) est maximal si toute flèche issue de (A,c) est un isomorphisme.

([2]) Rappelons que $H^*_G(X)$ $(\overset{\mathrm{dfn}}{=} H^*(PG \times^G X))$ est muni d'opérations de Steenrod $P^i : H^*_G(X) \to H_G^{*+2i(p-1)}(X)$ (resp. $H_G^{*+i}(X)$) pour p impair (resp. $p = 2$) ; $P_t = \Sigma P^i t^i : H^*_G(X) \to H^*_G(X)[t]$ est un homomorphisme d'anneaux ; pour u de degré 2 (resp. 1), on a $P_t(u) = u + u^p t$.

jolie démonstration directe de (2.5) (ainsi que de la F-injectivité de (1.5.2)) utilisant l'homomorphisme norme pour les revêtements finis.

L'ingrédient essentiel de (2.7) est le fait [13] qu'un sous-cône fermé irréductible de $\underline{A}$ $(A \in \mathrm{ob}\,\underline{\underline{A}})$ qui est stable par les opérations de Steenrod est nécessairement de la forme $\underline{A'}$, pour $A' \subset A$.

Exemple 2.9.- Soit G le groupe diédral d'ordre 8, i.e. le produit semi-direct $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \tilde{\times} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \langle x \rangle \tilde{\times} \langle y \rangle$, avec $x^2 = y^4 = 1$, $xyx^{-1} = y^{-1}$. On peut aussi regarder G comme extension centrale de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ par $\langle y^2 \rangle$ ($\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) . La suite spectrale de Hochschild-Serre correspondante $(p = 2)$ fournit (cf. [12]) $H^*_G = \mathbb{F}_2[u,v,e]/(uv + v^2)$, avec u , v de degré 1 , e de degré 2 . Spec H_G est un "dièdre", dont les composantes irréductibles correspondent aux 2-sous-groupes abéliens élémentaires (de rang 2) $\langle x,y^2 \rangle$ et $\langle xy,y^2 \rangle$. Noter en passant que ceux-ci "détectent" la cohomologie de G , i.e. $a(G)$ (1.5.2) est injectif. On conseille au lecteur d'expliciter une stratification (2.5 (ii)) ... et de faire un dessin.

3. Variantes : groupes compacts, groupes discrets ([9] 13, 14).

Les résultats des n$^{\text{os}}$ précédents s'étendent, au moins pour X ponctuel, au cas de certains groupes compacts (tels que les pro-p-groupes analytiques) et de certains groupes discrets (tels que les groupes arithmétiques).

3.1. Soit G un groupe compact. D'après Peter-Weyl, G est limite projective de ses quotients G_i qui sont des groupes de Lie compacts. On pose

$$H^*_G = \varinjlim H^*_{G_i} .$$

On note d'autre part $A(G) = \varprojlim A(G_i)$ la catégorie des pro-p-sous-groupes abéliens élémentaires de G , les morphismes étant donnés par conjugaison par des éléments de G . Alors les théorèmes (1.7), (2.5), (2.7) sont encore valables, mutatis mutandis ([1]), pourvu que $A(G)$ n'ait qu'un nombre fini de classes d'isomorphie d'objets. Quillen montre que cette hypothèse est vérifiée dès que G possède un sous-groupe distingué G' tel que $H^*_{G'}$ soit de dimension finie et que G/G' soit un groupe de Lie compact, ce qui est le cas par exemple pour les pro-p-groupes analytiques de Lazard ([5] V 2).

3.2. Soit Γ un groupe discret. Notons H^*_Γ la cohomologie de Γ à valeurs dans le Γ-module trivial $\mathbb{F}_p$, et $A(\Gamma)$ la catégorie des p-sous-groupes abéliens élémentaires de Γ (les flèches étant les homomorphismes de la forme $ad(g)$, $g \in \Gamma$). Alors ([9] 14.1), si Γ possède un sous-groupe Γ' d'indice fini tel que $cd_p(\Gamma') < \infty$ ([2]), la flèche canonique (définie comme en (1.5.2))

$$a(\Gamma) : H^*_\Gamma \to \varprojlim_{A \in A(\Gamma)} H^*_A$$

est un F-isomorphisme uniforme (1.6). Si, de plus, Γ ne possède qu'un nombre fini de p-sous-groupes abéliens élémentaires à conjugaison près, on a, pour Γ , des théorèmes analogues à (2.5) et (2.7). Les hypothèses précédentes sont vérifiées par les groupes S-arithmétiques de Borel-Serre, comme il résulte facilement du fait ([14], [15]) que de tels groupes possèdent des sous-groupes distingués d'indice fini de dimension cohomologique finie. La réduction des résultats qu'on vient d'énoncer à ceux des n^{os} 1 et 2 est particulièrement facile dans le cas où Γ est un groupe arithmétique : en effet, si X est "l'espace symétri-

---

([1]) voir ([9] 13) pour des énoncés en forme !

([2]) si G est un groupe discret, $cd_p(G)$ désigne la borne supérieure des entiers n tels qu'il existe un $\mathbb{F}_p[G]$-module M tel que $H^n(G,M) \neq 0$.

que" correspondant ([15]), et si $\Gamma' \subset \Gamma$ est un sous-groupe distingué d'indice fini sans torsion, on a $H^*_\Gamma \simeq H^*_{\Gamma/\Gamma'}(X/\Gamma')$, et l'on est ramené aux théorèmes des n^{os} 1 et 2 pour l'action du groupe fini Γ/Γ' sur la variété X/Γ' . Pour le cas général, voir ([9] 14, 15).

4. Calculs utilisant l'isomorphisme de Lang ([7] § 2).

Ce n° est indépendant des précédents. Il reproduit pratiquement tels quels les résultats annoncés dans (loc. cit.) ([1]).

4.1. Soient T un topos, G un Groupe de T , BG le topos classifiant de G , i.e. (SGA 4 IV 2.4) la catégorie des G-objets de T . Pour $X \in \mathrm{ob}\, BG$, on note X_G le topos localisé $(BG)_{/X}$ (catégorie des G-objets au-dessus de X). Fixons un anneau A . La "cohomologie équivariante" de X à valeurs dans A , $H^*(X_G , A)$, notée encore $H^*_G(X,A)$ (voire $H^*_G(X)$), est l'aboutissement d'une suite spectrale de Leray

$$(4.1.1) \qquad E_2^{ij} = H^i(BG, R^j u_*(A)) \Rightarrow H^*_G(X,A) ,$$

où $u : X_G \to BG$ est le morphisme de localisation. Supposons que A soit un corps et que, pour tout $Y \in \mathrm{ob}\, T$ et tout $j \geq 0$, la flèche de changement de base $H^j(X,A)_{(Y)} \to R^j\mathrm{pr}_{1*}(A)$ (où $\mathrm{pr}_1 : Y \times X \to Y$) soit un isomorphisme. Alors $R^j u_*(A)$ est le faisceau constant de valeur $H^j(X,A)$, et (4.1.1) prend la forme

$$(4.1.2) \qquad E_2^{ij} = H^i(BG) \otimes H^j(X) \Rightarrow H^*_G(X) .$$

Soit H un sous-Groupe de G , faisons agir G sur G/H par translations à gauche. Le topos localisé $(G/H)_G$ est canoniquement équivalent à BH (SGA 4 IV

([1]) Nous espérons que Quillen en donnera prochainement une version détaillée, ainsi que de ses résultats sur les K_i ([7] § 3).

5.8.1), donc $H^*_G(G/H) = H^*(BH)$. Par suite, si $X = G/H$ vérifie l'hypothèse de propreté cohomologique indiquée plus haut, (4.1.2) s'écrit, pour $X = G/H$,

(4.1.3) $$E_2^{ij} = H^i(BG) \otimes H^j(G/H) \Rightarrow H^*(BH) .$$

En particulier, prenant pour H le sous-Groupe unité, on obtient (sous réserve de propreté cohomologique pour G) une suite spectrale

(4.1.4) $$E_2^{ij} = H^i(BG) \otimes H^j(G) \Rightarrow H^*(T) .$$

4.2. Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique p , k_o un sous-corps fini de k , G_o un groupe algébrique sur k_o , G le groupe induit sur k . On suppose G connexe, et l'on note $f : G \to G$ l'endomorphisme de Frobenius associé à (k_o,G_o) , dont le sous-groupe des points fixes $G^f \subset G$ est le groupe fini $G_o(k_o)$. Rappelons ([16] VI 4) que le morphisme $G \to G$, $x \mapsto x(fx)^{-1}$, est un revêtement étale surjectif de noyau G^f , qui induit donc un isomorphisme

(4.2.1) $$G/G^f \xrightarrow{\sim} G ,$$

appelé <u>isomorphisme de Lang</u>. Prenons pour topos T de (4.1) le topos des faisceaux sur la catégorie des schémas sur k munie de la topologie étale ("grand site étale de k "), et pour anneau de coefficients A le corps premier $\mathbb{F}_\ell$, avec $\ell \neq p$. Compte tenu de l'isomorphisme de Lang, la suite spectrale (4.1.3) pour $H = G^f$ s'écrit

(4.2.2) $$E_2^{ij} = H^i(BG) \otimes H^j(G) \Rightarrow H^*_{G^f}$$

(l'hypothèse de propreté cohomologique de (loc. cit.) est vérifiée du fait que $G/G^f \simeq G$ se dévisse en G/B et en groupes G_a et G_m). Elle permet d'atteindre la structure de $H^*_{G^f}$ lorsqu'on connaît celles de $H^*(BG)$ et $H^*(G)$ ou plus précisément celle de la suite spectrale (4.1.4), qui s'écrit ici

$$(4.2.3) \qquad E_2^{ij} = H^i(BG) \otimes H^j(G) \Rightarrow \mathbb{F}_\ell \,.$$

Supposons en particulier que $H^*(G)$ possède un système simple de générateurs transgressifs pour (4.2.3), de sorte que, d'après ([2] 13.1, 16.1), $H^*(BG)$ est une algèbre de polynômes $S(V)$, la transgression donnant un isomorphisme de degré 1 entre le sous-espace des éléments primitifs de $H^*(G)$ et l'espace vectoriel gradué V, et supposons de plus que V puisse être choisi de manière à être stable sous $f^* : H^*(BG) \to H^*(BG)$. Quillen affirme que, sous les hypothèses précédentes, il existe un isomorphisme de $\mathbb{F}_\ell$-vectoriels gradués

$$(4.2.4) \qquad H^*_{G^f} \simeq S(V_f) \otimes \Lambda(V^f(-1)) \,,$$

qui est un isomorphisme d'algèbres pour ℓ impair, V_f et V^f étant définis par la suite exacte $0 \to V^f \to V \xrightarrow{\mathrm{Id}-f^*} V \to V_f \to 0$.

<u>Exemple</u> (cf. ([10] 2.2)).- Si q est une puissance de p, et r désigne l'ordre de q mod. ℓ (i.e. le degré de l'extension $\mathbb{F}_q(\mu_\ell)$), il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués

$$H^*(BGL_n(\mathbb{F}_q), \mathbb{F}_\ell) \simeq S[c'_r, \dots, c'_{mr}] \otimes \Lambda[c''_r, \dots, c''_{mr}] \,,$$

où $\deg(c'_{jr}) = 2jr$, $\deg(c''_{jr}) = 2jr - 1$, $m = [n/r]$. Celui-ci est un isomorphisme d'algèbres si ℓ est impair, ou $\ell = 2$ et $q \equiv 1 \pmod 4$. Les c'_{jr}, c''_{jr} sont les classes de Chern, définies à la Grothendieck (cf. (loc. cit.) et ([4])), de la représentation standard de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\mathbb{F}_q^n$ (les c''_{jr} sont "de nature arithmétique").

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK, et J.-L. VERDIER - Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963/64, à paraître aux Lecture Notes, cité (SGA 4).

[2] A. BOREL - Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Ann. of Math., 57 (1953), p. 115-207.

[3] H. CARTAN and S. EILENBERG - Homological Algebra, Princ. Univ. Press, (1956).

[4] A. GROTHENDIECK - Classes de Chern et représentations linéaires des groupes discrets, in Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holl. Pub. Co. (1968).

[5] M. LAZARD - Groupes analytiques p-adiques, Pub. Math. de l'I.H.E.S., 26 (1965).

[6] D. G. QUILLEN - The Adams conjecture, à paraître.

[7] D. G. QUILLEN - Cohomology of groups, exposé au Congrès International de Nice 1970.

[8] D. G. QUILLEN - The spectrum of an equivariant cohomology ring I, à paraître.

[9] D. G. QUILLEN - The spectrum of an equivariant cohomology ring II, à paraître.

[10] D. G. QUILLEN - The K-theory associated to a finite field I, à paraître.

[11] D. G. QUILLEN - A cohomological criterion for p-nilpotence, à paraître.

[12] D. G. QUILLEN - The mod 2 cohomology rings of extra-special 2-groups and the spinor groups, à paraître.

[13] J.-P. SERRE - Sur la dimension cohomologique des groupes profinis, Topology, 3 (1965), p. 413-420.

[14] J.-P. SERRE - Cohomologie des groupes discrets, Ann. of Math. Studies, Princ. Univ. Press, 1971. (Voir aussi C. R. Acad. Sci. Paris, 268, série A (1969), p. 268-271.)

[15] J.-P. SERRE - Cohomologie des groupes discrets, Séminaire Bourbaki, exposé 399, Juin 1971, Lecture Notes 244, Springer-Verlag.

[16] J.-P. SERRE - Groupes algébriques et corps de classes, Hermann (1959).

[17] B. B. VENKOV - Cohomology algebras for some classifying spaces, Dokl. Akad. Nauk., 127 (1959), p. 943-944, Math. Rev. 21, n° 7500.