LUCIEN SZPIRO

Travaux de Kempf, Kleiman, Laksov sur les diviseurs exceptionnels

Séminaire N. Bourbaki, 1973, exp. nº 417, p. 339-353
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1971-1972__14__339_0>

TRAVAUX DE KEMPF, KLEIMAN, LAKSOV SUR LES DIVISEURS EXCEPTIONNELS

par Lucien SZPIRO

1. Enoncer le théorème de Kempf

Soit C une courbe réduite, irréductible, de type fini et propre sur un corps algébriquement clos k. Pour tout entier d, soit $\mathbb{P}_d$ le schéma de Picard de C qui "paramétrise" les $\mathcal{O}_C$ faisceaux inversibles de degré d. $\mathbb{P}_d$ est, non canoniquement, isomorphe à la jacobienne $\mathbb{P}_o$ de C. Soient L_d le faisceau de Poincaré sur $C \times \mathbb{P}_d$, $r : C \times \mathbb{P}_d \to C$ et $\rho : C \times \mathbb{P}_d \to \mathbb{P}_d$ les projections. Soit g le genre arithmétique de C. Pour tout point rationnel sur k, x dans $\mathbb{P}_d(k)$, on note $L_d(x) = r_*(L_d \otimes \rho^*(k(x)))$. La correspondance $x \longmapsto L_d(x)$ de $\mathbb{P}_d(k)$ dans l'ensemble des $\mathcal{O}_C$ faisceaux inversibles de degré d est une bijection.

Si r et d sont deux entiers, on note G_d^r l'ensemble des $\mathcal{O}_C$ modules inversibles $\mathcal{L}$, de degré d tels que $\dim_k H^o(C, \mathcal{L}) \geq r+1$; G_d^r est formé de <u>diviseurs exceptionnels</u> si $d - r < g$, i.e. si $H^1(C, \mathcal{L}) \neq 0$.

1.1. Construction des schémas $\mathbb{G}_d^r$

Avec Kleiman et Laksov [7], on va construire un schéma $\mathbb{G}_d^r$, fermé dans $\mathbb{P}_d$, tel que l'ensemble $\mathbb{G}_d^r(k)$ de ses points rationnels sur k soit égal à G_d^r.

<u>Lemme 1.- Il existe deux $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}$ faisceaux localement libres F et G, de rang constant égal respectivement à $d+1$ et g, et un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}$ homomorphisme $m : G \to F$, tels que, pour tout $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}$ faisceau cohérent Q, on ait des isomorphismes, fonctoriels en Q :</u>

$$\rho_*(L_d \otimes \rho^*Q) \simeq \operatorname{Ker}(m^\vee \otimes Q)$$
$$R^1\rho_*(L_d \otimes \rho^*Q) \simeq \operatorname{Coker}(m^\vee \otimes Q) .$$

Fixons $2g$ points lisses, rationnels sur k, distincts $M_1, \dots, M_{2g-1}, M$. Posons $E = M_1 + \dots + M_d$, $D = E + M$, et, pour tout diviseur K sur C :

$$L(K) = L_d \otimes r^* \mathcal{O}_C(K - E)$$

$$L_K = L_d \otimes r^* \mathcal{O}_{E+K} \qquad \text{si } E + K \text{ est effectif.}$$

De la suite exacte fondamentale

$$0 \to \mathcal{O}_C(D) \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_D \to 0 ,$$

on déduit la suite exacte

$$0 \to L(-M) \to L_d \to L_M \to 0 ,$$

et donc la suite exacte

$$\rho_*(L(-M)) \to \rho_*(L_d) \to \rho_* L_M \xrightarrow{\delta} R^1\rho_*(L(-M)) \to R^1\rho_*(L_d) \to R^1\rho_*(L_M) .$$

Du théorème de Riemann-Roch et du fait que ρ est propre et plat, on déduit (EGA_2 7) :

- $\rho_*(L(-M) \otimes \rho^*Q) = 0$ pour tout $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}$ faisceau cohérent Q.
- $R^1\rho_*(L_M \otimes \rho^*Q) = 0$ pour tout $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}$ faisceau cohérent Q.
- $\rho_*(L_M)$ est un faisceau localement libre sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}$ de rang $d+1$, constant.
- $R^1\rho_*(L(-M))$ est un faisceau localement libre sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}$ de rang constant égal à g.
- La suite suivante est exacte, pour tout Q faisceau cohérent sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}$:

$$(*) \qquad \begin{array}{l} 0 \to \rho_*(L_d \otimes \rho^*Q) \to \rho_* L_M \otimes Q \xrightarrow{\delta \otimes Q} R^1\rho_*(L(-M)) \otimes Q \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad R^1\rho_*(L_d \otimes \rho^*Q) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 . \end{array}$$

Prenant $G^\vee = R^1\rho_*(L(-M))$, $F^\vee = \rho_* L_M$ et $m^\vee = \delta$, on obtient le lemme.

Notons maintenant $E' = M_{d+1} + \dots + M_{2g-1}$, $D' = D + E'$, $M' = E' + M$; on obtient le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{O}_C(-D) & \to & \mathcal{O}_C & \to & \mathcal{O}_D & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{O}_C(-D) & \to & \mathcal{O}_C(E') & \to & \mathcal{O}_{D'} & \to & 0 . \end{array}$$

On en déduit un autre diagramme commutatif dont les lignes sont exactes en appliquant le foncteur $L_d \otimes r^*$. Donc un troisième diagramme commutatif de la même espèce

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \rho_* L_d & \to & \rho_* L_M & \xrightarrow{\delta} & R^1\rho_*(L(-M)) & \to & R^1\rho_* L_d & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \rho_* L'_d & \to & \rho_* L_{M'} & \xrightarrow{\varepsilon} & R^1\rho_*(L(-M)) & \to & R^1\rho_* L'_d & \to & 0 \end{array} \quad \text{où } L'_d = L(E'+E) .$$

On a les propriétés suivantes :

- $\rho_* L_M \to \rho_* L_{M'}$ est scindée ;
- $\rho_* L_{M'} = H$ est un faisceau localement libre de rang constant égal à $2g$ sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}$;
- $R^1\rho_* L'_d = 0$.

Du morphisme surjectif $\varepsilon : H \to G^\vee$, on déduit une section α de $B = \mathrm{Grass}_g(H)$ sur $\mathbb{P}_d$, i.e. $\alpha : \mathbb{P}_d \to B$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F^\vee \arrow[rr, "m^\vee"] \arrow[dr, hook] & & G^\vee \\ & H \arrow[ur, "\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

et $x \in \mathbb{P}_d(k)$, $x \in G^r_d$ si et seulement si $\overset{d+1-r}{\bigwedge} m^\vee(x) = 0$. Soit $\sigma_{r+1}(F^\vee)$ le schéma spécial de Schubert définit dans B par $F^\vee$. et r .

DÉFINITION.- $\mathbb{G}^r_d = \alpha^{-1}(\sigma_{r+1}(F^\vee))$.

1.2 <u>Propriétés de</u> $\mathbb{G}^o_d$

$\mathbb{G}^o_d$ est donc le sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_d$ définit par l'annulation de $\overset{d+1}{\bigwedge} F^\vee \to \overset{d+1}{\bigwedge} G^\vee$. Soient $Q = \mathrm{Coker}(m)$ et $\mathbb{D}_d = \mathbb{P}_{\mathbb{P}_d}(Q)$. Soit q la projection naturelle de $\mathbb{D}_d$ sur $\mathbb{P}_d$. Elle se factorise à travers l'immersion de $\mathbb{G}^o_d$

dans $\mathbb{P}_d$ par un morphisme que nous noterons s ; $\mathbb{D}_d$ "paramétrise" les diviseurs effectifs sur C de degré d ; $\mathbb{D}_d$ est lisse et connexe.

THÉORÈME 1 (Kempf).- Soit d un entier naturel tel que $0 \leq d \leq g-1$. Le morphisme $s : \mathbb{D}_d \to \mathbb{G}_d^o$ est birationnel ; $\mathbb{G}_d^o$ est un schéma irréductible, lisse en codimension 1, de Cohen-Macaulay, en particulier normal, de dimension d. Si d est non nul, le cycle de $\mathbb{G}_d^o$ dans l'anneau de Chow de $\mathbb{P}_d$ représente la $(g-d)$-ième classe de Chern de $R^1 \rho_*(L_d)$. De plus, si x est un point rationnel sur k de $\mathbb{G}_d^o$, la multiplicité de $\mathbb{G}_d^o$ en x est égale au coefficient binomial :

$$\begin{pmatrix} \dim_k(H^1(C, L_d(x))) \\ \dim_k(H^o(C, L_d(x))) - 1 \end{pmatrix} .$$

On va maintenant donner deux propriétés attachées à la situation décrite qui permettent de montrer le théorème.

La suite exacte, pour tout point $x \in \mathbb{P}_d(k)$:

$$0 \to m_x/m_x^2 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_d, x}/m_x^2 \to k(x) \to 0$$

où m_x est le faisceau d'idéaux des fonctions dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_d}$ qui s'annulent en x, donne lieu à deux homomorphismes de k-espaces vectoriels :

$$D_x : H^o(C, L_d(x)) \to H^1(C, L_d(x)) \otimes m_x/m_x^2$$
$$C_x : (m_x/m_x^2)^\vee \to H^1(C, \mathcal{O}_C) .$$

C_x est un isomorphisme.

On a d'autre part l'accouplement de Yoneda, qui donne lieu à la dualité de Serre sur C :

$$Y_x : H^o(C, L_d(x)) \otimes H^1(C, \mathcal{O}_C) \to H^1(C, L_d(x)) .$$

Lemme 2.- Le diagramme suivant est commutatif (analyse du morphisme $\mathrm{Div} \to \mathrm{Pic}$) :

$$\begin{tikzcd}
 & H^{0}(C\,,L_{d}(x)) \otimes (m_{x}/m_{x}^{2})^{\vee} \arrow[dl, "1\otimes C_{x}"'] \arrow[dr, "D_{x}\otimes 1"] \arrow[dd, dashed] & \\
H^{0}(C\,,L_{d}(x)) \otimes H^{1}(C\,,\mathcal{O}_{C}) \arrow[dr, "Y_{x}"'] & & H^{1}(C\,,L_{d}(x)) \otimes m_{x}/m_{x}^{2} \otimes (m_{x}/m_{x}^{2})^{\vee} \arrow[dl, "1\otimes \mathrm{Trace}"] \\
 & H^{1}(C\,,L_{d}(x)) \,. &
\end{tikzcd}$$

DÉFINITION.- Soient k un corps, U, V, W trois espaces vectoriels ; un homomorphisme bilinéaire

$$U \times V \xrightarrow{(\cdot\,,\,\cdot)} W$$

est appelé un accouplement régulier si $u \in V$, $v \in V$, $u \neq 0$, $v \neq 0$, alors $(u\,,v) \neq 0$.

Lemme 3.- Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur $\mathcal{O}_C$, l'homomorphisme bilinéaire déduit de l'accouplement de Yoneda,

$$H^{0}(C\,,\mathcal{L}) \times H^{1}(C\,,\mathcal{L})^{\vee} \to H^{1}(C\,,\mathcal{O}_{C})^{\vee}$$

est un accouplement régulier.

Soit b un élément non nul de $H^{0}(C\,,\mathcal{L})$; on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{C} \xrightarrow{b} \mathcal{L} \to K \to 0$$

où le support de K est fini, on en déduit que l'application $H^{1}(C\,,\mathcal{O}_{C}) \to H^{1}(C\,,\mathcal{L})$ est surjective.

2. Démontrer le théorème de Kempf

Soient Y un schéma et $m : G \to F$ un $\mathcal{O}_Y$ homomorphisme de $\mathcal{O}_Y$ modules localement libres de rangs constants, finis, g et f . Soit $P = \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_Y}(F)) = \mathbb{P}_Y(F)$, et soit t la projection de P sur Y . Soit $n : G_P(-1) \to \mathcal{O}_P$ l'homomorphisme déduit de $m_P(-1)$ et de l'homomorphisme canonique $F_P(-1) \to \mathcal{O}_P$. Soit X le sous-schéma fermé de $\mathcal{O}_P$ défini par l'annulation de n , i.e. $X = \mathbb{P}_Y(Q)$ où $Q = \mathrm{Coker}\ m$. On appellera q la projection de X sur Y. Soit Z le sous-schéma fermé de Y défini par l'annulation de $\overset{f}{\wedge} G \otimes \overset{f}{\wedge} F^{\vee} \to \mathcal{O}_Y$.

Kempf étudie la relation entre X et Z.

2.1. Une vue fonctorielle sur le complexe de Eagon et Northcott [3]

Considérons le complexe de Koszul défini par $n : G_P(-1) \to \mathcal{O}_P$

$$K_\bullet(n) \ : \ \overset{g}{\wedge} G_P(-1) \to \dots \to \overset{i}{\wedge} G_P(-1) \to \dots \to G_P(-1) \xrightarrow{n} \mathcal{O}_P \ .$$

Si on regarde les hyper images directes de $K_\bullet(n)$ par t, $H^k(t, K_\bullet(n))$, on obtient une suite spectrale convergente

$$R^i t_*(\overset{j}{\wedge}(G_P(-1))) \Rightarrow H^{i-j}(t, K_\bullet(n)) \ .$$

Mais cette suite spectrale est très simple car

$$R^i t_*(\overset{j}{\wedge} G_P(-1)) \simeq \overset{j}{\wedge} G \otimes_{\mathcal{O}_Y} R^i t_*(\mathcal{O}_P(-j)) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} i = j = 0 \\ \text{ou bien} \\ i = f-1 \quad \text{et} \quad f \leq j \leq g \ . \end{cases}$$

On en déduit le complexe suivant si $g \geq f$

$$\begin{tikzcd} E_\bullet(m) : R^{f-1}t_*(\overset{g}{\wedge} G_P(-1)) \arrow[r] & \dots \arrow[r] & R^{f-1}t_*(\overset{j}{\wedge} G_P(-1)) \arrow[r] & \dots \arrow[r] & R^{f-1}t_* \overset{f}{\wedge} G_P(-1) \arrow[d, "d_m"'] \\ & & & & t_*\mathcal{O}_P \ . \end{tikzcd}$$

Lemme 4 (Fonctorialité en m pour les triangles commutatifs, cas particulier).- Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \overset{f}{\wedge} G \otimes R^{f-1}t_*(\mathcal{O}_P(-f)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\overset{f}{\wedge} m \otimes \mathrm{Id}"'] & R^{f-1}t_*(\overset{f}{\wedge} G_P(-1)) \arrow[d, "R^{f-1}t_*(m_P(-1))"'] \arrow[dr, "d_m"] & \\ \overset{f}{\wedge} F \otimes R^{f-1}t_*(\mathcal{O}_P(-f)) \arrow[r, "\sim"] & R^{f-1}t_*(\overset{f}{\wedge} F_P(-1)) \arrow[r, "d_{\mathrm{Id}_F}"'] & t_*\mathcal{O}_P \simeq \mathcal{O}_Y \end{tikzcd} \quad f \neq 0$$

Ce lemme se déduit du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "m"] \arrow[dr, "m"'] & F \\ & F \arrow[u, Rightarrow, "\mathrm{Id}_F"'] \end{tikzcd}$$

Remarque.- Le complexe $E_\bullet(m)$ ressemble déjà beaucoup à celui obtenu dans [3] par Eagon et Northcott.

En effet $R^{f-1} \overset{i}{\wedge} G_P(-1) \simeq \overset{i}{\wedge} G \otimes (\mathrm{Sym}^{i-f} F)^\vee \otimes \overset{f}{\wedge} F^\vee$ et le lemme 4 implique Coker $d_m = \mathcal{O}_Z$.

Considérons le morphisme de complexes

$$K_\bullet(n) \to \mathcal{O}_X$$

où $\mathcal{O}_X$ est un complexe concentré en degré zéro. Si on prend les hyper images directes de ce morphisme par t , on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} R^{f-1} t_* \overset{f}{\wedge} G_P(-1) & \xrightarrow{d_m} & t_*\mathcal{O}_P \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^1 t_*\mathcal{O}_X & \xrightarrow{0} & t_*\mathcal{O}_X \end{array}$$

et donc le lemme :

Lemme 5.- La projection $q : X \to Y$ se factorise par l'immersion $i : Z \to Y$ en un morphisme $s : X \to Z$ tel que le triangle suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "s"'] & Y \\ & Z \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd} .$$

Rappelons qu'on dit que X est localement intersection complète de codimension g dans P si $H^i(K_\bullet(n)) = 0$ pour $i \neq 0$.

Lemme 6.- Supposons que X soit localement intersection complète de codimension g dans P , on a alors les propriétés suivantes :

a) $t_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Z$ et $R^i t_*\mathcal{O}_X = 0$ si $i \neq 0$.

b) $H^0(E_\bullet(m)) \simeq \mathcal{O}_Z$ et $H^i(E_\bullet(m)) = 0$ si $i \neq 0$.

C'est la fonctorialité des $R^i t_*$ car le morphisme de complexes $K_\bullet(n) \to \mathcal{O}_X$ induisant un isomorphisme en homologie, le morphisme $R^i t_* K_\bullet(n) \to R^i t_*\mathcal{O}_X$ aussi.

Lemme 7 (Indépendance de la présentation de Coker $m = Q$).- Supposons qu'on ait un carré commutatif de $\mathcal{O}_Y$ modules localement libres de rang constant

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{m} & F \\ a\downarrow & & \downarrow b \\ G' & \xrightarrow{m'} & F' \end{array}$$

tel que

- les flèches verticales soient surjectives ;
- le morphisme $\mathrm{Ker}\ a \to \mathrm{Ker}\ b$ soit un isomorphisme.

Alors, l'homomorphisme de complexes $E_\bullet(m) \to E_\bullet(m')$ induit un isomorphisme en homologie.

COROLLAIRE.- Supposons $g \geq f$; soit y un point de Y. On a les séries d'équivalences suivantes :

a) Il existe un entier i, tel que $f-g-1 \leq i \leq 0$ et $H^i(E_\bullet(m)\otimes k(y)) = 0$

$\Leftrightarrow$ $m(y)$ est surjective

$\Leftrightarrow$ il n'y a pas de point de X au-dessus de y.

b) $\dim_{k(y)} H^{f-g-1}(E_\bullet(m)\otimes k(y)) = 1$

$\Leftrightarrow$ ou bien $\dim_{k(y)} \mathrm{Coker}\ m(y) = 1$ ou bien $f = g$ et $y \in Z$.

c) $\dim_{k(y)} \mathrm{Coker}\ m(y) = 1$

$\Leftrightarrow$ $y \in Z$ et $s : X \to Z$ est un isomorphisme au voisinage de y.

Dans ce cas Z est défini par $g - f + 1$ équations au voisinage de y.

2.2. La question de savoir si Z est Cohen-Macaulay

DÉFINITION (Macaulay !).- Un $\mathcal{O}_Y$ module M est dit parfait s'il existe une suite exacte

$$0 \to K_i \to K_{i-1} \to \ldots \to K_1 \to K_o \to M \to 0$$

où les K_i sont des $\mathcal{O}_Y$ modules localement libres de rang fini, telle que la suite duale

$$0 \to K_o^\vee \to K_1^\vee \to \ldots \to K_{i-1}^\vee \to K_i^\vee$$

soit aussi exacte.

M est de torsion, l'entier i est parfaitement déterminé, on l'appellera la dimension projective de M.

Lemme 8.- Supposons $g \geq f$ et que $\mathcal{O}_Z$ soit un $\mathcal{O}_Y$ module parfait de dimension projective $g - f + 1$. Alors :

a) $E_{\bullet}(m)$ fournit une résolution projective de $\mathcal{O}_Z$.

b) Si Y est de Cohen-Macaulay, Z aussi.

c) Si z est un point de Z et si Y est Gorenstein en z, alors Z est Gorenstein en z si et seulement si, ou bien, $f = g$, ou bien, $\dim_{k(z)}(\mathrm{Coker}\ m^{\vee}(z)) = 1$. Dans tous les cas Z est une intersection complète en z.

Exemple 1.- Soient Y, G, F comme précédemment. Posons $\underline{Y} = \mathbf{A}(G \otimes_{\mathcal{O}_Y} F^{\vee})$. On a un homomorphisme canonique $\underline{m} : \underline{G} \to \underline{F}$, les $\mathcal{O}_Y$ homomorphismes $m : G \to F$ correspondent biunivoquement par image réciproque aux sections φ de la projection $\underline{Y} \to Y$. Faisant les constructions précédentes, on trouve que $\underline{P} \simeq \mathbf{P}(F) \times_Y \underline{Y}$ et que $\underline{X}$ est défini par des équations homogènes de bidegré $(1,1)$. De plus, $\underline{X}$ est localement intersection complète de codimension g dans $\underline{P}$. Par le lemme 6, on déduit que $H^i(E_{\bullet}(\underline{m})) = 0$ pour $i \neq 0$. $E_{\bullet}(m)$ étant obtenu par spécialisation, on a

COROLLAIRE.- Pour tout entier i, $H^i(E_{\bullet}(m))$ est un $\mathcal{O}_Z$ module.

Remarque.- Le complexe obtenu par Eagon et Northcott dans [3] est le cas particulier de $E_{\bullet}(\underline{m})$ où $Y = \mathrm{Spec}(k)$ est un point.

On voit donc que dans l'anneau $S = k[X_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,f\\ j=1,\dots,g}}$, avec $f \geq g$, l'idéal J_g engendré par les g mineurs de la matrice $\emptyset = (X_{ij})$ est tel que S/J_g soit de Cohen-Macaulay de codimension $(f-g+1)$. Il n'y a pas longtemps, on ne savait pas encore si S/J_i, où J_i est l'idéal de S engendré par les i mineurs de $\emptyset$, qui est de codimension $(f-i+1)(g-i+1)$, était de Cohen-Macaulay. Il semblerait que Eagon et Hochster l'aient montré dans [2]. En tout cas, on a maintenant le résultat plus général suivant dû à D. Laksov pour la partie Cohen-Macaulay.

THÉORÈME 2 ([6], [8]).- Soient k un corps, n et g deux entiers naturels, $a_1,\dots,a_d$ une suite croissante d'entiers naturels, telle que $a_d \leq n$. Soit $\sigma_{\underline{a}}$ un cycle de Schubert dans $\mathrm{Grass}_g(k^n)$ correspondant à un drapeau de nationalité $(a_1,\dots,a_d)$. Alors l'idéal gradué $J_{\underline{a}}$, qui définit $\sigma_{\underline{a}}$ pour le plongement de Plücker, est tel que l'anneau $k[X_1,\dots,X_{\binom{n}{g}}]/J_{\underline{a}}$ soit

- intègre ;
- lisse en codimension un ;
- Cohen-Macaulay (donc normal) ;
- de codimension $(\Sigma\, a_i - \frac{d(d+1)}{2} + 1)$.

Igusa dans [4] avait montré ce résultat pour les grassmanniennes. Malheureusement, à ma connaissance, il n'y a pas encore de résolution projective naturelle de $J_{\underline{a}}$. Revenons à nos moutons.

PROPOSITION 1.- Supposons que Y soit lisse, quasi-projective, réduite, irréductible sur un corps algébriquement clos k et que g soit supérieur ou égal à f. Alors, si la codimension de Z dans Y est au moins $g-f+1$, le cycle de Z dans l'anneau de Chow modulo équivalence-rationnelle est égal à la $(g-f+1)$-ième classe de Chern de $\mathrm{Coker}(m^\vee)$.

De par la fonctorialité des classes de Chern, on peut se réduire au cas "générique" de l'exemple 1. Alors $\underline{Y}$, $\underline{X}$ et $\underline{P}$ sont quasi-projectives et lisses. Dans ce cas, $\underline{s}$ envoie birationnellement chaque composante connexe de X sur une composante connexe de Z, et donc $\mathrm{Cycle}(Z) = t_*(\mathrm{Cycle}(X))$.

a) Calculs dans l'anneau de Chow de $\underline{P}$:

(i) $\mathrm{Cycle}(\underline{X})$ = g-ième classe de Chern de $\underline{G}^\vee_{\underline{P}}(+1)$ = coefficient de t^g dans $t^*(c(\underline{G}^\vee))/c(\mathcal{O}_{\underline{P}}(-1))$.

(ii) Si h est la 1ère classe de Chern de $\mathcal{O}_{\underline{P}}(1)$

$$t^*(c(F^\vee))/c(\mathcal{O}_{\underline{P}}(-1)) = t^*(c(F^\vee)) \cdot \sum_{n=0}^{g-1} h^n t^n .$$

b) Calculs dans l'anneau de Chow de $\underline{Y}$:

On a $\quad t_*h^n = 0 \quad$ si $0 \leq n < f-1$, et $\qquad t_* h^{f-1} = 1$.

Appliquant la formule de projection à (ii), on trouve :

$$c(F^\vee) \cdot t_*(1/c(\mathcal{O}_{\underline{P}}(-1))) = t^{g-1} .$$

Si on applique la formule de projection à (i), on obtient le résultat cherché.

2.3. Etude infinitésimale de $s : X \to Z$

Dans ce paragraphe, les points seront rationnels sur k algébriquement clos, et les schémas de type fini sur k. On garde les notations du début de 2.

Soient y un point de Y et m_y le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_Y$ des fonctions qui s'annulent en y. La suite exacte

$$0 \to m_y/m_y^2 \to \mathcal{O}_{Y,y}/m_y^2 \to k(y) \to 0$$

donne lieu à un homomorphisme :

$$D_y : \mathrm{Ker}(m^\vee(y)) \to \mathrm{Coker}(m^\vee(y)) \otimes_k m_y/m_y^2 .$$

Si x est un point de X et $z = s(x) \in Z$, on désignera par $\underline{x}$ l'élément de $\mathrm{Ker}(m^\vee(z)) = Q^\vee(z)$ correspondant x par l'égalité $X_z = \mathbb{P}(Q(z))$.

Pour tout schéma S et s un point de S, on désignera par $T_s(S)$ l'espace tangent de Zariski de S en s. On a une suite exacte de k-espaces vectoriels :

$$0 \to T_x(X_z) \to T_x(X) \to T_z(Y) .$$

Lemme 9.-

$$\dim_k \text{Image}\ (T_x(X)) = \dim_k T_z(Y) - \text{rang}\ D_z(\underline{x}) .$$

On entend par rang $D_z(\underline{x})$, le rang de l'homomorphisme de k-espaces vectoriels

$$(m_y/m_y^2)^\vee \to \mathrm{Coker}(m^\vee(z))$$

qui s'en déduit.

Lemme 10.- Supposons que Y soit lisse de dimension n. Soit x un point de X, $z = s(x) \in Z$; les énoncés suivants sont équivalents :

a) X est lisse de dimension $n-1+f-g$ en x ;

b) l'espace tangent en x à X est de dimension $n-1+f-g$;

c) $D_z(\underline{x})$ est de rang égal à $\dim_{k(z)}(\mathrm{Ker}\ m^\vee(z))$;

d) l'accouplement $\mathrm{Ker}(m^\vee(z)) \otimes \mathrm{Coker}(m^\vee(z))^\vee \to m_z/m_z^2$, déduit de D_z, est un accouplement régulier.

Ce lemme se déduit du précédent après qu'on ait remarqué que X_z est un espace projectif de rang égal à $\dim_{k(z)}(\mathrm{Ker}\, m^{\vee}(z)) - 1$.

PROPOSITION 2.- Supposons $g \geq f$, Y lisse de type fini de dimension n sur un corps algébriquement clos k . Supposons que X soit lisse de dimension $n-1+f-g$ et irréductible. Alors Z est irréductible, lisse en codimension un, Cohen-Macaulay, de dimension $n-1+f-g$, de plus, le morphisme $s : X \to Z$ est birationnel.

Cette proposition est la somme des lemmes précédents de la section 2.

2.4. Un exemple instructif

Exemple 2.- Soient k un corps algébriquement clos, U , V , W trois k-espaces vectoriels de dimension finie u , v , w . Soit $R : U \to V^{\vee} \otimes_k W$ un k-homomorphisme tel que l'accouplement $U \times V \to W$ qui s'en déduit soit régulier. Notons $Y = \mathbb{A}_k(W)$ et $m : U_Y \to V_Y^{\vee}$ l'homomorphisme de $\mathcal{O}_Y$ modules déduit de R . D'après la proposition 2 et le lemme 10, on voit que le schéma X correspondant est lisse et que X est un fibré vectoriel de rang $w-u$ sur $\mathbb{P}(V)$. Supposons $u \geq v$, alors le schéma Z correspondant est irréductible, rationnel, lisse en codimension un, Cohen-Macaulay, de dimension $w-1+v-u$. Notons $Y' = \mathbb{P}_k(W)$ et X' , Z' les schémas correspondants à $m' : U_{Y'}(-1) \to V_{Y'}^{\vee}$.

Lemme 11.- La multiplicité de Z' dans Y' est égale au coefficient binomial $\binom{u}{v-1}$.

En effet, soit $m' : U_{\mathbb{P}(W)}(-1) \to V^{\vee}_{\mathbb{P}(W)}$ le $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}$ homomorphisme déduit de R qui définit Z' . D'après la proposition 1 $\mathrm{Cycle}(Z')$ est égal à la $(u-v+1)$-ième classe de Chern de $U_{\mathbb{P}(W)}(1)$, i.e. au coefficient de h^{u-v+1} dans $(1+h)^u$ où h est la classe d'une section hyperplane.

Lemme 12.- Soient U , V , W des espaces vectoriels de dimension u , v , w sur un corps k algébriquement clos, et $U \times V \xrightarrow{a} W$ un accouplement régulier. Alors $w \geq u+v-1$.

Considérons le cône K défini par l'image de $U \times V$ dans $U \otimes V$ dans $\mathbb{A}(U \otimes V)$; il est de dimension $u+v-1$; dire que a est régulier, c'est dire que le cône défini par le noyau de $U \otimes V \to W$ ne rencontre K qu'à l'origine. Le résultat n'est donc que la formule des codimensions d'intersection.

Remarque.- Si on applique le lemme 12 et le lemme 3, on trouve le théorème de Clifford, à savoir : supposons $d - r < g$, alors, si $\mathbb{G}_d^r(k)$ n'est pas vide, $2r \leq d$.

PROPOSITION 3.- Gardons les hypothèses de la proposition 2. Soit z un point de Z ; alors, le cône tangent de Z en z est le cône défini dans l'espace tangent de Y en z par l'image de l'accouplement régulier induit par D_z .

$$\mathrm{Ker}(m^{\vee}(z)) \times \mathrm{Coker}(m^{\vee}(z))^{\vee} \to m_z/m_z^2 .$$

Soit K le cône défini ainsi par D_z ; le cône tangent T de Z en z est contenu dans K . Le cône tangent T de Z en z est de dimension $n - 1 + f - g$ d'après la proposition 2. D'autre part, on vient de voir que K est de dimension $n - 1 + \dim \mathrm{Ker}(m^{\vee}(z)) - \dim \mathrm{Coker}(m^{\vee}(z))^{\vee} = n - 1 + f - g$. Comme T et K sont tous deux irréductibles, on a montré la proposition.

Le théorème 1 se déduit de la prop. 2, de la prop. 3 et du lemme 11, en prenant $Y = \mathbb{P}_d$ et, F et G comme dans le lemme 1.

3. Appliquer le théorème de Kempf

3.1. Si $d = g - 1$, $\mathbb{G}_{g-1}^{o}$ est le diviseur thêta ; on obtient le théorème suivant dû à Riemann : la multiplicité du zéro du diviseur thêta en un point de la jacobienne est égale à la dimension d'un système linéaire complet de degré un de moins que le genre de C . [9]

3.2. Riemann a aussi montré que, si $2(d - 1) \geq g$ et $d - 1 < g$, G_d^1 n'est pas vide. Kleiman et Laksov, dans [7], montrent qu'en général si $(r + 1)(d - r) \geq rg$ et si $d - r < g$, G_d^r n'est pas vide. Pour ceci, ils utilisent le théorème de Kempf, qui dit, en particulier, que $\alpha : \mathbb{P}_d \to \mathrm{Grass}_g(H)$ est génériquement transversal à chaque cycle spécial de Schubert qui correspond aux $\mathbb{G}_d^o$.

3.2. Si C est lisse, hyperelliptique, alors, si $g \geq 3$, $\mathbb{G}_2^o$ a une singularité unique correspondant à un g_2^1 . La variété projective correspondant au cône tangent en ce point correspond à l'image de la courbe dans $\mathbb{P}(H^o(C , \omega_C))$. Cette courbe est lisse, rationnelle, de degré $(g-1)$. Il y a $(g-1)(g-2)/2$ quadriques linéairement indépendantes qui s'annulent sur cette courbe.

3.4. Si C est lisse, non hyperelliptique, $g \geq 4$, alors $\mathbb{G}_3^0$ a une singularité unique correspondant au g_3^0 . La variété projective associée au cône tangent de $\mathbb{G}_3^0$ en ce point correspond à une surface rationnelle, réglée de degré $(g-2)(g-3)/2$. Il y a $(g-2)(g-3)/2$ quadriques linéairement indépendantes qui s'annulent sur cette surface. Par le théorème de Noether, ce sont les seules quadriques qui s'annulent sur l'image de la courbe dans $\mathbb{P}(H^0(C, \omega_C))$. [1]

3.5. Soit F un polynôme irréductible, homogène de degré $d \geq 6$, en 3 variables, qui définissent une courbe lisse dans $\mathbb{P}_k^2$. Le cône tangent à $\mathbb{G}_d^0$ au point correspondant au g_d^2 fourni par la situation est le cône défini par l'accouplement régulier $A_i \times A_{d-4} \to A_{d-3}$, où A_i désigne l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré i en 3 variables.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ANDREOTTI and A. L. MAYER - On period relations for abelian integrals on curves, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Series 3, vol. 21 (1967), p. 189-238.

[2] J. A. EAGON and M. HOCHSTER - A class of perfect determinantal ideals, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 5, n° 5, sept. 1970.

[3] J. A. EAGON and D. G. NORTHCOTT - Ideals defined by the minors of a matrix.

[4] J. I. IGUSA - On the arithmetical normality of the Grassmann variety, Proc. Nat. Acad. Sci., vol. 40 (1954).

[5] G. KEMPF - The singularities of certain varietis in the Jacobian of a Curve, Thèse Columbia Univ., 1971.

[6] J.-L. KLEIMAN - Geometry on Grassmannians ..., Publ. Math. I. H. E. S., Paris, n° 36 (1969).

[7] J.-L. KLEIMAN, D. LAKSOV - On the existence of special divisors, à paraître

[8] D. LAKSOV - Concerning the arithmetical Cohen-Macaulay of Schubert schemes, à paraître.

[9] G. F. B. RIEMANN - Gesamelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass, 2d édition, Dover, New York.