ALAIN ROBERT

Formes automorphes sur GL_2

Séminaire N. Bourbaki, 1973, exp. n° 415, p. 295-318
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1971-1972__14__295_0>

FORMES AUTOMORPHES SUR GL_2

(Travaux de H.Jacquet et R.P.Langlands)

par Alain ROBERT

Le problème étudié par Jacquet et Langlands dans [J-L], se rattache de très près au suivant. Soit G le groupe unimodulaire réel $SL_2(\mathbb{R})$ et Γ son sous-groupe discret $SL_2(\mathbb{Z})$ formé des matrices à coefficients entiers. La représentation régulière gauche de G dans l'espace $L^2(G/\Gamma)$ des fonctions (complexes) de carré sommable sur le quotient G/Γ pour une mesure invariante sur cet espace homogène (déduite d'une mesure de Haar de G) est unitaire et se décompose comme suit. Puisque G/Γ est de volume fini, la représentation unité de G intervient une fois (dans le sous-espace formé par les fonctions constantes sur G/Γ) et

$$L^2(G/\Gamma) = \mathbb{C} \oplus \int_{\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}} H_s \, ds \oplus {}^oL^2(G/\Gamma) \quad ,$$

avec une partie continue isomorphe à l'intégrale hilbertienne sur la série principale de G (pour la mesure de Lebesgue), et une partie discrète avec multiplicités finies dans le sous-espace invariant fermé des formes paraboliques ${}^oL^2(G/\Gamma)$ défini par les "équations intégrales"

$$\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} f(g\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}) \, du = 0 \quad \text{pour tout } g \in G \quad .$$

La question est de savoir <u>quelles représentations unitaires irréductibles de</u> G (on les connaît toutes) <u>interviennent effectivement dans cette partie discrète</u> (et <u>quelles sont les multiplicités</u> ?). Ce problème se pose naturellement aussi si l'on remplace Γ par un sous-groupe de congruence principal Γ_N, correspondant à un revêtement $G/\Gamma_N \longrightarrow G/\Gamma$ et donc à une inclusion $L^2(G/\Gamma) \longrightarrow L^2(G/\Gamma_N)$ préservant les sous-espaces de formes paraboliques. Pour traiter simultanément tous ces groupes, il convient de passer à la limite $N \to \infty$. Or $\varprojlim G/\Gamma_N = SL_2(\mathbb{A})/SL_2(\mathbb{Q})$, où $\mathbb{A}$ désigne l'anneau localement compact des adèles de $\mathbb{Q}$; par conséquent le complété de l'espace de préhilbert réunion des $L^2(G/\Gamma_N)$ s'identifie à l'espace $L^2(SL_2(\mathbb{A})/SL_2(\mathbb{Q}))$. Il s'impose alors de décomposer la représentation régulière de $SL_2(\mathbb{A}) \supset G$ dans cet espace, et particulièrement dans le sous-espace ${}^0L^2$ formé des formes paraboliques définies par

$$\int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} F(g\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\, du = 0 \quad \text{pour tout } g \in SL_2(\mathbb{A}) \quad ,$$

qui se décompose à nouveau discrètement avec multiplicités finies (sous $SL_2(\mathbb{A})$) .

Pour des raisons techniques, Jacquet et Langlands considèrent GL_2 au lieu de SL_2 et nous adopterons leur point de vue, de sorte que désormais l'abbréviation G désignera GL_2 (au lieu de $SL_2(\mathbb{R})$ comme ci-dessus) . Il est guère plus difficile de traiter le cas plus général d'un corps de nombres k ou d'un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini (corps globaux) au lieu du corps des rationnels $\mathbb{Q}$. Nous nous placerons ainsi comme [J-L] dans le cas d'un corps global qui a un anneau d'adèles $\mathbb{A} = \mathbb{A}_k$ et on examine la représentation régulière droite (sic) de $G_{\mathbb{A}} = GL_2(\mathbb{A})$ dans ${}^0L^2(G_k\backslash G_{\mathbb{A}}, \omega)$ (avec un caractère fixé ω sur le centre, trivial sur $k^{\times}$). Dans ce cas, [J-L] prouve que <u>les multiplicités des représentations unitaires irréductibles de $G_{\mathbb{A}}$ qui interviennent effectivement dans la décomposition de cet espace de formes paraboliques sont toute égales à</u> 1. Un résultat principal dudit article étant <u>un critère</u>, à l'aide de fonctions zêta (et L) <u>pour qu'une représentation donnée de $G_{\mathbb{A}}$ apparaisse dans la décomposition</u> de ${}^0L^2(G_k\backslash G_{\mathbb{A}}, \omega)$. Nous énoncerons ce critère après l'introduction des facteurs locaux associés aux représentations irréductibles des groupes p-adiques $G_{\mathfrak{p}} = GL_2(k_{\mathfrak{p}})$. Les sections suivantes donnent des applications. Etant donné l'ampleur du mémoire [J-L], le lecteur ne sera pas étonné de ne pas trouver de démonstrations dans le résumé de résultats qui suit !

1. Représentations admissibles de GL_2 sur un corps p-adique.

Soit G un groupe localement compact totalement discontinu, V un espace vectoriel sur un corps k. Une représentation π de G dans V est dite admissible lorsque l'action $\pi : G \times V \longrightarrow V$ qu'elle définit est continue pour la topologie discrète sur V, et que pour tout sous-groupe ouvert (donc fermé) $H \subset G$, le sous-espace V_H de V formé des vecteurs laissés fixes par tous les opérateurs $\pi(h)$ $(h \in H)$ est de dimension finie : $V = \bigcup V_H$. Un opérateur qui commute à tous les opérateurs d'une représentation admissible irréductible doit laisser les sous-espaces V_H invariants, donc avoir une valeur propre, et être une homothétie si k est algébriquement clos (lemme de Schur). En particulier, dans une représentation admissible irréductible (sur un corps k algébriquement clos), les opérateurs $\pi(c)$ correspondant à des éléments du centre C de G doivent être scalaires, et π induit un homomorphisme $C \longrightarrow k^\times$. Un exemple de représentation admissible est fourni par la représentation naturelle de $G = \mathrm{Gal}(\bar{k}_{sep}/k)$ dans l'espace vectoriel $V = \bar{k}_{sep}$ (clôture séparable de k) sur k. Par la suite, nous ne considérerons que le cas $k = \mathbb{C}$ (et omettrons en conséquence de préciser chaque fois qu'il s'agit de représentations complexes).

Soit K un corps local de caractéristique résiduelle p. C'est un corps localement compact dont la topologie peut être définie à l'aide d'une valeur absolue, le module d'un élément $a \in K^\times$ étant défini à l'aide d'une mesure de Haar quelconque dx sur le groupe abélien localement compact K par $d(ax) = |a|dx$. Comme on sait, l'anneau R des entiers de K, défini par $|a| \leqslant 1$, est local, d'idéal maximal P, défini par $|a| < 1$ (c'est un idéal principal). Le quotient R/P est un corps de caractéristique p, donc ayant pour nombre d'éléments q une puissance de p. On suppose fixé un caractère additif de base $\psi \neq 1$ de K de sorte qu'on peut identifier K à son dual de Pontryagin à l'aide de ψ. L'orthogonal de R dans cette identification (relativement à ψ) est un sous-groupe ouvert compact de la forme P^{-d}, et nous supposerons le caractère de base choisi de façon que son ordre, l'entier $d = d(\psi)$ soit positif : $d \geqslant 0$. Ce choix étant fait, il convient de normaliser la mesure de Haar additive sur K de façon que la transformation de Fourier soit une opération unitaire (mesure autoduale pour ψ) . Cette normalisation est donnée par le volume $q^{-d/2} = \int_R dx$ pour le sous groupe ouvert compact R.

Un premier résultat de [J-L] consiste en une classification complète de toutes les représentations admissibles irréductibles de $GL_2(K)$. D'abord, il est facile de voir qu'une telle représentation, si de dimension finie, est de dimension un et de la forme $g \mapsto \chi(\det g)$ avec un quasi-caractère (ou caractère généralisé) $\chi : K^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$. Il s'agit donc de considérer les représentations de dimension infinie. Pour cela, introduisons l'espace $\underline{W}_\psi$ de toutes les fonctions sur le groupe $G = GL_2(K)$ ayant la propriété de transformation

(1) $$W(\begin{pmatrix} 1 & u \\ o & 1 \end{pmatrix} g) = \psi(u)W(g) \qquad (u \in K \ , \ g \in G) \quad ,$$

espace qu'on considère comme espace de représentation de G à l'aide des translations à droite (représentation non admissible).

Théorème 1. Toute représentation admissible irréductible de dimension infinie π de G est équivalente à une sous-représentation unique $\underline{W}_\psi(\pi)$ de $\underline{W}_\psi$ induite sur un sous-espace invariant irréductible formé de fonctions localement constantes sur G .

Le sous-espace $\underline{W}_\psi(\pi)$ muni de la représentation définie par les translations à droite sera appelé modèle de Whittaker de π . Si pour $W \in \underline{W}_\psi(\pi)$ on pose $f_W(a) = W\begin{pmatrix} a & o \\ o & 1 \end{pmatrix}$, on obtient un espace de fonctions sur le groupe multiplicatif $K^\times$ du corps, appelé modèle de Kirillov de π . Il a les propriétés caractéristiques données par le théorème suivant.

Théorème 2. Toute représentation admissible irréductible de dimension infinie π de G est équivalente à une représentation (unique) agissant dans un espace de fonctions localement constantes sur $K^\times$ nulles en dehors d'un compact de K et satisfaisant

(2) $$\pi\begin{pmatrix} a & b \\ o & 1 \end{pmatrix} f(x) = \psi(bx)\, f(ax) \qquad (a \in K^{\times},\ b \in K)\ .$$

De plus cet espace $\mathcal{K}_{\psi}(\pi)$ contient le sous-espace $C_c^{\infty}(K^{\times})$ des fonctions localement constantes à support compact dans $K^{\times}$ avec une codimension inférieure ou égale à 2 .

Inversément, on passe du modèle de Kirillov au modèle de Whittaker en posant $W_f(g) = \pi(g)\, f(1)$. La classification des représentations admissibles irréductibles de dimension infinie s'effectue alors comme suit. La représentation π est dite

a) supercuspidale lorsque $\mathcal{K}_{\psi}(\pi) = C_c^{\infty}(K^{\times})$ (codimension nulle) ,

b) spéciale lorsque la codimension vaut 1 ,

c) dans la série principale lorsque la codimension vaut 2 .

On remarquera que dans cette terminologie, il n'y a pas lieu de distinguer entre représentations de la série principale et supplémentaire (à ce niveau elles jouent toutes le même rôle puisqu'on admet des représentations non unitaires) . De plus la relation (2) montre que si l'on connaît le quasi-caractère donné par π sur le centre et l'espace $\mathcal{K}_{\psi}(\pi)$, la représentation sera complètement déterminée par la connaissance du seul opérateur $\pi\begin{pmatrix} o & 1 \\ -1 & o \end{pmatrix}$ (en effet G est engendré par les matrices triangulaires supérieures et cette matrice $w = \begin{pmatrix} o & 1 \\ -1 & o \end{pmatrix}$ dite de Weyl) .

Chaque représentation admissible π a une contragrédiente $\check{\pi}$ admissible définie par $\check{\pi}(g) = {}^t\pi(g^{-1})$ dans l'espace $V(\check{\pi})$ formé des vecteurs $\check{v} \in V(\pi)^*$ (formes linéaires sur $V(\pi)$) stabilisés par un sous-groupe ouvert de G. En d'autres termes, $V(\check{\pi})$ est l'espace somme (non directe) des duals des V_H :

$$V(\pi) = \bigcup V_H = \sum V_H \quad \text{et} \quad V(\check{\pi}) = \sum V_H^* \qquad (\dim(V_H) = \dim(V_H^*) < \infty)\ .$$

On dit qu'une représentation admissible irréductible π de G est dans la série discrète (ou est de carré intégrable) lorsque les intégrales

$$\int \langle \pi(g)v, \check{v}\rangle \langle v, \check{\pi}(g)\check{v}\rangle\, dg \qquad (v \in V(\pi)\ ,\ \check{v} \in V(\check{\pi})\ )$$

sont absolument convergentes sur G modulo son centre. Pour une représentation π de la série discrète, il existe une constante d_{π} (dépendant de la mesure dg sur G) appelée dimension formelle de π, telle que

$$\int \langle \pi(g)v,\check{v}\rangle\langle v,\check{\pi}(g)\check{v}\rangle\, dg = \langle v,\check{v}\rangle^2/d_\pi \qquad (v \in V\ ,\ \check{v} \in \check{V})\ .$$

Théorème 3. Les représentations de la série discrète de G sont les représentations supercuspidales et les représentations spéciales. Pour toute représentation admissible π, sa contragrédiente $\check{\pi}$ est équivalente à $\pi \otimes \omega_\pi^{-1}$ où ω_π est le quasi-caractère induit par π sur le centre, considéré comme représentation $g \longmapsto \omega_\pi(\det g)$ de G .

La série discrète de G peut se construire à partir des représentations irréductibles du groupe multiplicatif $D^\times$ de l'algèbre à division D de dimension 4 sur K (cette algèbre de quaternions sur K est déterminée à un isomorphisme près). Notons simplement N et T les norme et trace réduites de D sur K, $x \longmapsto \bar{x}$ l'anti-automorphisme involutif de D sur K et $F \longmapsto \hat{F}$ la transformation de Fourier

$$\hat{F}(y) = \int_D F(x)\overline{\psi_D(yx)}\, dx \qquad (y \in D)\quad ,$$

en prenant $\psi_D = \psi \circ T$ pour caractère de base , et pour dx, la mesure autoduale relativement à ce caractère : $F(0) = \int_D \hat{F}(y)\, dy$. Le module $|a|_D$ d'un élément $a \in D^\times$ est défini de la façon usuelle par $d(ax) = |a|_D dx$. Il existe alors une représentation π de $SL_2(K)$ dans l'espace $C_c^\infty(D)$ des fonctions (complexes) localement constantes et à support compact sur D avec

a) $\pi\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}F(x) = |a|_D^{1/2} F(ax) \qquad , \qquad (a \in K^\times)\ ,$

b) $\pi\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1\end{pmatrix}F(x) = \psi(b\,N(x))\, F(x) \qquad , \qquad (u \in K)\ ,$

c) $\pi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}F(x) = F'(x) = -\hat{F}(-\bar{x}) \qquad .$

Cette représentation est réductible, mais soit $\underline{d}$ une représentation irréductible de $D^\times$ dans un espace $V = V(\underline{d})$ (nécessairement de dimension finie car $D^\times$ modulo son centre $K^\times$ est compact), et étendons la représentation précédente aux fonctions vectorielles $C_c^\infty(D,V) = C_c^\infty(D) \otimes V$ trivialement sur le second facteur. Notons $\underline{d}^1$ la restriction de $\underline{d}$ au sous-groupe compact $D^1 = \{k \in D\ :\ k\bar{k} = N(k) = 1\}$ et regardons le sous-espace invariant (de π)

$$C_c^\infty(D,\underline{d}^1) = \{F \in C_c^\infty(D,V) \ : \ F(xk) = \underline{d}(k)^{-1}F(x) \ , \ k \in D^1\} \ .$$

<u>Dans ce sous-espace invariant</u>, <u>la représentation</u> π <u>de</u> $SL_2(K)$ <u>se prolonge en une représentation</u> $\pi_{\underline{d}}$ <u>de</u> $GL_2(K)$ <u>à l'aide de la formule</u>

$$\text{d)} \quad \pi_{\underline{d}}\begin{pmatrix} y\bar{y} & o \\ o & 1 \end{pmatrix} F(x) = |y|_D^{1/2}\,\underline{d}(y)F(xy) \qquad , \qquad (y \in D^\times) \ .$$

Puisque D contient toute extension quadratique séparable de K (à isomorphisme près) tout élément $a \in K^\times$ est norme d'un élément y de $D^\times$, défini à un élément de D^1 près, de sorte que $\pi_{\underline{d}}$ est bien définie ($GL_2(K)$ est engendré par des matrices des formes ci-dessus, et il s'agit de voir que les opérateurs que nous venons de définir satisfont bien aux relations de définition liant ces matrices entre elles).

<u>Théorème 4</u>. <u>La représentation</u> $\pi_{\underline{d}}$ <u>ainsi construite est admissible et se décompose en somme directe de</u> $d = \dim(\underline{d})$ <u>représentations irréductibles équivalentes</u> $\pi(\underline{d})$ <u>de</u> G. <u>Lorsque</u> $d = 1$ <u>la représentation obtenue est spéciale</u>, <u>tandis que si</u> $d > 1$, $\pi(\underline{d})$ <u>est supercuspidale</u>. <u>On obtient de cette manière toutes les représentations de la série discrète de</u> G (<u>types</u> a) <u>et</u> b) <u>ci-dessus</u>).

Les représentations admissibles de G fournissent naturellement des représentations de l'algèbre de Hecke $C_c^\infty(G)$ (pour le produit de convolution) si l'on pose

$$\pi(f) = \int_G \pi(g)f(g)\,dg \qquad (\text{intégrale faible, } f \in C_c^\infty(G)\ ) \ .$$

Il résulte même de la définition d'admissibilité que les opérateurs ainsi définis sont de rang fini, et ont donc une trace. <u>Le caractère de</u> π <u>est par définition la distribution</u> χ_π <u>sur</u> G <u>définie par</u> $\langle \chi_\pi, f\rangle = \mathrm{Tr}\,\pi(f)$. On dénotera alors par G' la partie ouverte dense des éléments <u>réguliers</u> de G (ceux qui ont des valeurs propres distinctes). Un élément régulier $g \in G'$ engendre dans $M = M_2(K)$, soit l'anneau des matrices diagonales, soit une extension quadratique séparable L de K dont le groupe multiplicatif $L^\times \subset G$ peut être considéré comme sous-groupe de Cartan elliptique (ou anisotrope) de G. On notera encore $L' = L \cap G'$ l'ensemble des éléments réguliers de L , et pour toute extension quadratique séparable L de K on choisit des isomorphismes de L dans M et D . D'après le théorème de Skolem-Noether, ces plongements sont définis à des automorphismes intérieurs près.

Théorème 5. Si π est une représentation de la série discrète de G , son caractère distribution est donné par une fonction centrale localement constante sur l'ensemble des éléments réguliers G' de G , et localement intégrable sur G :

$$\langle \chi_\pi , f \rangle = \mathrm{Tr}\ \pi(f) = \int_G \chi_\pi(g) f(g)\, dg \quad .$$

De plus, si $\pi = \pi(\underline{d})$ est construite par le procédé précédent à partir d'une représentation irréductible $\underline{d}$ de $D^\times$, la valeur de χ_π sur les éléments réguliers des sous-groupes de Cartan elliptiques est opposée de la valeur du caractère $\chi_{\underline{d}}$ de la représentation $\underline{d}$ sur les éléments correspondants :

$$\chi_\pi(b) = -\chi_{\underline{d}}(b) \quad \text{si } b \in L' \quad , L/K \text{ quadratique séparable} \quad .$$

Comme les deux caractères sont des fonctions centrales, leurs valeurs $\chi_\pi(b)$ et $\chi_{\underline{d}}(b)$ sont bien définies, indépendamment des isomorphismes de L dans M et D choisis. Les caractères de la série discrète vérifient encore des relations d'orthonormalité que nous ne détaillons pas faute de place, et pour lesquelles nous renvoyons au texte de Jacquet et Langlands. Normalisons néanmoins simultanément les mesures additives de D et M en requiérant qu'elles soient autoduales par rapport aux caractères respectifs $\psi_D = \psi \circ T$ et $\psi_M = \psi \circ \det$. Choisissons à partir de là les mesures $|N(x)|_K^{-2} dx$ sur $D^\times$ et $|\det(x)|_K^{-2} dx$ sur G . Alors les dimensions formelles de $\underline{d}$ et $\pi(\underline{d})$ sont égales pour ces choix de mesures : $d_{\underline{d}} = d_{\pi(\underline{d})}$, donc égales à $\dim(\underline{d})$ si le caractère de base ψ est choisi judicieusement. (Plus précisément, [J-L] ne démontre l'égalité précédente que lorsque $\pi(\underline{d})$ est supercuspidale, soit lorsque $\dim(\underline{d}) > 1$, en constatant qu'il serait tout de même surprenant que cette égalité ne soit pas valable pour les représentations spéciales aussi ; ce dernier cas doit résulter des travaux récents de A.Borel sur les représentations spéciales des groupes de Chevalley.)

La série principale (ainsi que les représentations spéciales) peut s'obtenir par le procédé d'induction à partir d'un quasi-caractère du groupe triangulaire supérieur. Soient donc μ et ν deux quasi-caractères de $K^\times$ et $\pi_{\mu,\nu}$ la représentation (admissible) régulière droite de G dans l'espace des fonctions localement constantes sur G satisfaisant la loi de transformation

(3) $\quad f(\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & b \end{pmatrix} g) = \mu(a)\nu(b)|a/b|^{\frac{1}{2}} f(g) \qquad (a,b \in K^\times \, , \, x \in K \, , \, g \in G)$.

Alors $\pi_{\mu,\nu}$ est irréductible lorsque $\mu/\nu \neq |\ldots|^{\pm 1}$ et fournit une représentation aussi notée $\pi(\mu,\nu)$, de la série principale de G . Lorsqu'au contraire $\mu/\nu = |\ldots|$, elle admet un sous-espace invariant irréductible de codimension un sur lequel la représentation $\pi_{\mu,\nu}$ induit une représentation $\pi(\mu,\nu)$ spéciale. Finalement, si $\mu/\nu = |\ldots|^{-1}$, elle admet un sous-espace invariant de dimension un, et la représentation $\pi(\mu,\nu)$ induite sur le quotient est irréductible et spéciale.

Théorème 6. Les représentations $\pi(\mu,\nu)$ de G construites de cette manière fournissent toutes les représentations spéciales et de la série principale (lorsque μ et ν parcourent l'ensemble des quasi-caractères de $K^\times$) de G. On a les équivalences (et les seules) $\pi(\mu,\nu) \cong \pi(\nu,\mu)$, tandis que la contragrédiente de $\pi(\mu,\nu)$ est équivalente à $\pi(\mu^{-1},\nu^{-1})$.

Indiquons peut-être que dans l'espace défini par (3), et si $\mu/\nu = |\ldots|$, le sous-espace de codimension un sur lequel la représentation spéciale $\pi(\mu,\nu)$ agit est défini par

$$\int_K f(w^{-1}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \, dx = 0 \qquad ,$$

tandis que si $\mu/\nu = |\ldots|^{-1}$, le sous-espace de dimension un engendré par la fonction $g \longmapsto \mu(\det g)|\det g|^{\frac{1}{2}}$ est invariant pour les translations à droite.

2. Facteurs locaux associés aux représentations de GL_2 .

Rappelons d'abord brièvement les définitions et propriétés des facteurs locaux associés aux quasi-caractères de $GL_1(K) = K^\times$ (Thèse de Tate [C-F] ou [S.L]). Si ω est un quasi-caractère $K^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ de la forme $\chi|...|^s$ (décomposition non univoque avec χ unitaire et s complexe), on définit pour toute $f \in C_c^\infty(K)$ la fonction zêta (ou L)

$$L_f(\omega) = L_f(\chi,s) = \int_{K^\times} f(a)\omega(a)d^\times a = \int_{K^\times} f(a)\chi(a)|a|^s d^\times a \ .$$

Cette intégrale converge absolument dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$, se prolonge en une fonction méromorphe de s avec l'équation fonctionnelle

$$L_{\hat{f}}(\hat{\omega}) = \gamma(\omega)L_f(\omega) \quad \text{où} \quad \hat{\omega}(a) = \bar{\chi}(a)|a|^{1-s} = |a|\omega(a)^{-1}$$

($\hat{f}$ dénote bien entendu la transformée de Fourier de f) avec une fonction méromorphe $\gamma(\omega) = \gamma(\chi,s)$ indépendante de f ($\gamma = \rho^{-1}$ avec les notations de Tate ou Lang, tandis que Godement utilise dans [G] un facteur γ qui serait notre $\chi(-1)\gamma$). On introduit alors le facteur eulérien

$$L(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \text{ est ramifié (i.e. } \chi \text{ ramifié)} \\ (1-\omega(\pi))^{-1} = (1-\chi(\pi)q^{-s})^{-1} \text{ sinon (où } P = \pi R) \ . \end{cases}$$

Il existe pour chaque χ une fonction $f_0 \in C_c^\infty(K)$ avec $L_{f_0}(\chi,s) = L(\chi,s)$ et ce facteur contient tous les pôles de $L_f(\chi,s)$:

$$L_f(\chi,s)/L(\chi,s) \text{ est entière en s pour toute } f \in C_c^\infty(K) \ .$$

De plus, on a les équations fonctionnelles

$$L_{\hat{f}}(\hat{\omega})/L(\hat{\omega}) = \varepsilon(\omega)L_f(\omega)/L(\omega) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(\omega) = \varepsilon(\chi,s) = \gamma(\omega)L(\omega)/L(\hat{\omega}) \ .$$

Ce facteur ε est une fonction entière sans zéro (= γ si ω est ramifié). Plus précisément, cette fonction est une exponentielle de la forme

$$\varepsilon(\chi,s) = \varepsilon(\chi)\cdot q^{(d+f)(\frac{1}{2}-s)} \ , \tag{4}$$

où $d = d(\psi) \geqslant 0$ est l'ordre du caractère additif ψ fixé, $f = f(\chi) \geqslant 0$ est l'exposant du conducteur de χ (égal au plus petit entier $f \geqslant 1$ tel que χ est trivial sur $1+P^f$ si χ est ramifié) et $\varepsilon(\chi)$ est une racine de l'unité, = 1 si χ est non ramifié et donnée par une somme de Gauss si χ est ramifié. En particulier, on voit que ε dépend de ψ et vaut identiquement 1 lorsque χ est non ramifié ($f = 0$) et lorsque ψ est d'ordre nul ($d = 0$).

On peut alors passer au cas de GL_2. Nous désignerons toujours par π une représentation admissible irréductible de $G = GL_2(K)$ où K est un corps local p-adique (et les normalisations de la section 1 sont encore en vigueur en ce qui concerne la transformée de Fourier pour la mesure autoduale relativement à ψ sur K). De façon générale, si $\chi : K^\times \to \mathbb{C}^\times$ est un quasi-caractère, on l'identifie à la représentation (admissible) $g \mapsto \chi(\det g)$ de dimension un de G, et on note par conséquent $\pi\otimes\chi$ la représentation $g \mapsto \chi(\det g)\pi(g)$ de G dans $V(\pi)$. On définit alors les fonctions zêta (légèrement décalées)

(5) $$L'_f(\chi,s) = \int_{K^\times} f(a)\chi(a)|a|^{s-\frac{1}{2}}d^\times a = \int_{K^\times} W\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\chi(a)|a|^{s-\frac{1}{2}}d^\times a = L''_W(\chi,s)$$

pour chaque $f\in\mathcal{K}(\pi)$ et $W = W_f \in \underline{W}(\pi)$ (noter que f n'est plus nécessairement localement constante sur K de sorte que ces fonctions ne coïncident pas avec celles définies sur GL_1). Ces intégrales convergent dans un demi-plan $\mathrm{Re}(s) > s_0$ et se prolongent en fonctions méromorphes avec des équations fonctionnelles. Il suffirait d'ailleurs de considérer le cas $\chi = 1$ car $W \in \underline{W}(\pi)$ implique $W\cdot\chi \in \underline{W}(\pi\otimes\chi)$ (et il s'agirait de remplacer π par $\pi\otimes\chi^{-1}$), et par abus, nous omettrons les ' et " pour simplifier les notations. Appelons de façon générale <u>facteur eulérien</u> (local) une fonction de s de la forme $1/P(q^{-s})$ avec un polynôme P de terme constant normalisé $P(0) = 1$ (dont le degré est appelé <u>degré du facteur eulérien</u>). Alors, il existe un facteur eulérien unique $L_\pi(\chi,s) = 1/P_\chi(q^{-s})$ de degré dépendant de χ plus petit ou égal à la codimension de $C_c^\infty(K^\times)$ dans $\mathcal{K}(\pi)$ avec les <u>propriétés caractéristiques</u>

a) $L_W(\chi,s)/L_\pi(\chi,s)$ <u>est entière en</u> s <u>pour toute</u> $W\in\underline{W}(\pi)$ <u>et tout</u> χ,

b) <u>Pour chaque caractère</u> χ <u>il existe une</u> $W^0\in\underline{W}(\pi)$ <u>avec</u> $L_{W^0}(\chi,s) = L_\pi(\chi,s)$.

De plus, si W' dénote la translatée à droite de W par $w = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ (correspondant à $f' = \pi(w)f \in \mathcal{K}(\pi)$, et si ω_π dénote le quasi-caractère induit par π sur le centre de G , on a <u>les équations fonctionnelles</u>

c) $L_{W'}(\bar{\chi}/\omega_\pi, 1-s)/L_{\check{\pi}}(\bar{\chi}/\omega_\pi, 1-s) = \varepsilon_\pi(\chi,s)\cdot L_W(\chi,s)/L_\pi(\chi,s)$

avec un facteur local $\varepsilon_\pi(\chi,s)$ qui est une fonction entière de s (prendre $W = W^o$ comme ci-dessus) de type exponentiel. Ce facteur local dépend de ψ (bien que les facteurs eulériens L_π n'en dépendent pas) et nous devrions le noter $\varepsilon_\pi^\psi(\chi,s)$; cependant, cette dépendance ne joue pas de rôle ici. On remarquera qu'il résulte aisément des définitions que $L_\pi(\chi,s) = L_{\pi\otimes\chi}(1,s) = L_{\pi\otimes\chi\otimes|\ldots|^s}(1,0)$ et de même $\varepsilon_\pi(\chi,s) = \varepsilon_{\pi\otimes\chi}(1,s) = \varepsilon_{\pi\otimes\chi\otimes|\ldots|^s}(1,0)$ que nous pourrions donc noter resp. $L(\pi\otimes\chi\otimes|\ldots|^s)$, $\varepsilon(\pi\otimes\chi\otimes|\ldots|^s)$. Pour rendre l'analogie avec le cas GL_1 encore plus frappante, il est mieux d'utiliser une notation intermédiaire, à savoir $L(\pi\otimes\chi, s)$ et $\varepsilon(\pi\otimes\chi, s)$ où on peut d'ailleurs se limiter au cas $\chi = 1$ (en remplaçant π par $\pi\otimes\bar{\chi}$). Nous noterons aussi $L(W,s)$ au lieu de $L_W(1,s)$. L'équation fonctionnelle ci-dessus pour $\chi = 1$ s'écrit alors, compte tenu de l'équivalence $\check{\pi} \cong \pi\otimes\omega_\pi^{-1}$

(6) $$L(W'\omega_\pi^{-1}, 1-s)/L(\check{\pi}, 1-s) = \varepsilon(\pi,s)\cdot L(W,s)/L(\pi,s)$$

(noter que $W \in \underline{W}(\pi)$ implique bien $W'\omega_\pi^{-1} \in \underline{W}(\check{\pi})$). On peut alors énoncer un résultat.

<u>Théorème 7</u>. <u>Deux représentations (admissibles irréductibles)</u> π_1 <u>et</u> π_2 <u>induisant le même quasi-caractère</u> ω <u>sur le centre</u> $K^\times$ <u>de</u> G <u>sont équivalentes exactement lorsque les fonctions</u> $\varepsilon_{\pi_i}(\chi,s)\cdot L_{\check{\pi}_i}(\bar{\chi},1-s)/L_{\pi_i}(\chi,s)$ <u>de</u> s <u>coïncident pour</u> $i = 1,2$ <u>(pour tout caractère</u> χ <u>de</u> $K^\times$) .

En particulier, les facteurs $L_\pi(\chi,s)$ et $\varepsilon_\pi(\chi,s)$ <u>caractérisent</u> π univoquement parmi les représentations induisant le quasi-caractère ω sur le centre (se rappeler de l'équivalence $\check{\pi} \cong \pi\otimes\omega_\pi^{-1}$). Ces facteurs locaux sont donnés comme suit pour les représentations non supercuspidales.

Théorème 8. Si $\pi = \pi(\mu,\nu)$ est dans la série principale, on a

$L(\pi,s) = L(\mu,s)L(\nu,s)$ (facteur eulérien de degré $\leqslant 2$), $\varepsilon(\pi,s) = \varepsilon(\mu,s)\varepsilon(\nu,s)$ avec dans les second membres, les facteurs locaux de Tate pour GL_1 ; en particulier $\varepsilon(\pi,s) = 1$ lorsque μ et ν sont non ramifiés et $d = d(\psi) = 0$. Lorsque $\pi = \pi(\mu,\nu)$ est spéciale avec $\mu = \chi|\ldots|^{\frac{1}{2}}$ et $\nu = \chi|\ldots|^{-\frac{1}{2}}$ on a

$$L(\pi,s) = L(\mu,s) \text{ (de degré } \leqslant 1) , \quad \varepsilon(\pi,s) = \varepsilon(\mu,s)\varepsilon(\nu,s)E(\mu,\nu,s) ,$$

avec

$$E(\mu,\nu,s) = L(\mu^{-1},1-s)/L(\nu,s) = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi \text{ est ramifié} , \\ -\nu(\pi)q^{-s} = -\chi(\pi)q^{\frac{1}{2}-s} & \text{sinon} . \end{cases}$$

(Le lecteur ne confondra probablement pas la représentation π avec le générateur aussi noté π de $P \subset R \subset K$ ... ni d'ailleurs avec le nombre $\pi = 3{,}14\ldots$!)

Appelons sphérique une représentation (admissible irréductible) qui possède un vecteur fixé par le sous-groupe (ouvert) compact maximal $GL_2(R)$ de G. Dans une représentation sphérique, l'espace des vecteurs fixés par $GL_2(R)$ est toujours de dimension 1 .

Théorème 9. Les représentations sphériques de G sont les représentations $\pi(\mu,\nu)$ de la série principale avec deux caractères μ et ν non ramifiés. Si π est sphérique, et si le caractère de base ψ est d'ordre nul, $d(\psi) = 0$, alors il existe une seule fonction W^{o} dans le modèle de Whittaker $\underline{W}_{\psi}(\pi)$ invariante à droite par $GL_2(R)$ et telle que $W^{o}(e) = 1$. Pour cette fonction on a

$$L(W^{o},s) = L(\pi,s) \text{ et } \varepsilon(\pi,s) \equiv 1 .$$

Comme les représentations supercuspidales se construisent à l'aide de représentations associées à l'algèbre de quaternions D sur K, on peut comparer leurs facteurs locaux. Plus précisément, si $\underline{d}$ est une représentation irréductible de $D^{\times}$ dans un espace $V(\underline{d})$ (de dimension finie), on considère les fonctions zêta à valeurs opérateurs

(7) $$Z_f(\underline{d},s) = Z_f(\underline{d}\otimes|\ldots|_K^{s+\frac{1}{2}}) = \int_{D^{\times}} f(a)\underline{d}(a)|N(a)|_K^{s+\frac{1}{2}}d^{\times}a \quad \text{(intégrale faible)}$$

pour chaque $f \in C_c^\infty(D)$. Ces intégrales convergent pour $\mathrm{Re}(s)$ suffisamment grand, se prolongent en fonctions méromorphes de s, et il existe des facteurs eulériens $L(\underline{d},s)$ de degré $\leqslant 1$ univoquement déterminés par les propriétés correspondantes à celles indiquées ci-dessus pour GL_2 , et un facteur scalaire $\varepsilon(\underline{d},s) = \varepsilon^{\psi}(\underline{d},s)$ de type exponentiel donnant des équations fonctionnelles

$$Z_{f'}(\check{\underline{d}},1-s)/L(\check{\underline{d}},1-s) = -\,\varepsilon(\underline{d},s)\cdot Z_f(\underline{d},s)/L(\underline{d},s) \tag{8}$$

avec la transformée de Fourier $f'(y) = \hat{f}(-y) = \int_D f(x)\psi_D(xy)dx$ de f . Lorsque $\underline{d}$ est de dimension >1 , le facteur eulérien $L(\underline{d},s) \equiv 1$ est de degré 0 .

Théorème 10. Soit $\underline{d}$ une représentation irréductible du groupe multiplicatif $D^\times$ de l'algèbre de quaternions D sur K dans l'espace $V(\underline{d})$ et $\pi(\underline{d})$ la représentation de la série discrète de G qui lui correspond. On a

$$L(\pi(\underline{d}),s) = L(\underline{d},s) \ , \ L(\widecheck{\pi(\underline{d})},s) = L(\check{\underline{d}},s) \text{ et } \varepsilon(\pi(\underline{d}),s) = \varepsilon(\underline{d},s) \ .$$

On en tire $\pi(\check{\underline{d}}) = \widecheck{\pi(\underline{d})}$ et $\pi(\underline{d}\otimes\chi) = \pi(\underline{d})\otimes\chi$ où le quasi-caractère $\chi : K^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ est identifié à la représentation $\chi\circ N$ de $D^\times$ dans la notation $\underline{d}\otimes\chi$. (Notons explicitement que ce résultat est encore valable pour les représentations spéciales $\pi(\underline{d})$ associées aux quasi-caractères $\underline{d}$ de $D^\times$.)

Mentionnons sans entrer dans le détail, que des facteurs analogues $L(\pi,s)$ et $\varepsilon(\pi,s)$ peuvent être définis similairement sur les corps archimédiens $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Dans ces cas, les facteurs L sont des produits de fonctions gamma et d'exponentielles tandis que les facteurs ε sont indépendants de s (le lecteur est renvoyé à [J-L] ou à [G], ce dernier contenant une expression un peu plus explicite p 2.29).

3. Théorie globale.

L'idée de base exploitée par Jacquet et Langlands consiste à remarquer que la transformée de Mellin

$$M_f(s) = \Gamma(s)^{-1}\int_0^{\infty} f(iy)(2\pi y)^s d^{\times}y = \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}$$

d'une forme automorphe holomorphe parabolique (donc périodique de période 1 tendant vers 0 à l'infini sur les bandes verticales)

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 1} a_n e^{2\pi i n z}$$

est une fonction ayant un comportement semblable aux fonctions zeta sous la transformation $s \longmapsto 1 - s$ ou $k - s$ qui correspond à l'inversion $w(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}(z) = -1/z$ du demi-plan de Poincaré (cette idée avait déjà été systématiquement étudiée pas Hecke). Si on désire que cette fonction zêta $M_f(s)$ puisse s'exprimer sous forme de produit infini (eulérien), on sait qu'il faut supposer que f est fonction propre des opérateurs de Hecke. En sortant du cadre holomorphe, et dans le formalisme adélique, on est conduit à faire les calculs (semi formels) suivants.

Soit k un corps global (un corps de nombres ou un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini) $\mathbb{A} = \mathbb{A}_k$ son anneau d'adèles (c'est un anneau localement compact dans lequel k se plonge discrètement avec quotient $\mathbb{A}/k$ compact). On regarde la représentation régulière droite de $G_{\mathbb{A}} = GL_2(\mathbb{A})$ dans l'espace $L^2(G_k\backslash G_{\mathbb{A}})$ des fonctions de carré sommable sur le quotient de $G_{\mathbb{A}}$ par le sous-groupe discret $G_k = GL_2(k)$. Cette représentation se décompose d'abord en somme hilbertienne "continue" $\int^{\oplus} L^2(G_k\backslash G_{\mathbb{A}}, \omega)d\omega$ selon les caractères ω du centre $\mathbb{A}^{\times}$ de $G_{\mathbb{A}}$ (triviaux sur $k^{\times}$). Le sous-espace des formes paraboliques ${}^{0}L^2(G_k\backslash G_{\mathbb{A}}, \omega)$ défini par

$$\int_{k\backslash\mathbb{A}} f(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}g)du = 0 \qquad (g \in G_{\mathbb{A}}) \quad ,$$

est invariant par la représentation régulière droite de $G_{\mathbb{A}}$ et se décompose en somme de représentations irréductibles (inéquivalentes d'après ce qui suit) de la forme $\pi = \widehat{\otimes}\, \pi_{\mathfrak{p}}$ induisant sur le centre $\mathbb{A}^{\times}$ précisément le caractère $\omega = \widehat{\otimes}\, \omega_{\mathfrak{p}}$ trivial sur $k^{\times}$, avec des représentations admissibles irréductibles $\pi_{\mathfrak{p}}$ des groupes $G_{\mathfrak{p}} = GL_2(k_{\mathfrak{p}})$. Pour qu'un tel produit tensoriel infini puisse être défini, il faut que toutes les $\pi_{\mathfrak{p}}$ sauf un nombre fini (au plus) soient sphériques (le lecteur intéressé par le détail de ces notions pourra se reporter à [J-L], [G] ou [S-T]). Donc presque toutes les $\pi_{\mathfrak{p}}$ sont dans la série principale $\pi(\mu_{\mathfrak{p}}, \nu_{\mathfrak{p}})$ avec deux caractères $\mu_{\mathfrak{p}}$ et $\nu_{\mathfrak{p}}$ non ramifiés. Pour simplifier (et éviter la discussion des places archimédiennes) nous supposerons maintenant que k est un corps de fonctions (de caractéristique $p \neq 0$). Prenons une fonction $F \in {}^{o}L^2(G_k \backslash G_{\mathbb{A}}, \omega)$ dans la composante irréductible équivalente à π et invariante par un sous-groupe ouvert de $G_{\mathbb{A}}$ (pour les translations à droite). Ces fonctions engendrent (vectoriel-topologiquement) l'espace en question. Plus brièvement, nous dirons que F est une forme parabolique (de type π). Puisque le terme "constant" de la série de Fourier de $u \longmapsto F(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g)$ s'annule par définition, il s'impose de calculer les autres coefficients. Fixons un caractère additif ψ non trivial de $\mathbb{A}/k$: tout autre caractère est donc de la forme $x \longmapsto \psi(\gamma x)$ avec $\gamma \in k$. Alors

$$F_{\gamma}(g) = \int_{k\backslash\mathbb{A}} F(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g)\overline{\psi(\gamma u)}\,du = \int_{k\backslash\mathbb{A}} F(\begin{pmatrix} 1 & \gamma^{-1}u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g)\overline{\psi(u)}\,du \quad .$$

Mais $\begin{pmatrix} 1 & \gamma^{-1}u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de sorte que $F_{\gamma}(g) = F_1(\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g)$, et tous les coefficients de Fourier se calculent à partir du premier F_1 . La série de Fourier en question s'écrit ainsi

$$F(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g) = \sum_{k^{\times}} F_1(\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g)\psi(\gamma u) \tag{9}$$

(convergence vers F car cette fonction est localement constante). En particulier, pour u = e, on obtient

$$F(g) = \sum_{\gamma \in k^{\times}} F_1(\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g) \tag{10}$$

qui montre que F est déterminée par F_1 . Cette fonction F_1 sur le groupe est dans une composante algébriquement irréductible $\underline{W}_\psi(\pi)$ équivalente à π pour la représentation régulière droite de $G_{\mathbb{A}}$ dans l'espace $\underline{W}_\psi$ des fonctions W sur le groupe se transformant selon

$$W(\begin{pmatrix} 1 & u \\ o & 1 \end{pmatrix} g) = \psi(u)W(g) \qquad (u \in \mathbb{A}\ ,\ g \in G_{\mathbb{A}})\ .$$

On a donc $F_1 \in \underline{W}_\psi(\pi) \subset \underline{W}_\psi$ et les notations sont judicieuses car l'unicité des modèles de Whittaker locaux montre que <u>le sous-espace $\underline{W}_\psi(\pi)$ est lui aussi déterminé univoquement par</u> π. D'ailleurs cet espace est isomorphe à $\bigotimes_{\mathfrak{p}} \underline{W}_{\psi_{\mathfrak{p}}}(\pi_{\mathfrak{p}})$ en tant que $G_{\mathbb{A}}$-module : c'est de ce résultat que provient la multiplicité 1 de π dans l'espace ${}^{o}L^2$ des formes paraboliques. Le théorème de Riemann-Roch pour k permet de voir sur la formule (10) que F est nulle en dehors d'une partie compacte de $G_k \backslash G_{\mathbb{A}} / \mathbb{A}^\times$ et que cette série n'a - sur tout ouvert suffisamment petit de $G_{\mathbb{A}}$ - qu'un nombre fini de termes non nuls. (Si k était un corps de nombres, la situation serait plus délicate : F serait seulement à décroissance rapide sur le quotient $G_k \backslash G_{\mathbb{A}} / \mathbb{A}^\times$.)

Inversément, prenons une fonction $W \in \underline{W}_\psi(\pi)$ où $\pi \cong \otimes \pi_{\mathfrak{p}}$ est une représentation (admissible irréductible) de $G_{\mathbb{A}}$ induisant le caractère ω sur le centre $\mathbb{A}^\times$ et trivial sur $k^\times$. Supposons que la série $\sum_{\gamma \in k^\times} W(\begin{pmatrix} \gamma & o \\ o & 1 \end{pmatrix} g)$ converge (nous procédons à des calculs formels). Sa somme $F_W = F_W(g)$ sera invariante à gauche par le groupe triangulaire (supérieur) rationnel P_k ; seule vérification :

$$F_W(\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ o & 1 \end{pmatrix} g) = \sum W(\begin{pmatrix} \gamma & o \\ o & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ o & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma^{-1} & o \\ o & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & o \\ o & 1 \end{pmatrix} g) =$$

$$= \sum \psi(\gamma\xi) W(\begin{pmatrix} \gamma & o \\ o & 1 \end{pmatrix} g) = F_W(g) \qquad (\xi \in k)\ ,$$

car P_k est engendré par les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & o \\ o & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \alpha & o \\ o & \alpha \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ o & 1 \end{pmatrix} \qquad (\alpha \in k^\times,\ \xi \in k)\ .$$

La décomposition de Bruhat $G_k = P_k \cup P_k w P_k$ avec $w = \begin{pmatrix} o & 1 \\ -1 & o \end{pmatrix}$ montre que F_W sera invariante (à gauche) par G_k dès que

(11) $$F_W(wg) = F_W(g) \qquad (g \in G_{\mathbb{A}})$$

(oui, tout est là...). Nous désirons exprimer cette condition sur W. Pour cela, effectuons une transformation de Laplace-Mellin le long du tore déployé

(12) $$\int_{k^\times\backslash\mathbb{A}^\times} F_W(w\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}g)\chi(a)d^\times a = \int_{k^\times\backslash\mathbb{A}^\times} F_W(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}g)\chi(a)d^\times a$$

(où χ parcourt l'ensemble des quasi-caractères de $\mathbb{A}^\times$ triviaux sur $k^\times$). Dans le membre de gauche, on utilise

$$w\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = w\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}w^{-1}w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix}w = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}w \quad ,$$

et on trouve l'intégrale

$$\int F_W(\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}wg)\omega(a)\chi(a)d^\times a = \int F_W(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}wg)(\omega\chi)^{-1}(a)d^\times a \quad .$$

Revenant à la définition de F_W par sa série de Fourier (10) à l'aide de $F_1 = W$, et utilisant $\int_{k^\times\backslash\mathbb{A}^\times}\sum_{k^\times} \ldots = \int_{\mathbb{A}^\times} \ldots$, on trouve que la condition (11) est équivalente à

(13) $$\int_{\mathbb{A}^\times} W(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}wg)\bar{\chi}/\omega\,(a)|a|_{\mathbb{A}}^{-s}\,d^\times a = \int_{\mathbb{A}^\times} W(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}g)\chi(a)|a|_{\mathbb{A}}^{s}\,d^\times a$$

pour tout quasi-caractère de la forme $\chi|\ldots|^s$ (avec χ unitaire et s complexe). Comme des relations analogues doivent être valables pour toutes les $W \in \underline{W}_\psi(\pi)$ et que cet espace est stable par les translations à droite, il suffit de considérer le cas $g = e$ (remplacer W par la translatée par g^{-1} à droite). Remplaçons encore $W\cdot\chi$ par W (ce qui revient encore à changer π en $\pi\otimes\bar{\chi}$ qui apparaît aussi dans ${}^0L^2$), et notant $W'(g) = W(gw)$, on obtient

(14) $$L(W'\omega^{-1},1-s) = L(W,s) \text{ pour toute } W \in \underline{W}_\psi(\pi) \quad (s \in \mathbb{C}) \quad ,$$

avec la définition

(15) $$L(W,s) = \int_{\mathbb{A}^\times} W\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}|a|_{\mathbb{A}}^{s-\frac{1}{2}}\,d^\times a = \int_{k^\times\backslash\mathbb{A}^\times}\sum_{k^\times}\ldots = \int_{k^\times\backslash\mathbb{A}^\times} F_W\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}|a|_{\mathbb{A}}^{s-\frac{1}{2}}\,d^\times a \quad .$$

Puisque F_W est à support compact (mod G_k à gauche, et le centre), on voit que cette fonction est <u>entière</u> en s . Finalement, on peut prendre W de la forme $\bigotimes_{\mathfrak{p}} W_{\mathfrak{p}}$ avec $W_{\mathfrak{p}} \in \underline{W}_{\psi_{\mathfrak{p}}}(\pi_{\mathfrak{p}})$ et $W_{\mathfrak{p}} = W_{\mathfrak{p}}^0$ pour presque toute place $\mathfrak{p}$, de façon à obtenir un produit eulérien pour la transformée de Mellin L(W,s) :

(16) $$L(W,s) = \int_{\mathbb{A}^\times} \ldots = \prod_{\mathfrak{p}}\int_{k_{\mathfrak{p}}^\times} W_{\mathfrak{p}}\begin{pmatrix} a_{\mathfrak{p}} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}|a_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}}^{s-\frac{1}{2}}\,d^\times a_{\mathfrak{p}} = \prod_{\mathfrak{p}} L(W_{\mathfrak{p}}, s) \quad .$$

En utilisant les équations fonctionnelles locales satisfaites par les $L(W_{\mathfrak{y}}, s)$ (section 2) et nous souvenant que $L(W^{o}_{\mathfrak{y}}, s) = L(\pi_{\mathfrak{y}}, s)$, $\varepsilon^{\psi_{\mathfrak{y}}}(\pi_{\mathfrak{y}}, s) = 1$ pour presque toute place $\mathfrak{y}$, on trouve alors la condition unique

$$(17) \qquad \prod_{\mathfrak{y}} L(\pi_{\mathfrak{y}}, s) = \varepsilon(\pi,s) \prod_{\mathfrak{y}} L(\check{\pi}_{\mathfrak{y}}, 1-s) \quad ,$$

avec un facteur $\varepsilon(\pi,s)$ défini par un produit <u>fini</u> $\varepsilon(\pi,s) = \prod \varepsilon^{\psi_{\mathfrak{y}}}(\pi_{\mathfrak{y}}, s)$ qui se révèle être indépendant du caractère additif de base ψ choisi sur $\mathbb{A}/k$ (c'est bien entendu la formule du produit $|\gamma|_{\mathbb{A}} = 1$ pour $\gamma \in k^{\times}$ qui donne cette indépendance).

<u>Théorème 11</u>. <u>Soit</u> $(\pi_{\mathfrak{y}})_{\mathfrak{y}}$ <u>une famille de représentations admissibles irréductibles unitaires</u> (i.e. <u>agissant de façon unitaire dans des espaces préhilbertiens</u>), <u>presque toutes sphériques</u>. <u>Alors on peut définir le facteur global</u> $L(\pi,s)$ <u>par un produit infini</u> $L(\pi,s) = \prod L(\pi_{\mathfrak{y}}, s)$ <u>convergeant dans un demi-plan</u> $Re(s) > s_0$, <u>et le facteur</u> $\varepsilon(\pi,s) = \prod \varepsilon^{\psi_{\mathfrak{y}}}(\pi_{\mathfrak{y}}, s)$ <u>est en fait un produit fini</u> <u>(presque tous ses facteurs sont identiquement</u> 1).

Les calculs qui précèdent visent à montrer que si π intervient dans la décomposition de ${}^{o}L^{2}$, son facteur $L(\pi,s)$ se prolonge en <u>fonction entière</u> de s avec une équation fonctionnelle $L(\pi,s) = \varepsilon(\pi,s)L(\check{\pi},1-s)$. Remplaçant π par $\pi\otimes\chi$ où χ est un caractère de $\mathbb{A}^{\times}$ trivial sur $k^{\times}$, on obtient aussi

$$(18) \qquad L_{\pi}(\chi,s) = \varepsilon_{\pi}(\chi,s)\cdot L_{\pi}(\bar{\chi}/\omega , 1-s)$$

pour ces représentations. Ces conditions sont suffisantes. De façon plus précise, on a le théorème suivant.

<u>Théorème 12</u>. <u>Supposons que</u> $\pi \cong \widehat{\bigotimes_{\mathfrak{y}}} \pi_{\mathfrak{y}}$ <u>est une représentation unitaire irréductible (décomposable) de</u> $G_{\mathbb{A}}$, <u>avec des représentations</u> $\pi_{\mathfrak{y}}$ <u>admissibles de dimension infinie de</u> $G_{\mathfrak{y}}$. <u>Si</u> π <u>induit un caractère</u> ω <u>sur le centre</u> $\mathbb{A}^{\times}$, <u>qui est trivial sur</u> $k^{\times}$, <u>alors, pour que</u> π <u>soit équivalente à une sous-représentation (unique) de</u> ${}^{o}L^{2}(G_k\backslash G_{\mathbb{A}}, \omega)$, <u>il faut et il suffit que</u>

a) $L_{\pi}(\chi,s) = \prod_{\mathfrak{y}} L_{\pi_{\mathfrak{y}}}(\chi_{\mathfrak{y}}, s)$ <u>se prolonge en fonction entière de</u> s, <u>bornée dans les bandes verticales si</u> $p = 0$, <u>pour tout</u>

caractère χ de $\mathbb{A}^\times/k^\times$, (rationnelle en q^{-s} si $\mathbb{F}_q \subset k$),

b) les équations fonctionnelles $L_\pi(\chi,s) = \varepsilon_\pi(\chi,s)\cdot L_{\pi}(\bar{\chi}/\omega\ ,1-s)$ aient lieu pour tout caractère χ de $\mathbb{A}^\times/k^\times$.

Dans ces deux théorèmes, le corps de base peut être aussi bien un corps de nombres qu'un corps de fonctions, à condition d'utiliser les valeurs des facteurs locaux pour les places archimédiennes (que nous n'avons pas données).

4. Applications.

Comme dans le numéro précédent, k est un corps global et $\mathbb{A}$ son anneau d'adèles. Supposons donnée tout d'abord une algèbre de quaternions D sur k (corps gauche de dimension 4 sur k). Alors $D_{\mathbb{A}} = D \otimes_k \mathbb{A}$ ($\cong \prod'_{\mathfrak{p}} D_{\mathfrak{p}}$ produit restreint des $D_{\mathfrak{p}} = D \otimes_k k_{\mathfrak{p}}$) est une algèbre dont le groupe d'unités $D_{\mathbb{A}}^\times$ est de façon naturelle un groupe localement compact contenant $D^\times$ comme sous-groupe discret, avec quotient $D^\times\backslash D_{\mathbb{A}}^\times$ compact modulo le centre $\mathbb{A}^\times$. La représentation régulière droite de $D_{\mathbb{A}}^\times$ dans $L^2(D^\times\backslash D_{\mathbb{A}}^\times)$ se décompose selon les caractères ω du centre $\mathbb{A}^\times$ (triviaux sur $k^\times$)

$$L^2(D^\times\backslash D_{\mathbb{A}}^\times) = \int^{\oplus} L^2(D^\times\backslash D_{\mathbb{A}}^\times, \omega)\,d\omega \quad .$$

Chaque espace $L^2(D^\times\backslash D_{\mathbb{A}}^\times, \omega)$ est maintenant somme directe hilbertienne de sous-espaces invariants fermés minimaux sur lesquels les translations à droite fournissent des représentations unitaires (topologiquement) irréductibles δ décomposables sous la forme $\widehat{\bigotimes_{\mathfrak{p}}} \delta_{\mathfrak{p}}$ avec des représentations admissibles irréductibles $\delta_{\mathfrak{p}}$ des $D_{\mathfrak{p}}^\times$. Or par définition du discriminant Δ de D sur k , on peut fixer des isomorphismes

$$\theta_{\mathfrak{p}} : G_{\mathfrak{p}} = GL_2(k_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{\sim} D_{\mathfrak{p}}^\times \quad \text{si } \mathfrak{p} \text{ ne divise pas } \Delta \quad .$$

Pour ces places $\mathfrak{p}$, on peut transporter les représentations $\delta_{\mathfrak{p}}$ à l'aide des $\theta_{\mathfrak{p}}$ et obtenir des représentations $\pi_{\mathfrak{p}} = \delta_{\mathfrak{p}}\circ\theta_{\mathfrak{p}}$ de $G_{\mathfrak{p}}$. Puisque tout automorphisme de $G_{\mathfrak{p}}$ est intérieur, $\pi_{\mathfrak{p}} = \pi_{\mathfrak{p}}(\delta_{\mathfrak{p}})$ est bien définie à équivalence près. Au contraire, lorsque $\mathfrak{p}$ divise le discriminant Δ, considérons la représentation irréductible $\pi_{\mathfrak{p}} = \pi_{\mathfrak{p}}(\delta_{\mathfrak{p}})$ construite dans la section 1 (à partir de la représentation irréductible de dimension finie $\delta_{\mathfrak{p}}$ de $D_{\mathfrak{p}}^{\times}$). (Il est vrai que nous n'avons pas expliqué cette correspondance pour les places archimédiennes, mais elle subsiste de façon essentiellement analogue.)

Théorème 13. Avec les notations ci-dessus, et si aucune des représentations $\delta_{\mathfrak{p}}$ pour $\mathfrak{p} \nmid \Delta$ n'est de dimension 1, $\pi = \pi(\delta) = \widehat{\otimes}\pi_{\mathfrak{p}}(\delta_{\mathfrak{p}})$ apparaît dans la décomposition de l'espace ${}^{0}L^{2}(G_k \backslash G_{\mathbb{A}}, \omega)$ des formes paraboliques sur $G_k \backslash G_{\mathbb{A}}$.

Cela résulte du critère global (Th.12) après identification des facteurs locaux $L(\pi_{\mathfrak{p}}, s) = L(\delta_{\mathfrak{p}}, s)$ car la formule de Poisson montre que les fonctions zêta globales d'une algèbre de quaternions D (associées aux représentations de $D_{\mathbb{A}}^{\times}$) satisfont des équations fonctionnelles du bon type. Noter que par la loi de produit d'Artin, D est ramifiée en un nombre pair de places, de sorte que les signes des équations fonctionnelles locales (8) (section 2) se compensent dans le produit global ! L'hypothèse signifie que les $\pi_{\mathfrak{p}} = \pi_{\mathfrak{p}}(\delta_{\mathfrak{p}})$ sont toutes de dimension infinie (et il semble qu'elle est satisfaite dès que δ n'est pas de la forme $x \longmapsto \chi(N(x))$ avec un caractère χ de $\mathbb{A}^{\times}/k^{\times}$).

Comme deuxième application, considérons une extension séparable L du corps global k et soit W(L/k) Le groupe de Weil correspondant. On a donc une suite exacte

$$(1) \longrightarrow L_{\mathbb{A}}^{\times}/L^{\times} \longrightarrow W(L/k) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/k) \longrightarrow (1) \quad .$$

Pour toute représentation complexe semi-simple σ de dimension 2 de W(L/k) , $\sigma : W(L/k) \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$, on essaie de définir une représentation admissible irréductible décomposable $\pi = \pi(\sigma) = \underset{\mathfrak{p}}{\otimes}\, \pi_{\mathfrak{p}}(\sigma_{\mathfrak{p}})$ de G_A . Dans ce but, prenons les localisées $\sigma_{\mathfrak{p}}$ de σ. Ce sont des représentations complexes des groupes de Weil locaux $W_{\mathfrak{p}}$,

$$(1) \longrightarrow L_{\mathfrak{q}} \longrightarrow W_{\mathfrak{p}} = W(L_{\mathfrak{q}}/k_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{q}}/k_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow (1)$$

(où $\mathfrak{q}$ divise $\mathfrak{p}$), auxquelles on sait associer des facteurs locaux L et ε (ces derniers étant presque tous égaux à 1) avec une équation fonctionnelle

$$L(\sigma_{\mathfrak{P}},s) = \varepsilon^{\psi_{\mathfrak{P}}}(\sigma_{\mathfrak{P}},s)L(\check{\sigma}_{\mathfrak{P}},1-s)$$

($\check{\sigma}_{\mathfrak{P}}$ est la contragrédiente de $\sigma_{\mathfrak{P}}$ et ψ est un caractère non trivial de $\mathbb{A}/k$). Lorsque $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ est non ramifié, $L(\sigma_{\mathfrak{p}},s)$ est de la forme $\det(1-\sigma_{\mathfrak{p}}(\varphi_{\mathfrak{p}})q_{\mathfrak{p}}^{-s})^{-1}$ où $q_{\mathfrak{p}} = N(\mathfrak{p})$ est la norme de $\mathfrak{p}$ et $\varphi_{\mathfrak{p}}$ est un relèvement du Frobenius $(\frac{L/k}{\mathfrak{p}})$ de L/k en $\mathfrak{p}$. Le produit infini $\prod_{\mathfrak{p}} L(\sigma_{\mathfrak{p}},s)$ converge dans un demi-plan $\mathrm{Re}(s) > s_0$, se prolonge en fonction méromorphe $L(\sigma,s)$ de s et on a une équation fonctionnelle

$$L(\sigma,s) = \varepsilon(\sigma,s)\, L(\check{\sigma},1-s) \quad ,$$

avec un facteur ε défini par un produit fini $\varepsilon(\sigma,s) = \prod_{\mathfrak{p}} \varepsilon^{\psi_{\mathfrak{p}}}(\sigma_{\mathfrak{p}},s)$ (indépendant du choix de ψ). La représentation $\pi_{\mathfrak{p}} = \pi_{\mathfrak{p}}(\sigma_{\mathfrak{p}})$, si elle existe, sera complètement déterminée par les conditions

$\pi_{\mathfrak{p}}$ induit sur le centre $k_{\mathfrak{p}}^{\times}$ le caractère $\det \sigma_{\mathfrak{p}}$,

$L(\pi_{\mathfrak{p}}\otimes\chi_{\mathfrak{p}},s) = L(\sigma_{\mathfrak{p}}\otimes\chi_{\mathfrak{p}},s)$, $L(\check{\pi}_{\mathfrak{p}}\otimes\bar{\chi}_{\mathfrak{p}},s) = L(\check{\sigma}_{\mathfrak{p}}\otimes\chi_{\mathfrak{p}},s)$,

et $\varepsilon^{\psi_{\mathfrak{p}}}(\pi_{\mathfrak{p}}\otimes\chi_{\mathfrak{p}},s) = \varepsilon^{\psi_{\mathfrak{p}}}(\sigma_{\mathfrak{p}}\otimes\chi_{\mathfrak{p}},s)$ pour tout caractère $\chi_{\mathfrak{p}}$ de $k_{\mathfrak{p}}^{\times}$ ($s \in \mathbb{C}$).

<u>Théorème 14</u>. <u>Avec les notations ci-dessus, si</u> $L(\pi\otimes\chi,s)$ <u>et</u> $L(\check{\pi}\otimes\bar{\chi},s)$ <u>sont des fonctions entières, bornées dans les bandes verticales lorsque</u> p = 0, <u>pour tout caractère</u> χ <u>de</u> $\mathbb{A}^{\times}$ <u>trivial sur</u> $k^{\times}$, <u>alors</u> $\pi_{\mathfrak{p}}(\sigma_{\mathfrak{p}})$ <u>existe pour toute place</u> $\mathfrak{p}$ <u>de</u> k <u>et</u> $\pi = \pi(\sigma) = \widehat{\bigotimes}\, \pi_{\mathfrak{p}}(\sigma_{\mathfrak{p}})$ <u>apparaît dans la décomposition de l'espace</u> ${}^{0}L^{2}(G_k\backslash G_{\mathbb{A}},\det\sigma)$ <u>des formes paraboliques sur</u> $G_k\backslash G_{\mathbb{A}}$.

Ce théorème résulte d'un raffinement du critère global (Th.12 avec des produits partiels $\prod_{\mathfrak{p}\notin S} \ldots$, S étant une partie finie de l'ensemble des places de k) conjugué avec une comparaison locale (Langlands : On the functional equation of the Artin L-functions, en préparation).

Finalement, soit E une courbe elliptique sur le corps global k de caractéristique p $\neq 0$ (on suppose que E n'est pas déduite par extension des scalaires à partir d'une courbe elliptique sur un corps fini). La fonction zêta de Hasse-Weil de E est définie par un produit infini $Z_E(s) = \prod_{\wp} Z_{\wp}(s)$, avec des facteurs locaux eulériens $Z_{\wp}(s)$ de degré $\leqslant 2$ obtenus en considérant les courbes $\widetilde{E}_{\wp}$ réduites de E mod $\wp$ définies sur les corps résiduels finis $k(\wp) = \mathbb{F}_q$ (avec $q = q_{\wp} = N(\wp) = \mathrm{Card}(R/P)$). Lorsque E a bonne réduction en $\wp$, i.e. lorsque $\widetilde{E}_{\wp}$ est encore une courbe elliptique sur $\mathbb{F}_q$, sa fonction zêta usuelle est de la forme

$$(1 - a_{\wp}q_{\wp}^{-s} + q_{\wp}^{1-2s})(1 - q_{\wp}^{-s})^{-1}(1 - q_{\wp}^{1-s})^{-1} .$$

Dans ce cas, par définition, $Z_{\wp}(s) = (1 - a_{\wp}q_{\wp}^{-s} + q_{\wp}^{1-2s})^{-1}$ (lorsque E a mauvaise réduction mod $\wp$, il faut considérer "le" modèle minimal de Néron de E pour définir le facteur $Z_{\wp}$ qui est eulérien de degré < 2). Posons $L(E,s) = Z_E(s + \frac{1}{2})$. Alors <u>il existe une représentation</u> (<u>admissible irréductible</u>) $\pi = \otimes\pi_{\wp}$ <u>de</u> $GL_2(\mathbb{A})$ <u>agissant dans l'espace des formes paraboliques</u> ${}^{o}L^2(G_k\backslash G_{\mathbb{A}}/\mathbb{A}^{\times})$ <u>avec</u>

$$L(\pi_{\wp} ,s) = Z_{\wp}(s + \tfrac{1}{2}) \quad \underline{\text{pour toute place}} \quad \wp ,$$

<u>et donc telle que</u> $L(\pi,s) = Z_E(s + \frac{1}{2}) = L(E,s)$ (Deligne-Langlands, cf.[W]). En particulier $\pi_{\wp} = \pi_{\wp}(\mu_{\wp}, \nu_{\wp})$ est dans la série principale lorsque E a bonne réduction mod $\wp$ avec des caractères $\mu_{\wp}$ et $\nu_{\wp}$ non ramifiés déterminés par

$$\nu_{\wp} = 1/\mu_{\wp} \;,\quad \mu_{\wp}(\pi_{\wp}) + 1/\mu_{\wp}(\pi_{\wp}) = a_{\wp}q_{\wp}^{-\frac{1}{2}} \qquad (P = \pi_{\wp}R \subset k_{\wp})$$

(les deux racines de cette equation quadratique permutent μ et ν donc conduisent à des représentations équivalentes). On peut rappeler que $a_{\wp}$ lui-même est déterminé par $1 - a_{\wp} + q_{\wp}$ = nombre de points rationnels sur $\mathbb{F}_{q_{\wp}}$ de la courbe projective $\widetilde{E}_{\wp}$. Weil (loc.cit.) conjecture, après l'avoir vérifié sur les courbes à multiplications complexes, $\widehat{H/\Gamma_0(11)}$, ... , que cette construction est encore possible lorsque k est un corps de nombres.

RÉFÉRENCES

[C-F] Cassels J.W.S., Fröhlich A. éd.: Algebraic Number Theory , Thompson Book Co., Inc. (Washington D.C.) 1967, 366p.

[G] Godement R. : Notes on Jacquet-Langlands' theory , The Institute for Advanced Study (Princeton N.J. 08540) 1970, 67 + 29 + 37 p . = 133 p.

[J-L] Jacquet H., Langlands R.P. : Automorphic forms on GL(2), Springer 1970, Lecture Notes 114, 2 lb. 3 oz., 548 p.

[L] Langlands R.P. : Euler Products, Yale University (Lux et Veritas) 1967 , 54 p.

[S-D] Serre J.-P., Deligne P. : Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures), Sém. Delange-Pisot-Poitou, 1969-70, 19-19 bis , 28 p .

[S.L] Lang S. : Algebraic Number Theory, Addison-Wesley Publ. Co., Inc. 1970, 354 p.

[S-T] Shalika J.A., Tanaka S. : On an explicit construction of a certain class of automorphic forms, Amer. J. Math. 91 (1969), 1049-1076 .

[W] Weil A. : Dirichlet Series and Automorphic Forms, Springer 1971, Lecture Notes 189, 164 p.