

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ANDRÉ HIRSCHOWITZ

Le groupe de Cremona

Séminaire N. Bourbaki, 1973, exp. n° 413, p. 261-276

http://www.numdam.org/item?id=SB_1971-1972__14__261_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

LE GROUPE DE CREMONA D'APRÈS DEMAZURE

par André HIRSCHOWITZ

0. Introduction

En première approximation, le groupe de Cremona à n variables est le groupe des \mathbb{C} -automorphismes de $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$. Ce groupe est bien trop gros pour être algébrique (voici, pour les sceptiques, une flopée d'automorphismes :

$(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2 + P(x_1))$). Cependant, il a un rôle important à tenir dans l'étude des variétés rationnelles si bien que les renseignements le concernant sont activement recherchés. Une façon naturelle de l'aborder consiste à étudier ses sous-groupes algébriques. Pour mettre en évidence des sous-groupes algébriques, on dispose de la remarque suivante : Soit X une variété rationnelle de dimension n complète. La composante neutre du groupe des automorphismes de X définit, via les isomorphismes entre $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$, une classe de conjugaison de sous-groupes algébriques du groupe de Cremona.

En 1893, Enriques a montré (cf. [5] et [4]) que tous les sous-groupes algébriques connexes maximaux du groupe de Cremona à deux variables sont décrits par le procédé ci-dessus et qu'on peut choisir X lisse. On observe alors que ces groupes sont de rang deux de centre nul, et que leur partie réductive est de type A .

Plus récemment, Demazure a conçu le projet d'adopter un point de vue analogue pour étudier le groupe de Cremona à n variables sur un corps quelconque. Le fruit de ses observations a fait l'objet de la publication (cf. [1]) dont le présent exposé prétend rendre compte.

Pour pouvoir exploiter les techniques habituelles de la théorie des groupes algébriques, Demazure concentre son effort sur les sous-groupes algébriques du groupe de Cremona contenant un tore déployé de dimension n . Il peut alors développer une théorie des racines qui rappelle celle des groupes réductifs déployés (cf. [6]) et qui lui permet de classifier les sous-groupes en question par ce qu'il appelle les systèmes d'Enriques. On constate ainsi que la partie réductive de ces sous-groupes est de type A et que ceux qui sont semi-simples sont des produits de groupes projectifs.

Le reste du travail est consacré à une noble entreprise : réaliser les sous-groupes en question comme groupes d'automorphismes de variétés rationnelles lisses (en vérité, on aurait préféré pouvoir choisir ces variétés rationnelles lisses propres). A cet effet, Demazure introduit certains objets de nature combinatoire, les éventails auxquels il associe des \mathbb{Z} -schémas rationnels de dimension n munis de l'opération fidèle d'un tore déployé de rang n . Voyons dès maintenant ces éventails de plus près.

1. Eventails et schémas associés

Soit M un groupe abélien libre de type fini.

DÉFINITION 1.- On appelle éventail dans M tout ensemble E fini non vide de parties de M^* vérifiant :

E_1 Tout élément de E est une base incomplète de M^* .

E_2 Toute partie de M^* contenue dans un élément de E est un élément de E .

E_3 Si K et L sont deux éléments de E , on a $N(K \cap L) = NK \cap NL$ où NK par exemple désigne l'ensemble des combinaisons à coefficients dans \mathbb{N} d'éléments de K .

DÉFINITION 2.- On appelle support de l'éventail E la réunion $|E|$ des éléments de E.

Notons \mathbb{N}^+K l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers strictement positifs d'éléments de K (en particulier $\mathbb{N}^+\emptyset = \{0\}$).

DÉFINITION 3.- On dit que l'éventail E est complet si les \mathbb{N}^+K forment une partition de M^* lorsque K décrit E .

Avant de donner des exemples, montrons comment on associe à un éventail un \mathbb{Z} -schéma.

Pour K dans E , notons M_K le sous-monoïde de M formé des $m \in M$ tels que $\langle r, m \rangle \geq 0$ pour tout r dans K .

Notons $\mathbb{Z}[M]$ l'algèbre du groupe M , qui est engendrée par les e^m où m décrit M . Notons V_K le spectre premier du sous-anneau $\mathbb{Z}[M_K]$ de $\mathbb{Z}[M]$ engendré par les e^m où m décrit M_K . Si $K = \emptyset$, V_K est le \mathbb{Z} -tore T dual de M . Si K est une base, V_K est isomorphe à \mathbb{G}_a^n et si K est quelconque, V_K est isomorphe à un produit de groupes additifs et multiplicatifs. L'isomorphisme canonique entre M et $\text{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ permet de définir une opération de T sur le \mathbb{Z} -groupe $\mathbb{Z}[M_K]$ qui induit une opération de T sur le \mathbb{Z} -schéma V_K . Il nous reste à recoller les V_K . Voici le lemme qu'on utilise :

Lemme 4.- Si $L \subset K$, l'injection de M_K dans M_L induit un morphisme canonique de V_L dans V_K :

a) Ce morphisme est une immersion ouverte de \mathbb{Z} -schémas, compatible avec l'opération de T .

b) Le morphisme canonique de $V_{K \cap L}$ dans $V_K \times V_L$ est une immersion fermée.

Notons que c'est l'axiome E_3 qui permet de montrer la seconde partie du lemme.

DÉFINITION 5.- On appelle schéma associé à l'éventail E le schéma \hat{E} obtenu en recollant les V_K à l'aide des immersions décrites dans le lemme précédent.

On voit sans difficulté que \hat{E} est un \mathbf{Z} -schéma lisse séparé de présentation finie et à fibres intègres.

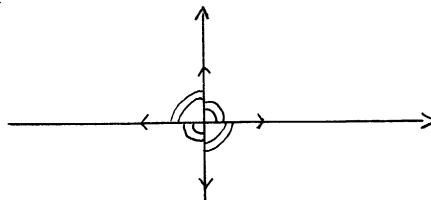
PROPOSITION 6.- Pour que \hat{E} soit propre, il faut et il suffit que E soit complet.

On peut montrer que si E est complet, ses éléments maximaux sont des bases.

Donnons maintenant des exemples :

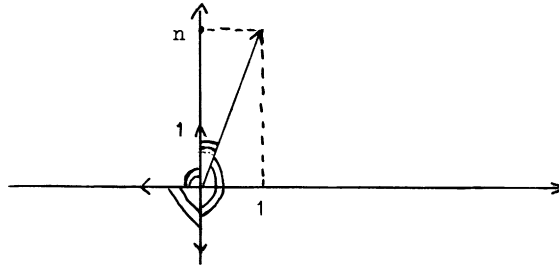
a) $M^* = \mathbf{Z}^n$ (r_1, \dots, r_n) est la base canonique et, par définition $r_{n+1} = -r_1 - r_2 - \dots - r_n$. Posons $|E| = \{r_1, \dots, r_n, r_{n+1}\}$ et considérons l'éventail E dont les éléments sont les parties de $|E|$ distinctes de $|E|$. Le schéma \hat{E} , obtenu en recollant $(n+1)$ espaces affines, est un espace projectif. Rien d'étonnant à ce qu'il soit propre : on vérifie sans difficulté que E est complet.

b) $M^* = \mathbf{Z}^2$, (e_1, e_2) est la base canonique. $|E| = \{e_1, e_2, -e_1, -e_2\}$ et E est engendré par (e_1, e_2) , $(e_1, -e_2)$, $(-e_1, e_2)$, $(-e_1, -e_2)$ ce qui se mémorise à l'aide du dessin suivant



Les angles mis en évidence sont ceux définis par des parties à deux éléments de E . Dire que E est complet revient à dire que la réunion de ces angles est l'espace entier. Dans \mathbf{Z}^3 la situation est analogue : ce sont les angles solides qui interviennent. Dans l'exemple qui nous occupe $\hat{E} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$.

c) $M^* = \mathbb{Z}^2$. Représentons l'éventail par le dessin



Le schéma \hat{E} est la surface F_n obtenue en adjoignant (de la façon évidente) une section à l'infini au fibré $\mathcal{O}(n)$ sur la sphère de Riemann.

b) On peut distinguer les éventails convexes : E est convexe si les éléments maximaux de E sont des bases et si, K étant un tel élément et r un point de $|E| - K$, la somme des coordonnées de r dans K est négative. Soit ω_E le faisceau inversible canonique sur \hat{E} . On peut montrer que pour que E soit convexe, il faut et il suffit que ω_E^{-1} soit ample. De façon plus générale, on peut se demander si tous les \hat{E} sont quasi-projectifs. La réponse est négative même dans le cas propre (cf. [3]). Demazure donne un critère numérique de quasi-projectivité issu de l'étude de $\text{Pic } \hat{E}$.

2. Automorphismes du \mathbb{Z} -schéma \hat{E} associé à E

On connaît déjà le sous-tore T de $\text{Aut}(\hat{E})$.

Soient k un corps et a dans $M = \text{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$. Notons $T \times_a \mathbb{G}_a$ le produit semi-direct de T par \mathbb{G}_a pour l'opération de T sur \mathbb{G}_a définie par a .

DÉFINITION 7.— On dit que a est une racine de E si il existe une opération de $(T \times_a \mathbb{G}_a)_k$ sur \hat{E}_k prolongeant l'opération canonique de T_k sur \hat{E}_k et n'induisant pas l'opération triviale de \mathbb{G}_a .

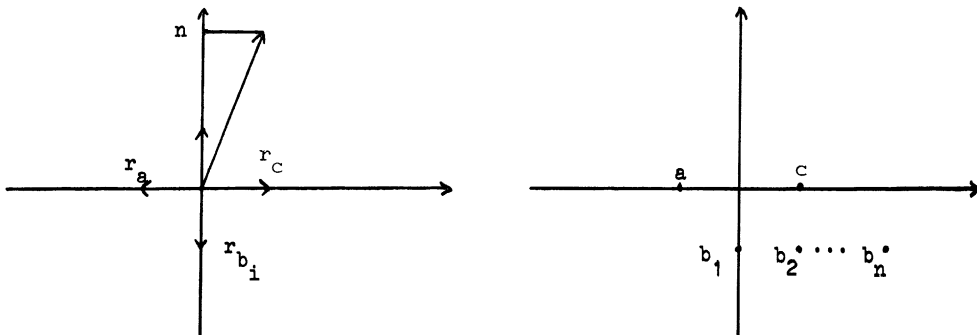
Nous allons tout de suite donner la caractérisation combinatoire qui permet de repérer les racines dans la pratique.

THÉORÈME 8.- Pour que a soit racine de E , il faut et il suffit qu'il existe r_a dans $|E|$ vérifiant :

$$1^\circ) \langle r_a, a \rangle = 1 \text{ et } \forall r \in |E| - \{r_a\}, \langle r, a \rangle \leq 0.$$

$$2^\circ) \text{ Si } K \in E \text{ et } \forall r \in K, \langle r, a \rangle = 0, \text{ alors } K \cup \{r_a\} \in E.$$

On peut vérifier que si E est complet, la condition 2°) est superflue. D'autre part, il résulte de la première condition que si a est une racine, r_a est bien déterminé. A titre d'exemple, cherchons les racines dans le cas de l'exemple c) ci-dessus



On obtient dans M les racines a, b_1, \dots, b_n dessinées ci-dessus. Voyons maintenant de plus près les automorphismes de \hat{E} associés à a .

THÉORÈME 9.- Il existe un monomorphisme unique x_a de G_a dans $\text{Aut}(\hat{E})$ tel que, si S est un k -schéma, si $\ell \in G_a(S)$ et $t \in T(S)$, on ait :

$$1^\circ) tx_a(\ell)t^{-1} = x_a(a(t)\ell).$$

2°) Si $1 + \ell/a(t)$ est inversible, alors $x_a(\ell)$ transforme t en $tr_a(1 + \ell/a(t))$:

L'image U_a de x_a est donc un sous-groupe normalisé par T dans $\text{Aut}(\hat{E})$. On l'appellera groupe à un paramètre d'automorphismes de \hat{E} associé à la racine a .

Si a et b sont deux racines de E , quelles sont les relations de commutation entre les automorphismes associés ?

THÉORÈME 10.- 1°) Si $r_a = r_b$ ou si $\langle r_a, b \rangle = \langle r_b, a \rangle = 0$, les deux sous-groupes à un paramètre commutent.

2°) Si $\langle r_b, a \rangle = 0$, alors si on pose $\langle r_a, b \rangle = -n$, les éléments $b + pa$ sont racines de E pour $0 \leq p \leq n$ et on a, pour tout schéma S et tous ℓ, ℓ' dans $\mathbb{G}_a(S)$

$$x_a(\ell)x_b(\ell')x_a(\ell)^{-1} = \prod_{0 \leq p \leq n} x_{b+pa}((-1)^p \binom{n}{p} \ell^p \ell').$$

3°) Si $a + b = 0$, il existe un homomorphisme unique $\varphi : G_{2, \mathbb{Z}} \rightarrow \text{Aut}(\hat{E})$ tel que $\varphi \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_a(\ell)$, $\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ell & 1 \end{pmatrix} = x_b(\ell)$, $\varphi \begin{pmatrix} \ell' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = r_a(\ell')$, $\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \ell' \end{pmatrix} = r_b(\ell')$ pour tous ℓ, ℓ' et S tels que $\ell \in \mathbb{G}_a(S)$ et $\ell' \in \mathbb{G}_m(S)$.

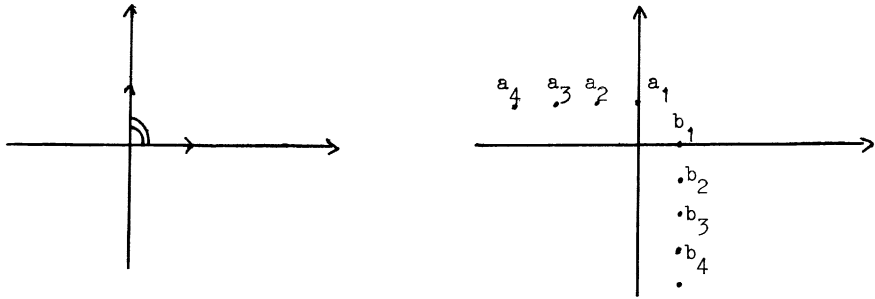
On notera que le théorème ci-dessus est muet sur le cas où $\langle r_a, b \rangle < 0$ et $\langle r_b, a \rangle < 0$. Ce qui se passe, c'est que sous l'une des trois hypothèses ci-dessus, T, U_a et U_b acceptent d'engendrer un sous-groupe représentable de $\text{Aut}(\hat{E})$. Plus précisément :

THÉORÈME 11.- Soit R un ensemble fini de racines de E et pour $a \in R$ soit r_a l'élément qui lui est associé par le théorème 8. Pour qu'il existe un sous-schéma en groupe G de $\text{Aut}(\hat{E})$ contenant T , affine, lisse et à fibres connexes dont l'ensemble des racines relativement à T soit R , il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées.

1°) $\forall a, b \in R$, si $a + b$ est une racine de E , alors $a + b \in R$.

2°) $\forall a, b \in R$, si $\langle r_a, b \rangle < 0$ et $\langle r_b, a \rangle < 0$, alors $a + b = 0$.

Exemple.— Considérons l'éventail E dans \mathbb{Z}^2 correspondant au dessin



\hat{E} est l'espace affine \mathbb{G}_a^2 et l'ensemble des racines de E est réunion de deux suites (a_n) et (b_n) .

Les ensembles R décrits dans le théorème sont : les parties finies de (a_n) ou de (b_n) , les parties de la forme $(b_1, a_1, a_2, \dots, a_p)$ ou $(a_1, b_1, b_2, \dots, b_p)$ et la partie (a_1, a_2, b_1, b_2) . On peut vérifier à l'aide du théorème que $x_a(\ell)$ transforme (t_1, t_2) en $(t_1 + \ell t_2^{p-1}, t_2)$ et $x_b(\ell)$ transforme (t_1, t_2) en $(t_1, t_2 + \ell t_1^{p-1})$. On remarque en particulier que, pour $p = 3$, ces deux sous-groupes à un paramètre ne sont pas contenus dans un même sous-schéma en groupes de $\text{Aut}(\hat{E})$ contenant T .

Signalons enfin que, dans la situation du théorème 11, il existe un sous-éventail E' de E tel que le sous-schéma ouvert \hat{E}' de \hat{E} soit stable et homogène sous G .

3. Le groupe de Cremona et ses tores

Voici la définition que Demazure donne du groupe de Cremona :

Soient S un schéma, X et Y deux S -schémas lisses séparés et de type fini. Un ouvert U de X est S -dense si, pour chaque $s \in S$, U_s est un ouvert dense de la fibre X_s . Un S -pseudo-morphisme est une classe d'équivalence de couples (U, f) , où U est un ouvert S -dense de X et f un S -

morphisme de U dans Y , deux couples (U, f) et (U', f') étant équivalents si f et f' coïncident sur $U \cap U'$. Les S -pseudo-morphismes se composent sous certaines conditions et on a des notions naturelles de S -pseudo-isomorphisme et de S -pseudo-automorphisme. Si X est un S -schéma lisse séparé de type fini, on note $\text{Psaut}(X/S)$ le groupe des S -pseudo-automorphismes de X . Quand S' varie dans la catégorie des S -schémas, les $\text{Psaut}(X_{S'}/S')$ s'organisent en un S -foncteur en groupes noté $\text{Psaut}_S(X)$. Le groupe de Cremona à n -variables sur k est le k -foncteur en groupe $\text{Psaut}_k(\mathbb{P}_k^n)$.

Ce groupe mérite son nom puisque $\text{Cr}_{nk}(k)$ est le groupe opposé au groupe des k -automorphismes de $k(x_1, \dots, x_n)$. En revanche, si A est une k -algèbre, $\text{Cr}_{nk}(A)$ n'est pas en général anti-isomorphe au groupe des A -automorphismes de $A(x_1, \dots, x_n)$. Remarquons que $\text{Cr}_{1k}(k)$ est le groupe $\text{PGL}_{2,k}$. Mais l'algèbre de Lie de $\text{Cr}_{1,k}$ (au sens de la théorie des groupes algébriques [2]) est un k -espace vectoriel de dimension infinie : le groupe $\text{Cr}_{1,k}(k[\varepsilon])$ contient en effet un sous-groupe anti-isomorphe au groupe des $k[\varepsilon]$ automorphismes de $k[\varepsilon, t]$ et ce groupe est décidément trop gros.

On voit sur l'exemple précédent que le foncteur $\text{Psaut}_S(X)$ n'est pas représentable en général.

Rappelons maintenant qu'un k -tore déployé est un k -groupe isomorphe à un groupe G_m^n . On s'intéressera seulement dans la suite aux tores déployés. Voici les observations qu'on peut faire sur les sous-tores déployés de $\text{Cr}_{n,k}$:

PROPOSITION 12.- Les sous-tores de $\text{Cr}_{n,k}$ sont de dimension au plus n . Ceux qui sont déployés de dimension n sont conjugués (et maximaux).

On aimerait bien savoir que tout sous-tore déployé de Cr_{nk} est contenu dans un sous-tore déployé de dimension n . Il reviendrait au même de résoudre le joli problème que voici. Soit L une extension de k telle que $L(t)$ soit pure.

Montrer que L est pure.

Voici un autre aspect des sous-tores de $Cr_{n,k}$.

PROPOSITION 13.- Soit T un sous-tore déployé de dimension n de $Cr_{n,k}$.

. T est son propre centralisateur, en particulier, c'est un sous-groupe commutatif maximal de $Cr_{n,k}$.

. Le normalisateur N de T est un k -schéma en groupes localement algébrique lisse.

. Le morphisme canonique $N/T \rightarrow \text{Aut}(T)$ est un isomorphisme.

Les tores déployés de rang n seront, dans la suite, exploités à travers la remarque suivante : les groupes $\text{Psaut}(T)$ et $Cr_{n,k}$ sont isomorphes. Ce fait sera utilisé sous la forme plus précise que voici :

PROPOSITION 14.- Soit T un sous-tore déployé de rang n de $Cr_{n,k}$. Il existe un isomorphisme de $Cr_{n,k}$ sur $\text{Psaut}(T)$ rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Cr_{n,k} & \rightarrow & \text{Psaut}(T) \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & T & \end{array}$$

commutatif.

4. Classification des sous-groupes en question

Nous supposons ici que k est de caractéristique 0 mais Demazure traite le cas général.

Soit G un sous-groupe algébrique lisse de $Cr_{n,k}$ contenant un tore déployé T de dimension n . On peut montrer qu'il existe un sous-groupe H tel que G/H soit un k -schéma rationnel et un isomorphisme de $\text{Psaut}(G/H)$ dans $Cr_{n,k}$ rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 G & \rightarrow & \text{Aut}(G/H) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Cr}_{n,k} & \leftarrow & \text{Psaut}(G/H)
 \end{array}$$

commutatif.

On utilise plutôt la proposition 14 qui nous ramène à l'étude des diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
 G & \rightarrow & \text{Psaut}(T) \\
 \swarrow & & \searrow \\
 & T &
 \end{array}$$

commutatifs.

Poursuivons la métamorphose du problème.

DÉFINITION 15.- On appelle pseudo-opération de G sur le k -schéma X tout homomorphisme de G dans $\text{Psaut}(X)$.

A toute opération de G sur X (homomorphisme de G dans $\text{Aut}(X)$) correspond de façon naturelle un morphisme de $G \times_k X$ dans X . On peut, de façon analogue, associer à toute pseudo-opération un pseudo-morphisme de $G \times_k X$ dans X qui la caractérise : A tout h dans $\text{Psaut}(G \times_k X/G)$ correspond un morphisme $m(h)$ entre les k -foncteurs (à valeurs ensembles) G et $\text{Psaut}(X)$. Notons A l'ensemble des h tels que le morphisme $m(h)$ soit un morphisme de groupes. A tout h dans A on peut maintenant associer (par projection sur le second facteur) un pseudo-morphisme $p(h)$ de $G \times_k X$ dans X .

PROPOSITION 16.- L'application m de A dans $\text{Hom}(G, \text{Psaut}(X))$ est bijective et l'application p restreinte à A est injective.

Soit alors $T \rightarrow G \rightarrow \text{Psaut}(T)$ comme ci-dessus et notons $*$ la pseudo-opération correspondante de G sur T .

PROPOSITION 17.- La formule $f(g) = g * 1$ définit un pseudo-morphisme de G dans T qui caractérise le diagramme.

On peut caractériser les pseudo-morphismes de G dans T obtenus de cette façon. On obtient la :

DÉFINITION 18.- Soit G un k -groupe algébrique lisse et soit T un sous-tore déployé de G . Un pseudo-projecteur de G sur T est un pseudo-morphisme f de G dans T vérifiant les axiomes :

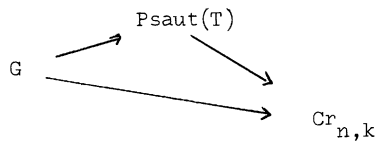
P_1 Si S est un k -schéma, si g, g' sont dans $G(S)$ et si $f(g')$ est défini, alors $f(gg')$ est défini si et seulement si $f(gf(g'))$ l'est, on a dans ce cas $f(gg') = f(gf(g'))$.

P_2 f est défini en tout point de T et induit l'identité sur T .

P_3 Si S est un k -schéma, si g et g' sont dans $G(S)$ et si $f(gt) = f(g't)$ pour tout point t de T à valeur dans un S -schéma tel que $f(gt)$ et $f(g't)$ soient définis, alors $g = g'$.

La proposition 14 peut s'exprimer maintenant de la façon suivante :

DÉFINITION 19.- Soient G un sous-groupe algébrique de $Cr_{n,k}$ et f un pseudo-projecteur de G sur T . On dit que f est adapté à l'inclusion de G dans $Cr_{n,k}$ s'il existe un isomorphisme entre $Psaut(T)$ et $Cr_{n,k}$ rendant le diagramme



commutatif.

PROPOSITION 20.- Soient G un sous-groupe algébrique lisse de $Cr_{n,k}$ et T un sous-tore de rang n de G . Il existe un pseudo-projecteur f de G sur T adapté à l'inclusion de G dans $Cr_{n,k}$.

Soit maintenant f un pseudo-projecteur d'un groupe algébrique lisse G sur T . Notons M le groupe $\text{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ des caractères de T , $M^* = \text{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$ le groupe abélien dual et \langle , \rangle la dualité entre M et M^* . Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G et, pour tout $m \in M$, soit \mathfrak{g}^m le sous-espace propre de la représentation adjointe de T dans \mathfrak{g} correspondant à la valeur propre m . Les racines de G relativement à T sont les $a \in M$ tels que $a \neq 0$ et $\mathfrak{g}^a \neq \{0\}$. On note R l'ensemble des racines et on sait que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \oplus \sum_{a \in R} \mathfrak{g}^a$. Ce décor permet de décrire le groupe G de la façon suivante :

THÉORÈME 21.- Le groupe G est affine et T y est son propre centralisateur.

Si G est connexe, $\text{Cent}(G) = \bigcap_{a \in R} \ker a \subset T$.

. Pour tout a dans R , \mathfrak{g}^a est de dimension un, il existe un sous-groupe fermé U_a de G tel que $\text{Lie}(U_a) = \mathfrak{g}^a$.

. Il existe un isomorphisme x_a de \mathbb{G}_a dans U_a et un élément s_a de M^* , uniquement déterminés tels que pour tout k -schéma S , pour tout $t \in T(S)$ et tout $\ell \in \mathbb{G}_a(S)$, on ait :

$$tx_a(\ell)t^{-1} = x_a(a(t)\ell)$$

et $f(x_a(\ell)) = s_a(1 + \ell)$ si $1 + \ell$ est inversible ;

$$\langle s_a, a \rangle = 1 .$$

. G admet un plus grand sous-groupe invariant lisse connexe et unipotent U et un plus grand sous-groupe réductif connexe L contenant T . L est de type A et son centre est un tore.

La composante neutre G^0 de G est le produit semi-direct de L par U . Si on pose $R_+ = R \cap (-R)$ et $R_- = R - R_+$, on a

$$(a \in R_+) \Leftrightarrow (U_a \subset L) \quad , \quad (a \in R_-) \Leftrightarrow (U_a \subset U) \quad , \quad \text{Lie}(L) = \mathfrak{g}^0 + \sum_{a \in R_+} \mathfrak{g}^a$$

et $U = \prod_{a \in R_-} U_a$ pour n'importe quel ordre total sur R_- .

Les s_a qui apparaissent dans le théorème conduisent Demazure à une description complète de $\text{Lie}(G)$ en termes de générateurs et de relations de commutation. Ils permettent aussi d'immatriculer de façon plus combinatoire les objets que nous étudions :

DÉFINITION 22.- On appelle système d'Enriques tout triplet (M, R, s) où M est un groupe abélien libre de type fini, R une partie finie de M et

$s : a \mapsto s_a$ une application de R dans le dual M^* de M vérifiant :

- 1°) $\forall a \in R, \quad \langle s_a, a \rangle = 1$;
 2°) $\forall a, b \in R, \quad s_a \neq s_b \Rightarrow \langle s_a, b \rangle \leq 0$.

A tout pseudo-projecteur, on associe le système d'Enriques (M, R, s_a) décrit dans le théorème 21.

THÉORÈME 23.- Soit G (resp. G') un sous-groupe algébrique lisse connexe de $Cr_{n,k}$ contenant un tore déployé T (resp. T') de rang n . A tout choix d'un pseudo-projecteur f (resp. f') adapté à l'inclusion de G (resp. G') dans $Cr_{n,k}$, correspond un système d'Enriques S (resp. S'). Pour que G et G' soient conjugués, il faut et il suffit que S et S' soient isomorphes (en un sens évident). Dans ce cas, on peut plus précisément choisir c dans $Cr_{n,k}(k)$ de façon que $\text{int}_c(G) = G'$ et $\text{int}_c(T) = T'$.

Il reste à voir quels sont les systèmes d'Enriques associés à des pseudo-projecteurs :

DÉFINITION 24.- Le système d'Enriques (M, R, s) est dit saturé si, pour tous a, b dans R vérifiant $\langle s_a, b \rangle < 0$, on a :

$$\langle s_b, a \rangle < 0 \Rightarrow a + b = 0$$

et $\langle s_b, a \rangle = 0 \Rightarrow a + b \in \mathbb{R} .$

On montre facilement la

PROPOSITION 25.- Le système d'Enriques associé à un pseudo-projecteur est saturé.

Et en associant à tout système d'Enriques saturé un éventail, on montre le

THÉORÈME 26.- La correspondance entre sous-groupes algébriques lisses de rang n de $Cr_{n,k}$ et systèmes d'Enriques définit une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes algébriques de rang n de $Cr_{n,k}$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme de systèmes d'Enriques saturés.

Signalons enfin que l'étude des systèmes d'Enriques "réductifs" permet de montrer que les sous-groupes algébriques lisses semi-simples de rang n de $Cr_{n,k}$ sont des produits de groupes projectifs.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. DEMAZURE - Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona, Annales Sc. de l'E.N.S., 4e série, t. 3, fasc. 4, 1970, p. 507-588.
- [2] M. DEMAZURE-P. GABRIEL - Groupes algébriques, Tome 1, Masson - North-Holland, 1970.
- [3] A. DOUADY - Le shaddok à six becs, à paraître.
- [4] ENRIQUES - Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniani nel piano, Rend. Accad. Lincei, 1er sem., 1893.
- [5] L. GODEAUX - Les transformations birationnelles du plan, Mémorial des Sciences Mathématiques, n° 122, Gauthier-Villars, 1953.
- [6] S. G. A. III, Chapitre 22.