ANDRÉ HAEFLIGER

Sur les classes caractéristiques des feuilletages

Séminaire N. Bourbaki, 1973, exp. n° 412, p. 239-260
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1971-1972__14__239_0>

Séminaire BOURBAKI 412-01
24e année, 1971/72, n° 412 Juin 1972

SUR LES CLASSES CARACTÉRISTIQUES DES FEUILLETAGES

par André HAEFLIGER

Le but de ce rapport est de montrer le lien entre la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs (resp. des champs de vecteurs formels) étudiée par Gelfand et Fuchs et les classes caractéristiques des fibrés feuilletés (resp. des feuilletages ou des microfibrés feuilletés).

Le premier pas dans cette direction a été fait par Godbillon et Vey [11] qui ont montré que la cohomologie des champs de vecteurs formels sur R s'envoie naturellement dans la cohomologie d'une variété munie d'un feuilletage de codimension 1, attachant ainsi à un tel feuilletage une classe de cohomologie réelle de dimension 3.

Il était dès lors apparent que les théorèmes de Bott sur l'annulation des classes caractéristiques des fibrés normaux aux feuilletages, ainsi que la construction des classes exotiques qu'il en déduisait, devaient être comprise dans ce cadre.

Plusieurs généralisations de la construction de Godbillon-Vey ont été proposées indépendamment par divers auteurs, notamment Malgrange (non publié) et Bernstein-Rosenfeld [1].

Nous présentons ici le point de vue adopté dans une note de Bott et du rapporteur.

[Les parties I et II peuvent se lire indépendamment.]

I. Fibrés feuilletés

1. L'algèbre de Lie d'un groupe de difféomorphismes

Dans ce qui suit G désignera un groupe de difféomorphismes d'une variété M compacte. (Différentiable signifiera indéfiniment différentiable.)

G est muni d'une structure différentiable naturelle : une application $g : x \mapsto g_x$ d'une variété X dans G sera dite différentiable si l'application $(x, z) \to g_x.z$ de $X \times M$ dans M est différentiable. Si X est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{R}$, en tout point z de M, la courbe $g_o^{-1} g_t.z$ définit un vecteur tangent à M. Un champ de vecteurs obtenu de cette manière sera appelé un G-champ de vecteurs. On supposera que le crochet de deux G-champs de vecteurs est un G-champ de vecteurs. Ainsi les G-champs de vecteurs sur M forment une algèbre de Lie sur les réels, appelée l'algèbre de Lie $\underline{G}$ de G.

Si h est une application différentiable de X dans G, la dérivée h'_x de h au point x sera l'application linéaire de l'espace tangent T_xX dans $\underline{G}$ faisant correspondre au vecteur ξ représenté par la courbe $x(t)$ le champ de vecteurs sur M qui est représenté au point z par la courbe $h_{x(o)}^{-1} h_{x(t)}.z$.

Une forme q-linéaire alternée ω sur $\underline{G}$ sera dite continue si son évaluation sur toute suite de G-champs de vecteurs dépendant différentiablement d'un paramètre t est une fonction différentiable de t.

L'algèbre $A(\underline{G})$ des formes q-linéaires alternées continues sur $\underline{G}$ est munie d'une différentielle d définie par

$$d\omega(\xi_1, \ldots, \xi_{q+1}) = \Sigma (-1)^{i+j-1} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_i \ldots \hat{\xi}_j, \ldots, \xi_{q+1}) .$$

La cohomologie de cette algèbre différentielle est appelée la cohomologie $H(\underline{G})$ de l'algèbre de Lie $\underline{G}$.

Les éléments de $A(\underline{G})$ peuvent s'interpréter comme les formes différentielles sur G invariantes à gauche. Si $h : X \to G$ est une application différentiable et si $\omega \in A(\underline{G})$, alors $h^*\omega$ sera la q-forme différentielle sur X définie par

$$(h^*\omega)(\xi_1, \ldots, \xi_q) = \omega(h'\xi_1, \ldots, h'\xi_q) .$$

$A(X)$ désigne l'algèbre des formes différentielles sur X.

LEMME.- <u>L'homomorphisme</u> $h^* : A(\underline{G}) \to A(X)$ <u>commute avec</u> d.

Ceci résulte du fait suivant, facile à vérifier. Soit h une application différentiable d'un ouvert de R^2 dans G ; en tout point de coordonnées (t,s), on a la relation

$$[h'(\partial/\partial t), h'(\partial/\partial s)] = -\frac{\partial}{\partial t} h'(\partial/\partial s) + \frac{\partial}{\partial s} h'(\partial/\partial t) .$$

Nous aurons aussi à considérer le cas où l'on se donne un sous-groupe K de G (supposé en général compact). Alors K opère sur $\underline{G}$: si $h \in K$ et si g_t est une courbe dans G définissant le champ de vecteurs $\xi \in \underline{G}$, alors $h.\xi$ est le champ de vecteurs défini par la courbe $hg_t h^{-1}$. Nous désignerons par $A^*(\underline{G},K)$ le sous-complexe de $A^*(\underline{G})$ des formes K-basiques, c'est-à-dire invariantes par K et annulées par tous les produits intérieurs par les K-champs de vecteurs. La cohomologie de $A^*(\underline{G},K)$ sera notée $H^*(\underline{G},K)$

Gelfand et Fuchs ont étudié notamment dans une série d'articles [9] la cohomologie de l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs différentiables sur M (c'est le cas où G est le groupe $\mathrm{Diff}\, M$ de tous les difféomorphismes de M).

Par exemple, si M est le cercle S^1, ils ont montré que $H(\underline{\mathrm{Diff}}\ S^1)$ est une algèbre à deux générateurs α et β de dimension 2 et 3 représentés par les formes suivantes ($\partial/\partial t$ désigne le champ de vecteurs correspondant à la paramétrisation $e^{2i\pi t}$) :

$$\alpha(f\frac{\partial}{\partial t}, g\frac{\partial}{\partial t}) = \int_{S^1} \begin{vmatrix} f' & f'' \\ g' & g'' \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \beta(f\frac{\partial}{\partial t}, g\frac{\partial}{\partial t}, h\frac{\partial}{\partial t}) = \int_{S^1} \begin{vmatrix} f & f' & f'' \\ g & g' & g'' \\ h & h' & h'' \end{vmatrix} .$$

Il en résulte que $H(\underline{\mathrm{Diff}}\ S^1, SO_2)$ est la somme directe $R[\alpha] \oplus R[\chi]$, où χ est représenté par la forme

$$\chi(f\frac{\partial}{\partial t}, g\frac{\partial}{\partial t}) = \int_{S^1} \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} .$$

2. Fibrés avec feuilletages transverses

Nous reprenons les notations du § précédent. Le groupe G muni de la topologie discrète sera désigné par G^{δ} .

Un fibré G-feuilleté sur une variété différentiable X , de fibre M , est un fibré différentiable $p : E \to X$ avec groupe structural G^{δ} . Cela signifie qu'on s'est donné sur E un atlas maximal $\{\varphi_U\}$ dont les cartes φ_U sont des difféomorphismes de $p^{-1}(U)$ sur $U \times M$ compatibles avec les projections sur U , les changements de cartes $\varphi_U \varphi_{U'}^{-1}$ étant de la forme $(x,z) \mapsto (x, \gamma_{UU'} . z)$, où $\gamma_{UU'}$ est une application localement constante de $U \cap U'$ dans G .

Les composés des cartes φ_U avec la projection sur M sont les projections locales d'un feuilletage sur E transverse aux fibres.

Soit K un sous-groupe de G . Un K-fibré G-feuilleté est un fibré G-feuilleté E muni encore d'un groupe structural K et de manière compatible avec G . Cela signifie que l'on s'est donné, en plus de l'atlas $\{\varphi_U\}$, un atlas $\{\psi_V\}$ dont les changements de cartes $\psi_V \psi_{V'}^{-1}$ sont de la forme $(x,z) \mapsto (x, k_{VV'}(x) . z)$, où $k_{VV'}$ est une application différentiable de $V \cap V'$ dans K. De plus les changements de cartes $\varphi_U \psi_V^{-1}$ doivent être de la forme $(x,z) \mapsto (x, h_{UV}(x) . z)$, où h_{UV} est une application différentiable de $U \cap V$ dans G . On a alors la relation

$$h_{U'V'}(x) = \gamma_{U'U} \, h_{UV}(x) \, k_{VV'}(x) .$$

Si f est une application différentiable de X' dans X , alors le fibré induit $f^{-1}(E)$ sur X' est aussi un K-fibré G-feuilleté. L'application naturelle de $f^{-1}(E)$ dans E sera un morphisme de la catégorie $F(G^{\delta},K)$ des K-fibrés G-feuilletés.

Deux K-fibrés G-feuilletés E_0 et E_1 sur X sont homotopes s'il existe un K-fibré G-feuilleté E sur $X \times R$ tel que E_i soit le fibré induit de E par l'inclusion $x \mapsto (x,i)$ de X dans $X \times R$.

Une <u>classe caractéristique</u> α pour la catégorie $F(G^\delta,K)$ à coefficient dans un groupe R associe à tout K-fibré G-feuilleté E sur X un élément $\alpha(E) \in H(X,R)$ tel que

$$\alpha(f^{-1}E) = f^*\alpha(E) .$$

On peut interpréter ce qui précède en termes de classifiant. (Si H est un groupe topologique, BH désigne un classifiant pour les fibrés H-principaux.)

Les homomorphismes d'inclusion $G^\delta \to G$ et $K \to G$ induisent des applications $BG^\delta \to BG$ et $BK \to BG$ dont la seconde peut être supposée une fibration. On a le diagramme suivant où $B(G^\delta,K)$ est le produit fibré des applications précédentes :

$$\begin{array}{ccc} B(G^\delta,K) & \to & BK \\ \downarrow & & \downarrow \\ BG^\delta & \to & BG . \end{array}$$

Les classes d'homotopie des K-fibrés G-feuilletés sur X sont en correspondance bijective avec les classes d'homotopie des applications de X dans $B(G^\delta,K)$.

Les classes caractéristiques correspondent aussi bijectivement aux éléments de $H(B(G^\delta,K),R)$.

Signalons deux cas particuliers intéressants :

a) K est réduit à l'élément neutre. Cela signifie que l'on s'intéresse à la catégorie des fibrés G-feuilletés trivialisés en tant que G-fibrés. Alors $B(G^\delta,e)$ a le type d'homotopie de la fibre homotopique de $BG^\delta \to BG$, ou encore de l'espace total du fibré G-principal de base BG^δ.

b) K a le même type d'homotopie que G (par exemple K est le compact maximal d'un groupe de Lie G). On s'intéresse dans ce cas aux classes d'homotopie des fibrés G-feuilletés. $B(G^\delta, K)$ a le même type d'homotopie que BG^δ .

3. L'homomorphisme caractéristique $H^*(\underline{G}, K) \to H^*(X)$

Soit E un K-fibré G-feuilleté sur X . On veut définir un homomorphisme fonctoriel

$$\varphi : A(\underline{G}, K) \to A(X)$$

où $A(X)$ désigne l'algèbre des formes différentielles sur X . La cohomologie de cette algèbre sera identifiée à l'algèbre de cohomologie $H(X)$ à coefficients réels via le théorème de de Rham.

Soient $h_{UV} : U \cap V \to K$ les applications différentiables de transition entre les atlas qui définissent sur E les réductions à G^δ et K . Si $\omega \in A(G)$, alors $(h_{UV})^*\omega$ est une forme différentielle sur $U \cap V$; si ω appartient au sous-complexe $A(\underline{G}, K)$, alors d'après la formule du § 2, $(h_{UV})^*\omega = (h_{U'V'})^*\omega$ dans leur domaine commun de définition. On obtient ainsi une forme $\varphi(\omega)$ sur X . L'application φ commute avec d d'après le § 1.

L'homomorphisme

$$\varphi : H(\underline{G}, K) \to H(X)$$

qu'on en déduit ne dépend que de la classe d'homotopie de E . Comme il est fonctoriel, il définit un homomorphisme

$$\varphi : H(\underline{G}, K) \to H(B(G, K)) .$$

[$H(.)$ désigne toujours la cohomologie à coefficients réels.]

Remarques.- 1) Supposons que K soit un groupe de Lie compact. Soit $I(K)$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur l'algèbre de Lie de K invariantes par la représentation adjointe. Cette algèbre est isomorphe à l'algèbre $H(BK)$. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H(\underline{G},K) & \leftarrow & I(K) \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\wr \\ H(B(G,K)) & \leftarrow & H(BK) \end{array}$$

où la première flèche horizontale est définie par une K-connexion dans l'algèbre $A(\underline{G})$ (cf. [6]).

2) Van Est a démontré (cf. [8]) que lorsque G est un groupe de Lie connexe et K son compact maximal, alors $H(\underline{G},K)$ est isomorphe à la cohomologie des cochaînes continues de G. C'est d'ailleurs le cas en général si G/K est contractile.

Un <u>problème fondamental</u> est de savoir dans quelle mesure l'homomorphisme φ est injectif. (On ne peut espérer que φ soit surjectif : si G est par exemple le groupe des translations R de la droite, alors $H^1(\underline{R})$ est le groupe des homomorphismes continus de R dans R, alors que $H^1(BR^\delta)$ est le groupe de tous les homomorphismes de R dans R.)

Plus précisément, étant donné un élément $\alpha \in H^q(\underline{G},K)$, on peut se demander quelles sont les valeurs possibles que prend $\varphi(\alpha)$ sur les classes d'homologie entière de $B(G^\delta,K)$.

Examinons quelques cas particuliers.

a) Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe et soit K un sous-groupe compact.

THÉORÈME (Borel-Selberg, etc...).- <u>L'homomorphisme</u> $\varphi : H(\underline{G},K) \to H(B(G^\delta,K))$ <u>est injectif</u>.

D'après Borel [2], il existe un sous-groupe discret D de G tel que $D\backslash G$ soit compact. De plus D peut être choisi sans torsion (Selberg), de sorte que $D\backslash G/K = X$ est une variété compacte. Considérons le fibré E sur X de fibre G qui est le quotient de $G \times G$ par la relation d'équivalence qui identifie (g_1, g_2) à $(g_1 d, d^{-1} g_2 k)$, où $d \in D$ et $k \in K$. Un élément ω de $A(\underline{G},K)$

s'identifie à une forme sur G/K invariante par G, donc aussi à une forme sur X qui n'est autre que l'image de ω par φ. Une forme non nulle de dimension maximale de $A(\underline{G},K)$ est appliquée sur une forme volume de X.

Comme $H(\underline{G},K)$ vérifie une dualité de Poincaré (Koszul [14]), il en résulte que φ est injectif.

b) Soit G le groupe $\mathrm{Diff}^+ S^1$ des difféomorphismes de S^1 homotopes à l'identité et soit K le sous-groupe SO_2 des rotations ; il a le même type d'homotopie que G.

Ainsi $H(\underline{\mathrm{Diff}}^+ S^1, SO_2)$ s'envoie par φ dans la cohomologie de $\mathrm{Diff}^+ S^1$ considéré comme groupe abstrait (c'est-à-dire la cohomologie de BG^δ).

La classe χ décrite dans le § 1 s'envoie dans la classe d'Euler du fibré universel de fibre S^1 sur BG^δ qui est non triviale. Les puissances de χ ont-elles des images non nulles ?

Quant à la classe α (cf. § 1), Thurston a démontré [17] que son évaluation sur $H_2(BG^\delta, Z)$ définissait un homomorphisme surjectif sur R, et qu'il en était de même pour toutes ses puissances.

Plus généralement, on peut poser le problème suivant. Prendre pour G le groupe des difféomorphismes de S^n et pour K le sous-groupe des rotations SO_{n+1}, c'est considérer la catégorie des fibrés en sphères S^n, associés à un fibré vectoriel, et avec un feuilletage transverse aux fibres.

Que peut-on dire sur la classe d'Euler et les classes de Pontryagin réelles d'un tel fibré (cf. diagramme de la remarque 1) ?

II. Feuilletages

1. L'algèbre de Lie d'un pseudogroupe de Lie

Soit G un pseudogroupe de Lie agissant transitivement sur une variété différentiable M. On peut définir comme précédemment la notion de G-champs de vecteurs définis sur des ouverts de M.

Soit 0 un point base dans M. Les k-jets en 0 des G-champs de vecteurs forment un espace vectoriel $\underline{G}^k$. Ce n'est pas une algèbre de Lie car le k-jet du crochet dépend du $(k+1)$-jet des composantes. Mais la limite inverse $\underline{G} = \lim \underline{G}^k$ est une algèbre de Lie appelée l'algèbre de Lie de G, ou plus précisément des G-champs de vecteurs formels.

On désignera par $A(\underline{G})$ la limite inductive des algèbres $A(\underline{G}^k)$ des formes multilinéaires alternées sur $\underline{G}^k$. Cette algèbre est munie d'une différentielle d définie formellement comme dans I,1. Sa cohomologie sera désignée par $H(\underline{G})$.

Les k-jets en 0 des éléments de G forment une variété différentiable J_0^kG qui est un fibré sur M par la projection but. De plus, soit G_0^k le groupe de Lie des jets d'ordre k en 0 des éléments de G laissant fixe 0. Alors G_0^k opère sur J_0^kG à droite par composition des jets et en fait un fibré principal de groupe G_0^k. De plus G opère à gauche comme pseudogroupe de transformations de J_0^kG.

Nous désignerons par $J_0^\infty G$ la limite inverse des J_0^kG.

Par définition, une application d'une variété X dans $J_0^\infty G$ est différentiable si sa projection dans chaque J_0^kG est différentiable. On pourra aussi considérer $J_0^\infty G$ comme un fibré G_0^∞-principal sur lequel G opère à gauche.

Définissons l'algèbre $A(J_0^\infty G)$ des formes différentielles sur $J_0^\infty G$ comme la limite directe des algèbres $A(J_0^kG)$ des formes différentielles sur J_0^kG.

<u>L'algèbre</u> $A(\underline{G})$ <u>est canoniquement isomorphe à l'algèbre des formes différentielles sur</u> $J_o^\infty G$ <u>invariantes par l'action à gauche de</u> G . <u>Cet isomorphisme commute avec la différentielle.</u>

Pour définir cet isomorphisme, il faut remarquer que l'espace vectoriel $\underline{G}$ limite inverse des jets des G-champs de vecteurs en 0 s'identifie à l'espace tangent à $J_o^\infty G$ en l'identité (limite inverse des espaces tangents aux $J_o^k G$ en l'identité). Si $z \in J_o^k G$ et si g est un élément de G défini dans un voisinage du but de z , alors on obtient par composition à gauche par g un difféomorphisme d'un voisinage de z sur un voisinage $g.z$ dont la dérivée en z ne dépend que du jet d'ordre $k+1$ de g .

On peut également construire un sous-groupe compact K de G_o^∞ jouant le rôle de <u>compact maximal</u>. Ce sous-groupe K est isomorphe à la limite inverse de sous-groupes compacts maximaux K^r de G_o^r qui sont tous isomorphes à K^1 (on suppose que G_o^1 n'a qu'un nombre fini de composantes connexes), car le noyau de $G_o^{r+1} \to G_o^r$ est un espace vectoriel pour $r \geq 1$. Pour tout r , G_o^r/K^r est contractile.

K opère par la représentation adjointe sur $A(\underline{G})$. On désignera par $A(\underline{G},K)$ le sous-complexe des formes invariantes par les éléments de K et annulées par les produits intérieurs par les éléments de $\underline{K}$. Son algèbre de cohomologie sera notée $H(\underline{G},K)$.

2. G-<u>feuilletage sur</u> X <u>et homomorphisme caractéristique</u> : $H(\underline{G},K) \to H(X)$

Soit X une variété différentiable et G un pseudogroupe de Lie opérant transitivement sur M .

Un G-<u>feuilletage</u> F sur X est un ensemble maximal de submersions f_U d'ouverts U de X dans M , les U formant un recouvrement de X et les f_U

vérifiant la condition de compatibilité suivante : pour tout $x \in U \cap V$, il existe un élément g_{UV} de G tel que

$$f_U = g_{UV} f_V \qquad \text{dans un voisinage de } x .$$

Les f_U sont les projections locales de F .

Une application différentiable f d'une variété X' dans X est dite transverse à F si les applications $f_U f$ sont des submersions. Ce sont alors des projections locales d'un G-feuilletage sur X' appelé l'image inverse $f^{-1}F$ de F par f . L'application f est alors un morphisme de $f^{-1}(F)$ sur F . Avec cette notion, les G-feuilletages forment une catégorie $F(G)$.

$H(X)$ désignera toujours la cohomologie à coefficients réels.

THÉORÈME.- <u>Pour tout</u> G-<u>feuilletage</u> F <u>sur</u> X, <u>il existe un homomorphisme</u>

$$\varphi(F) : H(\underline{G},K) \to H(X)$$

<u>fonctoriel</u>, <u>c'est-à-dire si</u> $f : X' \to X$ <u>est transverse à</u> F , <u>alors</u>

$$f^*\varphi(F) = \varphi(f^{-1}F) .$$

<u>Démonstration</u>. Soit J^kF le fibré sur X dont la fibre au-dessus de x est la variété des k-jets en x des projections locales f_U de F appliquant x sur 0 . C'est un fibré différentiable principal de groupe G_0^k (qui opère par composition à gauche). Sa restriction à U est isomorphe au fibré induit de J_0^kG par f_U : si g est un élément de G appliquant 0 sur $f_U(x)$, au couple formé de x et du k-jet de g en 0 correspond le k-jet en x de $g^{-1}f_U$. Par ces isomorphismes locaux, les formes différentielles sur J_0^kG invariantes par G se transportent sur des formes différentielles définies globalement sur J^kF .

Si l'on désigne par $A(J^\infty F)$ la limite directe de l'algèbre des formes différentielles sur J^kF , on obtient un homomorphisme injectif φ de $A(\underline{G})$ dans

$A(J^\infty F)$, qui commute avec les différentielles, et avec l'action de K . Or les formes différentielles K-basiques sur $J^k F$ s'identifient aux formes différentielles sur le quotient de $J^k F$ par K qui est un fibré sur X de fibre contractile. Par le théorème de de Rham, la cohomologie de cette algèbre est isomorphe à $H(X)$. L'homomorphisme $\varphi(F)$ est ainsi obtenu par composition

$$H(\underline{G},K) \to H(A(J^\infty F),K) \to H(X) .$$

De manière équivalente (et pour montrer l'analogie avec I,2,3), on peut toujours réduire le groupe structural G_o de $J^\infty F$ au sous-groupe K , (et deux telles réductions sont homotopes). Cela revient à se donner un recouvrement $\{V\}$ de X et des sections locales $\psi_V : V \to J^\infty F$ telles que $\psi_{V'} = k_{V'V}\psi_V$, où $k_{V'V}$ est une application différentiable de $V \cap V'$ dans K . Si f_U est une projection locale de F , il existe alors une application différentiable h_{UV} de $U \cap V$ dans $J^\infty_o G$ telle que $h_{UV}(x)\psi_V(x) =$ jet de f_U en x . Si $f_{U'}$ est une autre projection locale de F telle que $f_{U'} = g_{U'U}f_U$ et si $\gamma_{U'U}(x)$ désigne le jet de $g_{U'U}$ au point $f_U(x)$, on a la formule

$$h_{U'V'}(x) = \gamma_{U'U}(x)\ h_{UV}(x)\ k_{VV'}(x) .$$

Ainsi en identifiant $\omega \in A(\underline{G},K)$ à une forme invariante sur $J^\infty_o G$, on peut définir $\varphi(\omega)$ comme l'unique forme sur X dont la restriction à chaque $U \cap V$ est $h^*_{UV}(\omega)$. (Comparer avec I,3.)

Remarques.- 1) On peut toujours trouver un relèvement différentiable de $J^1(F)$ dans $J^\infty F$, unique à homotopie près. On obtient ainsi un homomorphisme bien défini $H(\underline{G}) \to H(J^1 F)$. Si le fibré normal à F est trivialisé (en tant que G^1_o-fibré), cela revient à se donner une section σ de $J^1 F$ au-dessus de X . On obtient alors par composition un homomorphisme

$$\varphi : H(\underline{G}) \to H(X)$$

qui est caractéristique pour les G-feuilletages avec fibré normal trivialisé.

2) Soit G' un sous-pseudogroupe de G transitif sur M . On peut choisir le compact maximal K' de G'_o contenu dans K . Un G'-feuilletage F sur X est aussi un G-feuilletage et l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H(\underline{G},K) & \rightarrow & H(\underline{G}',K') \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & H(X) . & \end{array}$$

3. Microfibrés feuilletés et classifiants

Pour interpréter ce qui précède en termes de classifiants, il faut considérer la catégorie plus grande des microfibrés.

Un microfibré G-feuilleté sur une variété X est la donnée d'une variété E munie d'une submersion $p : E \rightarrow X$, d'une section $i : X \rightarrow E$ de p et d'un G-feuilletage complémentaire aux fibres. Si l'on se restreint à un voisinage E' de $i(X)$, les microfibrés E et E' seront considérés comme isomorphes.

On définit de manière évidente l'image inverse de E par une application différentiable f de X' dans X , la notion de morphisme qui en découle et enfin celle d'homotopie comme dans I,2.

De plus, à tout G-feuilletage $\mathbf{F}$ sur X , on peut associer un G-microfibré E sur X , unique à isomorphisme près, et tel que F soit l'image inverse par i du G-feuilletage de E .

Un G-microfibré (ou un G-feuilletage) admet un groupoïde topologique structural Γ . C'est le groupoïde des germes des éléments de G aux divers points de M . On le munit de la topologie des germes de sorte que Γ est étalé sur M par la projection source ou but (c'est l'analogue pour les G-fibrés de G muni de la topologie discrète).

Les constructions classiques des classifiants pour les groupes topologiques se généralisent facilement aux groupoïdes topologiques (cf. [16] ou [12]). Ainsi à tout groupoïde topologique Γ est associé fonctoriellement un espace $B\Gamma$. Les classes d'homotopie de microfibrés G-feuilletés sur X correspondent bijectivement aux classes d'homotopie de X dans $B\Gamma$. A noter que si l'on restreint Γ à un voisinage de 0 , le type d'homotopie de $B\Gamma$ n'est pas changé (on suppose G transitif).

L'homomorphisme caractéristique $H(\underline{G},K) \to H(X)$ étant défini fonctoriellement pour les microfibrés G-feuilletés (on compose l'homomorphisme défini en 2 avec i^*), il provient d'un homomorphisme universel

$$\varphi : H(\underline{G},K) \to H(B\Gamma) .$$

On peut associer à G d'autres groupoïdes topologiques, tel que le groupoïde J^kG des jets d'ordre k avec sa topologie de variété fibrée sur M , ou la limite $J^\infty G$ des J^kG (c'est l'analogue pour un groupe G de difféomorphismes de M de G muni de sa structure différentiable), ou encore le groupe G_0^k des k-jets des éléments laissant fixe 0 . Les classifiants de ces groupoïdes sont tous du même type d'homotopie que BK .

On a une application naturelle de $B\Gamma \to BK$ à l'homotopie près (via $BJ^\infty G$), et un homomorphisme

$$H(\underline{G}) \to H(F\Gamma) ,$$

où $F\Gamma$ est la fibre homotopique de $B\Gamma \to BK$.

Remarque.- Modulo des définitions convenables, on doit pouvoir interpréter $H(\underline{G},K)$ comme la cohomologie continue de Γ .

4. Le cas du pseudogroupe des difféomorphismes de R^n

Nous désignerons par $\mathfrak{a}_n$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels sur R^n . Elle correspond au pseudogroupe G_n de tous les difféomorphismes de R^n . Le compact maximal est alors le groupe orthogonal O_n (ou SO_n si l'on se restreint au pseudogroupe G_n^+ des difféomorphismes qui préservent l'orientation).

En faisant correspondre à un champ de vecteurs formel sa partie linéaire, on obtient une projection de $\mathfrak{a}_n$ sur la sous-algèbre $g\ell_n$ qui est l'algèbre de Lie des automorphismes linéaires de R^n . Ainsi l'algèbre $A(\mathfrak{a}_n)$ est munie d'une $g\ell_n$-connection (pour ces notions, cf. H. Cartan [6]).

L'algèbre universelle pour cette catégorie est l'algèbre de Weil $W(g\ell_n)$ dont nous rappelons la définition. En tant qu'algèbre, c'est le produit tensoriel de l'algèbre $A(g\ell_n)$ des formes multilinéaires alternées sur $g\ell_n$ par l'algèbre $S(g\ell_n)$ des formes multilinéaires symétriques sur $g\ell_n$. Une forme q-linéaire alternée (resp. symétrique) sera de degré q (resp. $2q$).

Soit $\omega^i_j \in A^1(g\ell_n)$ (resp. $\Omega^i_j \in S^1(g\ell_n)$) la base duale de la base canonique de $g\ell_n$. La différentielle d dans $W(g\ell_n)$ est l'unique antidérivation de carré nul telle que

$$d\omega^i_j = -\Sigma\, \omega^i_k \wedge \omega^k_j + \Omega^i_j$$

ce qui implique

$$d\Omega^i_j = \Sigma\, \Omega^i_k \wedge \omega^k_j - \Sigma\, \omega^i_k \wedge \Omega^k_j \,.$$

$W(g\ell_n)$ est une $g\ell_n$-algèbre, c'est-à-dire que $g\ell_n$ opère sur $W(g\ell_n)$ par la représentation adjointe et par les produits intérieurs.

La connection dans $\mathfrak{a}_n$ définit un homomorphisme de $g\ell_n$-algèbres différentielles $W(g\ell_n) \to A(\mathfrak{a}_n)$, ω^i_j étant appliqué sur la forme qui associe à $\xi \in \mathfrak{a}_n$ le coefficient d'indice $\binom{i}{j}$ de sa partie linéaire.

On constate d'abord que cet homomorphisme s'annule sur l'idéal engendré par les éléments de $S(g\ell_n)$ de degré $> 2n$. Le quotient de $W(g\ell_n)$ par cet idéal sera appelé l'algèbre de Weil tronquée $\hat{W}(g\ell_n)$. L'homomorphisme précédent se factorise donc en une injection

$$i : \hat{W}(g\ell_n) \to A(\mathfrak{a}_n)\,.$$

THÉORÈME (Gelfand-Fuchs [10]).- <u>L'homomorphisme</u> i <u>induit un isomorphisme sur la cohomologie</u>

$$H(\hat{W}(g\ell_n)) = H(\mathfrak{a}_n)\,.$$

La cohomologie de $\hat{W}(g\ell_n)$ se calcule aisément. On sait que l'algèbre $W(g\ell_n)$ est acyclique en degré > 0. Les éléments $g\ell_n$-basiques dans $W(g\ell_n)$ sont les invariants symétriques $I(g\ell_n)$, c'est-à-dire les polynômes dans les

Ω^i_j invariants par la représentation adjointe. C'est l'algèbre des polynômes $R[c_1,\ldots,c_n]$, où c_i désigne le terme de degré $2i$ dans le déterminant de la matrice $1 + 1/2\pi\Omega$.

Soient u_i des éléments de $W(g\ell_n)$ tels que $du_i = c_i$. Les images des u_i et c_i dans $\hat{W}(g\ell_n)$ seront désignées par la même lettre.

Soit W_n le produit tensoriel de l'algèbre extérieure $E(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ dans les générateurs $u_1,\ldots,u_n$ par l'algèbre $\hat{R}[c_1,\ldots,c_n]$ quotient de l'algèbre $R[c_1,\ldots,c_n]$ par l'idéal des termes de degré $> 2n$. Dans W_n , on définit une différentielle en posant $du_i = c_i$.

THÉORÈME.- <u>L'inclusion</u> $W_n \to \hat{W}(g\ell_n)$ <u>induit un isomorphisme sur la cohomologie.</u>

Pour le vérifier, on filtre ces deux complexes en utilisant le degré du second facteur du produit tensoriel et on considère les suites spectrales associées. Pour $\hat{W}(g\ell_n)$, c'est celle de Hochschild-Serre [13] (elle se généralise sans autre hypothèse au cas d'une $g\ell_n$-algèbre réductive avec connection). Le terme E_2 pour W_n s'identifie à W_n , alors que celui de $\hat{W}(g\ell_n)$ est isomorphe à $H(g\ell_n) \otimes \hat{R}[c_1,\ldots,c_n]$. Comme la projection naturelle de $E(u_1,\ldots,u_n)$ dans $A(g\ell_n)$ induit un isomorphisme sur la cohomologie, il suffit d'appliquer un théorème de comparaison.

J. Vey a déterminé une base de $H(W_n)$. Les éléments de la forme $u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_t} \otimes c_{j_1} \otimes \ldots \otimes c_{j_s}$ où $i_1 < \ldots < i_t$, $j_1 \leq \ldots \leq j_s$ et $|j| = \Sigma j_r \leq n$ forment une base de W_n . En prenant ceux pour lesquels $i_1 \leq j_1$ et $i_1 + |j| > n$, leur classe de cohomologie forment une base additive de $H(W_n)$.

Il en résulte par exemple que la structure multiplicative de $H(W_n)$ est triviale car $|j| > n/2$.

<u>Calcul de</u> $H(\mathfrak{a}_n , O_n)$ <u>et</u> $H(\mathfrak{a}_n , SO_n)$

L'algèbre $\hat{W}(g\ell_n)$ est aussi une O_n-algèbre. La sous-algèbre de ses éléments O_n-basiques sera désignée par $\hat{W}(g\ell_n , O_n)$.

D'après le théorème de Gelfand-Fuchs, l'inclusion de $\hat{W}(g\ell_n , O_n)$ dans $A(\mathfrak{a}_n , O_n)$ induit un isomorphisme sur la cohomologie (utiliser la suite spectrale de Hochschild-Serre).

Pour i impair, on peut prendre pour u_i des éléments O_n-basiques. Soit WO_n le sous-complexe de W_n qui est le produit tensoriel de $E(u_1,u_3,\ldots) \otimes \hat{R}[c_1,c_2,\ldots,c_n]$. (Les indexes des u_i sont impairs.)

THÉORÈME.- <u>L'inclusion de</u> WO_n <u>dans</u> $A(\mathfrak{a}_n , O_n)$ <u>induit un isomorphisme</u>

$$H(WO_n) = H(\mathfrak{a}_n , O_n) .$$

La SO_n-connection canonique sur $A(\mathfrak{a}_n)$ permet de définir pour n pair la classe d'Euler $\chi \in H^n(\mathfrak{a}_n , SO_n)$.

THÉORÈME.-

$$H(\mathfrak{a}_n , SO_n) = \begin{cases} H(WO_n) , & n \text{ impair} \\ H(WO_n)[\chi]/(\chi^2 - c_n) , & n \text{ pair.} \end{cases}$$

Vey a également déterminé une base additive de $H(WO_n)$.

Les éléments c_{2i} engendrent dans $H(\mathfrak{a}_n , O_n)$ un sous-anneau isomorphe à $\hat{R}[c_2,c_4,\ldots]$ et par $\varphi(F)$ les éléments c_{2i} sont envoyés sur les classes de Pontryagin p_i du fibré normal du feuilletage F sur X . C'est le théorème d'annulation de Bott.

L'invariant de Godbillon-Vey [11] correspond à l'image par $\varphi(F)$ de $u_1c_1^n$.

<u>Description explicite de l'homomorphisme caractéristique</u> $\varphi(F) : H(\mathfrak{a}_n , O_n) \to H(X)$

D'après le théorème de Gelfand-Fuchs, il suffit de construire un homomorphisme de $\hat{W}(g\ell_n , O_n)$ dans $A(X)$. Comme le sous-complexe $\hat{W}(g\ell_n)$ de $A(\mathfrak{a}_n)$ ne dépend que du jet d'ordre 2 des champs de vecteurs, il suffira de supposer que le feuilletage F sur X est de classe C^2.

Sur $J^1(F)$, qui est le fibré principal associé au fibré normal de F, on a canoniquement n formes $\omega^1,\ldots,\omega^n$ qui forment un système complètement intégrable correspondant au feuilletage image inverse de F par la projection sur X. Sur $J^2(F)$, on a n^2 formes ω^i_j canoniquement définies et qui correspondent aux formes ω^i_j de $A(\mathfrak{a}_n)$ ou de $\hat{W}(g\ell_n)$. Le choix de formes θ^i_j sur J^1F telles que

$$d\omega^i = -\Sigma\, \theta^i_k \wedge \omega^k$$

correspond exactement au choix d'une section $\sigma : J^1F \to J^2F$ (par la correspondance $\theta^i_j = \sigma^*(\omega^i_j))$. Cette section est invariante par l'action de GL_n si et seulement si θ^i_j est transformé suivant l'action adjointe de GL_n, c'est-à-dire si c'est la 1-forme d'une connection.

Il existe un homomorphisme unique de $\hat{W}(g\ell_n)$ dans $A(J^1F)$ appliquant ω^i_j sur θ^i_j. Comme il commute avec l'action de GL_n, il donne par restriction un homomorphisme de $\hat{W}(g\ell_n, O_n)$ dans $A(J^1F/O_n)$, d'où en passant à la cohomologie, l'homomorphisme $\varphi(F)$.

<u>Le cas complexe</u>. Soit G^C_n le pseudogroupe dont les éléments sont les automorphismes holomorphes des ouverts de C^n sur des ouverts de C^n, et soit $\mathfrak{a}^C_n$ son algèbre de Lie de champs de vecteurs formels. Dans ce cas le compact maximal est le groupe unitaire U_n.

Le calcul de Gelfand-Fuchs s'applique sans changement à ce cas. Nous nous bornons à énoncer le résultat. Soit $\omega^i_j \in A^1(\mathfrak{a}^C_n) \otimes \mathbb{C}$ la 1-forme associant au champ de vecteurs complexes la composante d'indice (i,j) de sa partie linéaire, et soit $\Omega^i_j = d\omega^i_j + \Sigma\, \omega^i_k \wedge \omega^k_j$.

Soit c_i la composante de degré $2i$ du déterminant de la matrice $(I + \sqrt{-1}/2\pi\,\Omega)$, et $\bar{c}_i$ la forme conjuguée. Il existe des formes $u_i \in A^{2i-1}(\mathfrak{a}_n^{C}, U_n) \otimes \mathbf{C}$ telles que $du_i = c_i - \bar{c}_i$.

Soit alors WU_n le complexe $\hat{\mathbf{C}}[c_1,\dots,c_n] \otimes E(u_1,\dots,u_n) \otimes \hat{\mathbf{C}}[\bar{c}_1,\dots,\bar{c}_n]$ muni de la différentielle $du_i = c_i - \bar{c}_i$.

THÉORÈME.- <u>L'homomorphisme naturel</u> $WU_n \to A(\mathfrak{a}_n^{C}, U_n) \otimes \mathbf{C}$ <u>induit un isomorphisme en cohomologie</u> :

$$H(\mathfrak{a}_n^{C}, U_n) \otimes \mathbf{C} = H(WU_n) .$$

Par l'homomorphisme caractéristique du G_n^{C}-feuilletage complexe F , les c_i sont appliqués sur les classes de Chern du fibré normal de F .

5. Problèmes et résultats

Soit Γ le groupoïde des germes des éléments d'un pseudogroupe de Lie G . Etudier les propriétés homotopiques des G-feuilletages est équivalent à étudier celles du classifiant $B\Gamma$. Comme dans I,3, une question fondamentale est de savoir quelles peuvent être les valeurs prises par les images de $\varphi : H(\underline{G},K) \to H(B\Gamma)$ sur les classes d'homologie entières de $B\Gamma$.

Soit Γ_n (resp. Γ_n^+) le groupoïde des germes de difféomorphismes locaux (resp. respectant l'orientation) de R^n . On peut essayer, comme l'avait fait Roussarie pour la codimension 1 (cf. [11]), de tester les classes caractéristiques sur des feuilletages obtenus en prenant le quotient par un sous-groupe discret d'un feuilletage homogène.

Soit donc G un groupe de Lie et soit H un sous-groupe connexe de codimension n . L'action de G sur un voisinage de H dans G/H définit un pseudogroupe de Lie sur R^n dont le groupoïde des germes sera noté $\Gamma_{G,H}$. L'algèbre de Lie de ce pseudogroupe n'est autre que l'algèbre de Lie $\underline{G}$ de G et le rôle du sous-groupe compact est joué par le compact maximal K de H .

On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H(\underline{G},K) & \leftarrow & H(\mathfrak{a}_n , SO_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(B\Gamma_{G,H}) & \leftarrow & H(B\Gamma_n^+) \end{array} .$$

Comme on l'a vu (cf. I,3), si G est semi-simple, la première flèche verticale est injective. Ainsi un élément de $H(\mathfrak{a}_n , SO_n)$ qui a une image non nulle dans $H(\underline{G},K)$ aura aussi une image non nulle dans $H(B\Gamma_n^+)$.

On peut prendre par exemple pour G le groupe $SL_{n+1}(R)$ agissant sur S^n identifié aux rayons de R^{n+1} . Ou bien le groupe $SO(1 , n+1)$ agissant sur les rayons du cône $x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_{n+2}^2 = 0$.

On peut montrer ainsi que plusieurs classes sont envoyées par φ non trivialement dans $H(B\Gamma_n^+)$. Pour $n = 2$ par exemple, les classes $u_1 c_1^2$ et $u_1 c_2$ sont linéairement indépendantes. Mais on est encore bien loin de pouvoir montrer l'injectivité de φ .

Dans le cas complexe, la situation est plus satisfaisante. Par exemple, Bott avait démontré [3] que les classes $u_1 c^\alpha$, où c^α est un monôme de degré $2n$ dans les c_i , pouvaient prendre indépendamment n'importe quelle valeur complexe.

Dans le cas réel, Thurston [17] a démontré qu'il existait une famille à 1 paramètre de feuilletages de codimension 1 sur une variété compacte de dimension 3 pour lequel l'invariant de Godbillon-Vey $u_1 c_1$ intégré sur M pouvait prendre toutes les valeurs réelles. (C'est le même exemple que celui cité en I,3, la classe β correspondant à $u_1 c_1$.)

En utilisant les techniques de Chern-Simons [7], on peut montrer en revanche la rigidité de certaines classes de WO_n . (C'est ce qu'a annoncé notamment J. Heitsch.)

Thurston a également annoncé qu'il pouvait généraliser les méthodes de Mather (cf. [15]) en codimension supérieure à 1 . Il en déduit en particulier qu'il existe des feuilletages de codimension 2 pour lequel la première classe de Pontrjagin réelle (c_2 dans notre notation) est non nulle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNSTEIN-ROSENFELD - Sur les classes caractéristiques des feuilletages, Funct. Anal. 6 (1972), 68-69.

[2] BOREL - Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces, Topology 2 (1963) 111-122.

[3] BOTT - On a topological obstruction to integrability, Proc. Int. Congress, Nice, 1970, 27-36.

[4] BOTT - The Lefschetz formula and exotic characteristic classes, Proc. of the Diff. Geometry Conf., Roma (1971).

[5] BOTT-HAEFLIGER - On characteristic classes of -foliations, à paraître au Bull. AMS.

[6] CARTAN - Notions d'algèbre différentielle, etc., Colloque de Topologie, Bruxelles (1950), 15-27, et 57-71.

[7] CHERN-SIMONS - Some cohomology classes in principal fiber - bundles and their applications to Riemannian geometry, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, 68 (1971), 791-4.

[8] VAN EST - Une application d'une méthode de Cartan-Leray, Indag. Math. 17 (1955), 542-4.

[9] GELFAND-FUCHS - The cohomology of the Lie algebra of tangent vector fields of a smooth manifold, I et II, Funct. Anal., 3 (1969), 32-52, et 4 (1970), 23-32.

[10] GELFAND-FUCHS - The cohomology of the Lie algebra of formal vector fields, Izv. Akad. Nauk SSSR, 34 (1970), 322-337.

[11] GODBILLON-VEY - Un invariant des feuilletages de codimension un, C.R. Acad. Sc. Paris, Juin 1971.

[12] HAEFLIGER - Homotopy and integrability, Amsterdam 1971, Springer, Lecture Notes, n° 197.

[13] HOCHSCHILD-SERRE - Cohomology of Lie algebras, Annals of Math, 57 (1953), 591-603.

[14] KOSZUL - Homologie et cohomologie des algèbres de Lie, Bull. Soc. Math. de France, 78 (1950), 65-127.

[15] MATHER - On Haefliger's classifying space I, Bull. AMS, 77 (1971), 1111-1115.

[16] SEGAL - Classifying spaces and spectral sequences, I.H.E.S., Public. Math., 34 (1968), 105-112.

[17] THURSTON - Non-cobordant foliations of S^3 .