MICHEL RAYNAUD

Compactification du module des courbes

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 385, p. 47-61
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1970-1971__13__47_0>

Séminaire BOURBAKI
23e année, 1970/71, n° 385 Novembre 1970

COMPACTIFICATION DU MODULE DES COURBES

par Michel RAYNAUD

Dans [11] Mumford a construit le schéma modulaire sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ des courbes lisses de genre $g \geq 2$. Plus récemment Mumford et Deligne ont montré comment on pouvait compactifier ce schéma en étudiant les familles de courbes de genre g ayant certaines singularités d'un type très simple : les courbes stables [4]. On peut déduire de ce résultat l'irréductibilité du module des courbes lisses de genre g sur un corps de caractéristique $p > 0$.

L'exposé comprend deux parties. Dans la première on étend aux courbes stables certains résultats bien connus dans le cas des courbes lisses (plongements canoniques, déformations ...). Dans la seconde partie, on montre que l'espace modulaire des courbes stables est propre sur $\mathbf{Z}$. Pour cela on vérifie le critère valuatif de propreté, ce qui nous amène à étudier le problème de la réduction d'une courbe lisse, donnée au-dessus du corps des fractions d'un anneau de valuation discrète. Dans [4], on déduit les propriétés de réduction des courbes d'un théorème sur la réduction les variétés abéliennes (obtenu par Grothendieck à l'aide de cohomologie étale [7] et par Mumford en utilisant sa théorie des fonctions thêta). Dans cet exposé nous avons adopté la démonstration "élémentaire", de nature combinatoire, due à M. Artin et G. Winters [3].

Dans la suite g est un entier fixé ≥ 2.

I

DÉFINITION 1.- Soit S un schéma. Une S-courbe stable de genre g est un S-schéma C, propre, plat, dont les fibres géométriques $C_{\bar{s}}$ sont réduites, connexes, de dimension 1 et satisfont aux conditions suivantes :

(i) Les singularités de $C_{\bar{s}}$ sont des points doubles ordinaires.

(ii) Toute composante irréductible de $C_{\bar{s}}$, isomorphe à la droite projective, rencontre les autres composantes de $C_{\bar{s}}$ en au moins trois points.

(iii) On a $\dim_{k(s)} H^1(C_s , O_{C_s}) = g$.

I.1. Plongements canoniques.

Soit $\pi : C \to S$ une courbe stable de genre g . Alors C est une intersection complète relativement à S (EGA, IV, 19.3.6) et par suite, il existe sur C un faisceau inversible dualisant canonique $\omega_{C/S}$ [8] qui possède les propriétés suivantes :

a) La formation de $\omega_{C/S}$ commute à tout changement de base $S' \to S$.

b) Supposons que S est le spectre d'un corps algébriquement clos k . Soient C' le schéma normalisé de C , $z_1,\dots,z_n$ les points singuliers de C , (x_i , y_i) les points de C' au-dessus de z_i . Alors $\omega_{C/S}$ s'identifie au faisceau des formes différentielles méromorphes η sur C' , ayant au plus des pôles simples aux points x_i , y_i et telles que

$$\mathrm{res}_{x_i}(\eta) + \mathrm{res}_{y_i}(\eta) = 0 , \qquad i = 1,\dots,n .$$

c) Si $S = \mathrm{Spec}(k)$ et si F est un faisceau cohérent sur C , on a un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Ext}^i(C , F , \omega_{C/k}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(H^{1-i}(C,F) , k) .$$

On déduit facilement de ces propriétés le résultat suivant :

PROPOSITION 1.- Soit C une courbe stable sur un corps k . Alors $H^1(C , \omega_{C/k}^{\otimes n}) = 0$ pour $n \geq 2$ et $\omega_{C/k}^{\otimes n}$ est très ample pour $n \geq 3$.

Par suite, si $\pi : C \to S$ est une S-courbe stable de genre g , $\omega_{C/S}^{\otimes n}$ est très ample relativement à S et $\pi_*(\omega_{C/S}^{\otimes n})$ est localement libre sur S de rang $(2n - 1)(g - 1)$. Prenant $n = 3$, on voit que toute courbe stable C sur k , de genre g , admet un plongement tri-canonique dans l'espace projectif P^{5g-6} avec pour polynôme de Hilbert $P_g(n) = (6n - 1)(g - 1)$.

Notons Hilb le schéma de Hilbert sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ des sous-schémas fermés de P^{5g-6} , de polynôme de Hilbert $P_g(n) = (6n - 1)(g - 1)$. Soient H_1 le sous-schéma ouvert de Hilb relatif aux courbes stables de genre g , $\pi_1 : C_1 \to H_1$ la courbe stable universelle correspondante, ω_1 son faisceau dualisant relatif et $O_P(1)$ le faisceau très ample sur C_1 définissant le plongement dans P^{5g-6} . Enfin soit H le plus grand sous-schéma de H_1 au-dessus duquel $O_P(1)$ et $\omega_1^{\otimes 3}$ différent par l'image réciproque d'un faisceau inversible sur H . La courbe $\pi : C \to H$, restriction de π_1 au-dessus de H , est la courbe stable universelle de genre g munie d'un plongement tri-canonique. Le groupe projectif linéaire $PGL = PGL(5g - 6)$ opère sur H et le faisceau (pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte) associé au foncteur des courbes stables, est le faisceau quotient H/PGL .

I.2. Automorphismes et déformations des courbes stables.

Soient C une courbe stable sur un corps k et $\Omega_{C/k}$ le faisceau des différentielles. Le groupe des automorphismes infinitésimaux de C s'identifie à $\mathrm{Hom}(\Omega_{C/k} , O_C)$. Or on a le lemme :

LEMME 2.- $\mathrm{Hom}(\Omega_{C/k} , O_C) = 0$.

Autrement dit, tout champ de vecteurs D sur C est nul. En effet, un tel champ correspond à un champ D' sur la normalisée C' de C , qui s'annule au-dessus des points singuliers de C . Soit C_i' une composante irréductible de C' . On est alors dans l'un des trois cas suivants :

a) genre $(C_i') \geq 2$;

b) genre $(C_i') = 1$ et D' s'annule en un point de C_i' ;

c) genre $(C_i') = 0$ et D' s'annule en trois points de C_i' .

Dans chacun des trois cas, on a $D'|C_i' = 0$ et par suite $D = 0$.

Ceci étant, posons $R = k$ si k est de caractéristique 0 et $R = W(k)$ (anneaux des vecteurs de Witt de corps résiduel k) si k est de caractéristique $p > 0$. Compte tenu de ce qui précède et de [13], le foncteur des déformations infinitésimales de C est pro-représenté par une R-algèbre locale noethérienne complète $\mathcal{O}$, de corps résiduel k . Comme C est de dimension 1 , la courbe formelle au-dessus de $\mathcal{O}$, déformation universelle de C , est algébrisable et par suite correspond à une courbe stable X au-dessus de $\operatorname{Spec}(\mathcal{O})$. La courbe C est localement intersection complète et séparable sur k ; par suite, le complexe cotangent de C se réduit à $\Omega_{C/k}$. Par ailleurs, on déduit de la suite spectrale

$$H^p(C , \underline{Ext}^q(\Omega_{C/k} , O_C)) \Rightarrow Ext^{p+q}(C , \Omega_{C/k} , O_C)$$

que l'on a $Ext^2(C , \Omega_{C/k} , O_C) = 0$. Donc l'obstruction à l'existence de relèvements infinitésimaux de C est nulle [14] et $\mathcal{O}$ est une R-algèbre de séries formelles $R[[T_1,\ldots,T_N]]$ avec $N = \dim Ext^1(C , \Omega_{C/k} , O_C) = \dim H^0(C , \Omega_{C/k} \otimes \omega_{C/k}) = 3g - 3$.

Supposons k algébriquement clos et soient $z_1,\ldots,z_n$ les points singuliers de C . Le complété $\widehat{O}_{C,z_i}$ de O_{C,z_i} est isomorphe à $k[[x_i , y_i]]/x_iy_i$. La même théorie des déformations que plus haut, appliquée cette fois au cas local, donne une déformation universelle de $\widehat{O}_{C,z_i}$, isomorphe à $R[[x_i , y_i , t_i]]/x_iy_i - t_i$, au-dessus de l'anneau $\mathcal{O}_i = R[[t_i]]$. La considération des complétés des anneaux locaux de X aux points singuliers z_i de la fibre spéciale, permet de définir un morphisme canonique

$$\mathcal{O}_1 \hat{\otimes}_R \cdots {}_R\hat{\otimes}\, \mathcal{O}_n \xrightarrow{u} \mathcal{O} .$$

Au-dessus de k , l'application tangente à u s'identifie au morphisme canonique surjectif $\mathrm{Ext}^1(C , \Omega_{C/k} , O_C) \to H^0(C , \mathcal{E}xt^1(\Omega_{C/k} , O_C))$. Il en résulte que l'on peut identifier $\mathcal{O}$ à $R[[t_1,\ldots,t_n , u_1,\ldots,u_m]]$ $(m + n = 3g - 3)$, de façon que le complété de l'anneau local de X au point z_i soit isomorphe à $\mathcal{O}[[x_i , y_i]]/x_iy_i - t_i$. En particulier le lieu des fibres singulières de X dans $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ a pour équation $t_1\ldots t_n = 0$.

Remontant du module formel $\mathcal{O}$ au schéma H (I.1), on trouve :

COROLLAIRE 3.- Le schéma H est lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$, et le lieu dans H des fibres singulières de la courbe stable $\pi : C \to H$ est un diviseur relatif, à croisements normaux.

I.3. Critères valuatifs et théorème principal.

THÉORÈME 4.- Soient R un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel k algébriquement clos et K son corps des fractions.

1) Si X et X' sont deux R-courbes stables, à fibres génériques lisses, tout K-isomorphisme $u_K : X \otimes_R K \xrightarrow{\sim} X' \otimes_R K$ se prolonge (de manière unique) en un R-isomorphisme $u : X \xrightarrow{\sim} X'$.

2) Si X_K est une courbe stable, lisse sur K , alors X_K a "potentiellement" une réduction stable sur R . Cela signifie qu'il existe une extension finie K' de K telle que, si R' désigne la clôture intégrale de R dans K' , alors $X_K \otimes_K K'$ se prolonge en une R'-courbe stable X' .

Ce théorème est le point essentiel de la théorie des courbes stables ; sa démonstration fera l'objet de la seconde partie. Pour l'instant, notons que l'assertion 1) entraîne (compte tenu du fait que l'ouvert des courbes stables lisses est dense dans H (cor. 3)) que le graphe de l'action de PGL sur H est un fermé de $H \times H$. On peut alors définir canoniquement un espace algébrique quotient $M = H/PGL$ (au sens de [2] et [9]), normal et séparé, ayant pour espace annelé sous-jacent, l'espace annelé quotient de H par PGL. L'espace M est un "coarse moduli" ([11], § 2, 5.6) pour les courbes stables de genre g. L'assertion 2) nous dit alors que l'espace algébrique M satisfait au critère valuatif de propreté.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal :

THÉORÈME 5.- L'espace annelé quotient $H/PGL = M$ est un espace algébrique normal, propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ à fibres géométriquement irréductibles.

Prouvons la dernière assertion. Soit V l'ouvert de M correspondant aux courbes stables lisses. D'après [11] V est d'ailleurs un schéma quasi-projectif sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. Soit $\mathbf{C}$ le corps des complexes. Il est connu, par voie transcendante, que $V \times_{\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})} \mathrm{Spec}(\mathbf{C})$ est irréductible. Comme V est dense dans M (cor. 3), on en déduit que la fibre générique géométrique $M_{\overline{Q}}$ est irréductible et <u>a fortiori</u> connexe. D'autre part, le theorème de connexion de Zariski a été étendu par Knutson [9] au cas des espaces algébriques propres. Ainsi, pour tout nombre premier p, la fibre géométrique $M_{\overline{p}}$ de M au-dessus de p est connexe. Or l'espace topologique sous-jacent à $M_{\overline{p}}$ est le quotient de celui de $H_{\overline{p}}$ sous-l'action de PGL qui est un groupe algébrique connexe, donc $H_{\overline{p}}$ est connexe. Mais comme $H_{\overline{p}}$ est lisse (cor. 3), il est alors irréductible et il en est de même de son image $M_{\overline{p}}$.

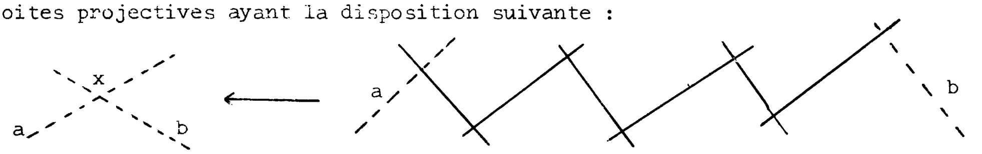
II. Réduction des courbes algébriques.

II.0. Complétant les notations introduites dans l'énoncé du théorème 4, on note z une uniformisante de R, η le point générique de $S = \mathrm{Spec}(R)$ et s le point fermé. Soit, d'autre part, X_η une courbe stable lisse au-dessus de η de genre g.

II.1. Courbes stables et modèles minimaux.

Considérons les S-schémas propres plats réguliers qui prolongent X_η. Il en existe d'après Abhyankar [1] et parmi ceux-ci, il en existe un et un seul à R-isomorphisme unique près, soit X, dont la fibre spéciale $\bar{X}$ ne contient pas de courbes exceptionnelles (droites projectives de self-intersection (-1)) : X est le R-modèle minimal de X_η ([10], [12]).

Soit maintenant C une R-courbe stable dont la fibre générique C_η est lisse et soit x un point singulier de la fibre spéciale $\bar{C}$. Le complété $\hat{O}_{C,x}$ de $O_{C,x}$ est isomorphe à $R[[x,y]]/xy - z^n$, pour un entier $n \geq 1$ convenable, de sorte que $O_{C,x}$ n'est pas régulier pour $n > 1$. L'éclatement de l'idéal maximal de $O_{C,x}$ est non singulier pour $n \leq 3$ et possède un seul point singulier si $n \geq 4$ dont l'anneau local complété est isomorphe à $R[[x,y]]/xy - z^{n-2}$. On peut donc désingulariser $O_{C,x}$ par une suite de $[n/2]$ éclatements du type précédent. De plus, la fibre au-dessus de x de la désingularisation est formée de $n - 1$ droites projectives ayant la disposition suivante :



Appliquant cette technique à chacun des points singuliers de $\bar{C}$, on obtient une désingularisation de C qui ne contient pas de courbes exceptionnelles, donc est un modèle minimal X de C_η . Réciproquement, la courbe stable C se déduit de X en contractant en un point les chaînes maximales connexes de $\bar{X}$ formées de droites projectives de self-intersection (-2) .

L'assertion 1) du théorème 4 résulte des remarques précédentes et de l'unicité du modèle minimal.

II.2. Etude combinatoire.

Soit X un R-schéma propre plat, régulier qui prolonge X_η . Notons C_i , $i = 1,\dots,n$, les composantes irréductibles de la fibre spéciale $\bar{X}$, r_i la multiplicité de C_i , K un diviseur canonique relatif sur X (i.e. $\omega_{X/S} \simeq O_X(K)$). Rappelons quelques propriétés de $\bar{X}$:

a) $\bar{X}$ est connexe et $r_i > 0$ pour tout i .

b) $(C_i.C_j) = (C_j.C_i) \geq 0$ pour $i \neq j$ et $(\bar{X}.C_i) = 0$ pour tout i .

c) Le genre $p(C_i)$ de C_i est un entier ≥ 0 égal à

$$\tfrac{1}{2}(\,(C_i)^2 + (C_i\,.\,K)\,) + 1 .$$

Ces conditions entraînent :

d) la matrice symétrique $(C_i.C_j)$ est négative dégénérée, les seuls diviseurs $Z = \Sigma\, s_i C_i$ tels que $(Z)^2 = 0$ étant des multiples rationnels de $\bar{X} = \Sigma\, r_i C_i$.

Nous dirons que la collection d'entiers $(n\,;\,(C_i.C_j)\,,\,(C_i.K)\,,\,r_i)$ considérée à une permutation près des indices $i = 1,\dots,n$ est le <u>type</u> de X . On peut abstraire la situation et appeler type , une collection d'entiers $(n\,,\,m_{ij}\,,\,k_i\,,\,r_i)$ satisfaisant aux conditions a), b), c) lorsqu'on introduit formellement des courbes C_i , un diviseur canonique K et que l'on pose

$$(C_i.K) = k_i \quad , \quad (C_i.C_j) = m_{ij} .$$

On pose aussi $\bar{X} = \Sigma\, r_i C_i$ et le genre g' d'un type T est égal à

$$1 + \tfrac{1}{2}(\bar{X}.K) \;=\; 1 + \tfrac{1}{2}(\Sigma\, r_i k_i)\ .$$

Soit T un type de genre g'. On déduit des conditions c) et d) que l'on peut ranger les courbes C_i en quatre classes :

(o) $(C^2) = 0$, $n = 1$, $p(rC) = g'$.

(i) $(C.K) = -1$, $(C^2) = -1$, $p(C) = 0$ (courbes exceptionnelles).

(ii) $(C.K) = 0$, $(C^2) = -2$, $p(C) = 0$.

(iii) $(C.K) \geq 1$, $(C^2) < 0$.

A chaque type T, on associe un graphe ayant les C_i pour sommets et tel que C_i soit joint à C_j $(j \neq i)$ par m_{ij} arêtes. La condition a) signifie alors que le graphe de T est connexe.

Considérons une chaîne du graphe de T

(*) x —— o ... o —— y

dans laquelle les sommets x, y et o ont la même multiplicité r et telle que si C_i est une courbe de sommet o, on ait $(C_i.K) = 0$. Autrement dit, C_i est une courbe de la classe (ii) et ses liaisons avec les autres sommets sont en évidence dans la chaîne (*). On obtient un autre type en oubliant les sommets o et en ajoutant une arête supplémentaire entre x et y. Nous dirons qu'un type T est réduit, si son graphe ne contient pas de chaînes (*) de longueur > 1 .

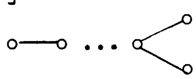
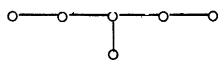
THÉORÈME 6.- Il n'existe qu'un nombre fini de types réduits, de genre $g \geq 2$, et ne contenant pas de courbes exceptionnelles.

Soient T un tel type, $C_1,\dots,C_s$ les courbes des classes (o) et (iii), $C_{s+1},\dots,C_n$ celles de la classe (ii), Γ le sous-graphe du graphe de T, de sommets $C_1,\dots,C_s$ et Θ une composante connexe du sous-graphe de sommets

$C_{s+1},\dots,C_n$.

On a $\sum_{i=1}^{s} r_i k_i = 2g - 2$, donc $s \geq 1$ et les nombres strictement positifs r_i et k_i sont bornés pour $i = 1,\dots,s$. Comme $p(C_i) \geq 0$, les nombres négatifs $m_{ii} = C_i^2$ sont bornés inférieurement et la condition $(C_i + C_j)^2 \leq 0$ entraîne que les nombres positifs m_{ij} $(i \neq j)$ sont bornés supérieurement pour $i = 1,\dots,s$. Bref, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour Γ .

Notons aussi Θ le diviseur $\sum_{C_i \in \Theta} r_i C_i$. Comme $s \geq 1$, il résulte de la condition d) que la matrice d'intersection des courbes de classe (ii) qui compose Θ est négative non dégénérée et par suite le graphe Θ est un diagramme de Dynkin de l'un des types suivants [6] :

(**) A_n  D_n  E_6  E_7 , E_8 .

Comme $(\Gamma.\Gamma)$ est borné inférieurement et $(\Gamma.\Theta) > 0$ (car $\bar{X}$ est connexe) on déduit de la relation

$$0 = (\bar{X}.\Gamma) = (\Gamma.\Gamma) + \sum_{\text{Composantes } \Theta} (\Theta.\Gamma)$$

que le nombre de composantes connexes telles que Θ et le nombre et la multiplicité des sommets de Θ liés à Γ sont bornés.

Une étude élémentaire des divers cas possibles montre alors qu'il n'y a qu'un nombre fini de types réduits.

Remarque 7.- La démonstration montre en fait que pour g fixé, le nombre et la multiplicité des chaînes maximales (*) extraites de T est borné et que pour tout entier N , il n'existe qu'un nombre fini de types dont les graphes ne contiennent pas de chaînes (*) de longueur $> N$.

Soient L le groupe libre de base $C_1,\dots,C_n$, L^* le groupe dual $\mathrm{Hom}(L,\mathbb{Z})$ et $x_1,\dots,x_n$ la base duale. A la forme d'intersection est associé le morphisme $u : L \to L^*$

$$C_i \longmapsto \Sigma\, m_{ij}x_j \ .$$

Notons G le groupe $\mathrm{coker}(u)$. L'hypothèse d) entraîne que G est de rang 1 . Pour tout entier $c > 0$, notons $\rho_c(G)$ le nombre minimum de générateurs nécessaires pour engendrer un sous-groupe de G , d'indice fini, divisant c .

THÉORÈME 8.- Il existe un nombre $c(g')$, ne dépendant que de g' , tel que, pour tout type T de genre g' , sans composantes exceptionnelles, on ait :

(***) $\qquad \rho_c(G) \leq 1 + \beta$

où β désigne le premier nombre de Betti du graphe de T .

On note que G et β sont inchangés si on divise les r_i par leur pgcd. On traite alors sans difficulté le cas où $g' = 0$ ou 1 . Par ailleurs, si C_n est une courbe exceptionnelle de T , on définit le type T' déduit de T par contraction de C_n en gardant les sommets distincts de C_n avec leurs multiplicités et en remplaçant m_{ij} par $m'_{ij} = m_{ij} + m_{in}m_{jn}$ et k'_i par $k_i + m_{in}$ pour $i , j \neq n$. On vérifie que $G(T') \simeq G(T)$, d'autre part $\beta(T) = \beta(T')$ si C_n est rattachée à un seul sommet.

Ces remarques étant faites, on note que si E est une chaîne maximale (*) de T de longueur ≥ 3

$$E \ : \ x \text{ — } o \ \dots \ o \text{ — } y$$

et si T' est le graphe déduit de T en remplaçant E par

(*) $\qquad x \text{ — } e \qquad e \text{ — } y$

où e désigne une courbe exceptionnelle, alors si l'inégalité (***) est vraie pour T' avec un entier c' , elle est aussi vraie pour T avec un entier c qui ne dépend que de c' et de la multiplicité r de E . Soit T_o le type, déduit de

T en remplaçant chacune des chaînes maximales E de longueur ≥ 3 par (*) ; il résulte facilement de la remarque 7 qu'il n'y a qu'un nombre fini de types T_o possibles pour T de genre g' fixé. On termine alors la démonstration, par récurrence sur le nombre de chaînes E en utilisant encore la remarque 7.

II.3. Démonstration du théorème 4 2).

Dans ce numéro, on suppose que X est un R-schéma propre, plat, régulier, dont la fibre générique X est une courbe stable lisse de genre g et tel que le pgcd des multiplicités r_i des composantes C_i de la fibre spéciale $\bar{X}$ soit égal à 1 .

PROPOSITION 9.- On a un diagramme exact canonique :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \mathrm{Pic}^{o}(X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & H \arrow[d, dashed] & \\
L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Pic}(X) \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\mu"] & \mathrm{Pic}(X_\eta) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
L \arrow[r, "u"] & L^* \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

On a noté λ l'application $C_i \mapsto O_X(C_i)$; ν est la restriction à la fibre générique, elle est surjective car X est régulier ; le noyau de ν provient des diviseurs à support dans $\bar{X}$, d'où l'exactitude de la 2ème ligne. On définit μ par la formule $\mu(\mathcal{L})(C_i) = (\mathcal{L}.C_i)$. Comme R est complet à corps résiduel algébriquement clos on voit facilement que μ est surjectif, son noyau est le sous-groupe $\mathrm{Pic}^{o}(X)$ de $\mathrm{Pic}(X)$ formé des faisceaux inversibles algébriquement équivalent à 0 sur chaque fibre. On a $\mu\lambda = u$ par définition de u , d'où l'existence de la flèche surjective ψ ; soit H son noyau. Comme le pgcd des r_i est égal à 1 , on a $\mathrm{Ker}(\lambda) = \mathrm{Ker}(u)$, donc $\mathrm{im}(\lambda) \simeq \mathrm{im}(u)$ et le diagramme du serpent entraîne $\mathrm{Pic}^o(X) \simeq H$.

COROLLAIRE 10.- Si q est un entier premier à la caractéristique de k , on a une suite exacte canonique :

$$0 \to {}_q\mathrm{Pic}^o(\bar{X}) \to {}_q\mathrm{Pic}(X_\eta) \to {}_qG \to 0 .$$

En effet, on vient de voir que l'on a une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Pic}^o(X) \to \mathrm{Pic}(X_\eta) \to G \to 0 .$$

Comme R est complet et k algébriquement clos, $\mathrm{Pic}^o(X)$ est extension du groupe q-divisible $\mathrm{Pic}^o(\bar{X})$ par un groupe uniquement q-divisible, d'où le corollaire.

On prouve élémentairement le résultat suivant :

LEMME 11.- (Sous la condition pgcd $r_i = 1$), on a :

(i) $H^o(\bar{X}, O_{\bar{X}}) = k$, et par suite $\dim H^1(\bar{X}, O_{\bar{X}}) = g$.

(ii) Si $\bar{X}$ n'est pas réduit et ne contient pas de courbe exceptionnelle, on a $g > p(\bar{X}_{red})$.

Démontrons alors le théorème 4 2). Soit q un nombre premier distinct de la caractéristique de k et plus grand que $c(g)$ (th. 8). Quitte à faire une extension finie du corps des fractions de R , on peut supposer que l'on a ${}_q\mathrm{Pic}(X_\eta) \simeq (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{2g}$. Par ailleurs, vu le choix de q et le fait que G soit de rang 1 , on a $\dim_{\mathbb{F}_q}({}_qG) \leq \rho_c(G) - 1 \leq \beta$ (th. 8). D'autre part, $\mathrm{Pic}^o(\bar{X})$ est un groupe algébrique de dimension $H^1(\bar{X}, O_{\bar{X}}) = g$ (lemme 11 (i)). Soit a (resp. m , resp. u) la dimension de sa partie abélienne (resp. torique, resp. unipotente). Alors $g = a + m + u$ et ${}_q\mathrm{Pic}^o(\bar{X}) \simeq (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{2a+m}$. Enfin, il est élémentaire que le nombre de Betti β est majoré par $m + u$. On déduit alors du cor. 10 que $u = 0$.

Comme le noyau de $\mathrm{Pic}(\bar{X}) \to \mathrm{Pic}(\bar{X}_{red})$ est unipotent, il résulte du lemme 11 (ii) que le modèle minimal X de X_η a alors une fibre spéciale $\bar{X}$ réduite. De plus, la condition $u = 0$ entraîne que les singularités de $\bar{X}$ sont analytiquement isomorphes à un système d'axes de coordonnées. Comme X est régulier, l'espace tangent en un point de $\bar{X}$ est au plus de dimension 2 et par suite les singularités de $\bar{X}$ sont des points doubles ordinaires. Par contraction des composantes de $\bar{X}$ qui sont des droites projectives de self-intersection (-2), on obtient alors une R-courbe stable.

Compléments.

1) Mumford a montré récemment que l'espace algébrique M (th. 5) est en fait un schéma projectif sur $\mathbf{Z}$.

2) Le théorème 4 peut être précisé comme suit. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) X_η provient d'une R-courbe stable.

b) Si J_η est la jacobienne de X_η et J le modèle de Néron de J_η sur R, alors la fibre spéciale $\bar{J}$ de J est de rang unipotent nul.

De plus, si N est un entier premier à la caractéristique de k et ≥ 3, les conditions précédentes sont réalisées si ${}_N J_\eta$ est non ramifié sur R.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ABHYANKAR - Resolution of singularities of arithmetical surfaces, Proc. Conf. on Arith. Alg. Geom. at purdue, 1963.

[2] M. ARTIN - The implicit function theorem, Algebraic geometry, Bombay Colloqium, 1968, Oxford Univ. Press.

[3] M. ARTIN and G. WINTERS - Degenerate fibres and reduction of curves, (à paraître).

[4] P. DELIGNE and D. MUMFORD - The irreductibility of the space of curves of given genus, Pub. de l'I.H.E.S., n° 36, 1969.

[5] J. DIEUDONNÉ et A. GROTHENDIECK - Eléments de géométrie algébrique (cité EGA), Pub. de l'I.H.E.S., n° 8...

[6] P. DU VAL - On isolated singularities of surfaces which do not affect the condition of adjunction, Proc. Camb. Phil. Soc., 30 (1933-34), 483-491.

[7] A. GROTHENDIECK - Sém. de Géom. Alg., SGA 7, 1968, Notes de l'I.H.E.S.

[8] R. HARTSHORNE - Residues and duality, Springer Verlag, Lecture Notes 20, 1966.

[9] D. KNUTSON - Algebraic spaces, Springer Verlag, Lecture Notes 203, 1971.

[10] M. LICHTENBAUM - Curves over discrete valuation rings, Am. J. Math., 90 (1968).

[11] D. MUMFORD - Geometric invariant theory, Springer Verlag, 1965.

[12] I. ŠCHAFAREVITCH - Lectures on minimal models, Tata Institute, Lecture Notes, 1966.

[13] M. SCHLESSINGER - Functors of Artin rings, Trans. A.M.S., 130 (1968), 208-222.

[14] M. SCHLESSINGER - Thèse, Harvard.