PIERRE LELONG

Valeurs algébriques d'une application méromorphe

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 384, p. 29-45
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1970-1971__13__29_0>

Séminaire BOURBAKI
23e année, 1970/71, n° 384 Novembre 1970

VALEURS ALGÉBRIQUES D'UNE APPLICATION MÉROMORPHE

(d'après E. BOMBIERI)

par Pierre LELONG

1. Enoncé du problème.

Soit K un corps, extension algébrique des rationnels Q, dont le degré sera noté $[K:Q]$; des résultats classiques en théorie des nombres (voir § 2) sont des corollaires d'un théorème de Th. SCHNEIDER et S. LANG (théorème A_1) qui énonce que, pour certaines applications méromorphes $f = (f_1, \ldots, f_N)$, $N \geq 2$, de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}^N$, l'ensemble S des $\zeta \in \mathbf{C}$, où $f(\zeta)$ est défini et où l'on a $f(\zeta) \in K^N$, est un ensemble fini. L'extension aux applications méromorphes $C^d \to C^N$, $d > 1$, vient d'être faite par E. BOMBIERI [1] dont le résultat s'énonce :

THÉORÈME A_d.- *Soient K une extension algébrique de Q, de degré $[K:Q]$, et $f = (f_1, \ldots, f_N)$ une application $C^d \to C^N$ donnée par des fonctions méromorphes d'ordre ρ au plus. On suppose :*

a) *Le corps $K(f) = K(f_1, \ldots, f_N)$ a un degré de transcendance au moins $d+1$ sur K.*

b) *Les dérivations $D_\alpha = \frac{\partial}{\partial z_\alpha}$ dans C^d opèrent sur l'anneau $K[f]$, c'est-à-dire : pour tout $g \in K[f]$ et tout D_α, on a $D_\alpha g \in K[f]$.*

Alors l'ensemble S des $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_d) \in C^d$ où $f(\zeta)$ est défini et vérifie $f(\zeta) \in K^N$, est porté par un ensemble algébrique $P(\zeta) = 0$. De plus, on a :

$$(1) \qquad m = \text{degré } P \leq d(d+1)\rho[K:Q] + 2d .$$

Le théorème A_1 qu'on trouvera dans le livre de S. LANG, [4, p. 21], donnait la borne $m = \text{card } S \leq 20\,\rho[K:Q]$. On trouvera aussi dans [4, chap. 4] une tentative de passer à $d > 1$; si $S = e_1 \times e_2 \times \ldots \times e_d$, $e_k \subset \mathbf{C}$, est un produit, card S

est borné. La conjecture que S est sur une hypersurface algébrique semble due à NAGATA.

Le passage de A_1 à A_d n'exige que des modifications mineures pour certains lemmes de théorie des nombres déjà utilisés par SCHNEIDER, mais fait appel par contre aux propriétés métriques des ensembles analytiques de codimension 1 dans C^d, $d > 1$. On utilisera le courant $t_f = i\pi^{-1} d_z d_{\bar{z}} \log |f|$ d'un diviseur (f) dans C^d et les propriétés des courants positifs et fermés. Mais on n'aura pas besoin de la propriété générale ([5c]) du courant d'intégration sur un ensemble analytique, t étant évidemment positif et fermé. L'exposé fait appel à deux techniques différentes et on renvoie le lecteur à deux petits livres, celui de S. LANG [4] et le nôtre [5e], pour certains détails. Comme le dit E. BOMBIERI à propos du passage du résultat partiel de S. LANG à A_d : " we want to show that the existing techniques of the theory of functions of several complex variables are quite sufficient to handle the various situations arising when one tries to extend to the higher dimensional case some general theorems on transcendental values of the classical functions ". Faisons, précisément, quelques remarques sur la méthode. L'application à la théorie des nombres exige des majorations précises : on utilisera pour un courant positif t l'existence d'une <u>mesure majorante</u> $\mu \geq 0$, c'est-à-dire telle qu'on ait $|t(\varphi)| \leq \mu(\|\varphi\|)$, où $\|\varphi\|$ est le sup des modules des coefficients (continus) de la forme φ. Au lieu de borner le nombre des zéros d'une fonction analytique $f(z)$, on majorera la mesure $\sigma = (2\pi)^{-1}\Delta(\log|f|)$, ou, mieux, le courant positif $t = i\pi^{-1} d_z d_{\bar{z}} \log|f|$, ce qui est la même chose, mais s'étend à $d > 1$. Le théorème de multiplication des courants positifs par les formes positives $(1, 1)$, (cf. [5e, p. 69]) permet aisément la construction de mesures dont la signification "concrète" apparaît ensuite dans les bons cas.

Un problème essentiel est l'approximation sous certaines conditions d'une fonction plurisousharmonique V par une fonction $\log|F|$, F holomorphe, (ou de e^V par $|F|$) : E. BOMBIERI emploie la méthode " L^2-estimates " de HÖRMANDER et l'espace des F telles que $\|F\|_V^2 = \int e^{-V(z)}|F(z)|^2(1 + \|z\|^2)^{-3d}\beta_d < \infty$ dans C^d, β_d élément de volume de C^d. Une généralisation de ce problème (cf. [5b]) est de caractériser parmi les courants positifs fermés t ceux qui représentent l'intégration

t_A sur un ensemble analytique A , et plus généralement de comparer t à un t_A , pour un A convenable : c'est sous cet aspect qu'il se présentera ici, les constructions déjà faites dans le cas $d = 1$ conduisant à considérer l'ensemble S comme une partie S' de $\operatorname{supp} t$, t courant positif fermé. Dans [5c] nous avons montré que la mesure projective relative à t et à un point $a \in \operatorname{supp} t$, définie sur $C^d - \{a\}$, se prolonge en a par une mesure positive $\nu(a)\delta(a)$, $\delta(a)$ mesure de Dirac en a ; $\nu(a)$ est un entier dans le cas du courant t_A d'un ensemble analytique (cf. [7] et [3]). On sait aujourd'hui établir la réciproque par des considérations de géométrie intégrale assez faciles (cf. [3]). Dans la démonstration de E. Bombieri, la construction de t , de type $(1, 1)$, est faite de manière que $\zeta \in S$ entraîne $\nu(\zeta) \geq 1$. La conclusion repose alors sur l'énoncé suivant qui mérite d'être explicité malgré son caractère (probablement) partiel : sur $\operatorname{supp} t$, l'ensemble S_c (fermé) des a où l'on a $\nu(a) \geq c > 0$ est situé sur un ensemble analytique. Alors $S \subset S_1 \subset \operatorname{supp} t$ montre que S est partie d'un ensemble analytique dans C^d . La preuve utilise la résolution "majorée" de $2i d_z d_{\bar z} V = t$ dans C^d selon [5d] : l'existence de F entière avec $\|F\|_{kV} < \infty$, $k \geq 2d$, entraîne $F(\zeta) = 0$ en tout point ζ où $\nu(\zeta) \geq 1$ afin que l'intégrale $\|F\|^2_{kV}$ converge. D'autre part, la majoration de t et celle de V entraînent le comportement polynomial de F dans C^d et plus précisément la majoration (1).

2. Quelques applications du théorème A_1 en théorie des nombres.

L'énoncé A_1 a pour corollaire des théorèmes connus qu'il est utile de rappeler : 1) Soit K engendré par α et e^α , et soit $f = \{f_1 , f_2\}$, $f_1 = z$, $f_2 = e^z$; l'anneau $K[f , g]$ vérifie la condition b) de l'énoncé A_d. De plus, f et g sont algébriquement indépendants, donc a) est vérifié. Alors, si α et e^α sont tous deux algébriques, pour $z = m\alpha$, m entier, on a $f(z) \in K^2$, d'où $\operatorname{card} S = \infty$ et une contradiction qui montre que pour α algébrique, e^α est transcendant (Hermite-Lindemann).

2) De même, si α , β , α^β étaient algébriques, pour $\alpha \neq 0 , 1$ et β irra-

tionnel, prenons $f = \{e^z , e^{\beta z}\}$ et K engendré par $(\alpha , \beta , \alpha^\beta)$: pour $z = m \log \alpha$ m entier, on a $f(z) \in K^2$: la contradiction établit le théorème de Gelfond-Schneider.

3) La méthode s'applique à bien d'autres problèmes. Soit p la fonction de Weierstrass, solution de $p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3$: si g_2 , g_3 sont algébriques, pour $\alpha \neq 0$ algébrique, $p(\alpha)$ est transcendant (Schneider) : poser $f = \{z , p(z)\}$, K engendré par α , $p(\alpha)$, g_2 , g_3 et observer que la formule d'addition de p donne $p(m\alpha) \in K^2$ pour m entier $m \neq 0$.

4) Mais les applications les plus intéressantes de A_1 (et surtout de A_d) semblent concerner les variétés de groupe sur K (cf. [4]).

Faisons une remarque : dans l'énoncé de A_d, on pourra affaiblir l'hypothèse a) en supposant que les dérivations D_α opèrent sur le corps $K(f)$ au lieu de $K[f]$. Si l'on a $D_\alpha f_i = P_{i\alpha}(f)[R(f)]^{-1}$, $1 \leq i \leq N$, on posera $\tilde{f} = [f_1 , \dots , f_N , f_{N+1}]$, $f_{N+1} = [R(f)]^{-1}$; on a alors $D_\alpha f_i \in K[\tilde{f}]$ pour $i = 1 , \dots , N+1$, et on appliquera A_d à l'ensemble des ζ pour lesquels $R[f(\zeta)] \neq 0$.

3. Courants positifs fermés ; les deux indicatrices.

On pose $\beta = \frac{i}{2} \Sigma \, dz_k \wedge d\bar{z}_k = \frac{i}{2} d_z d_{\bar{z}} \|z\|^2$ et $\beta_p = \frac{\beta^p}{p!}$; en particulier β_d est l'élément de volume de C^d .

On dira qu'une forme φ est positive dans un domaine D de C^d rapporté aux z_k , $\bar{z}_k$, si φ est homogène, de bidegré (p , p) des dz_i , $d\bar{z}_j$ et si pour tout système $\alpha = \{\alpha_1 , \dots , \alpha_{d-p}\}$ de formes C-linéaires $\alpha_\nu = \Sigma \, a_k^j \, dz_j$, $1 \leq j \leq d$, à coefficients a_k^j constants, la forme de degré maximum définie par $\varphi \wedge (i\alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1) \wedge \dots \wedge (i\alpha_{d-p} \wedge \bar{\alpha}_{d-p}) = 1(\varphi , \alpha)\beta_d$ est telle que l'on ait $1(\varphi , \alpha) \geq 0$ en tout point de D . La définition s'applique aux courants ; $1(\varphi , \alpha)\beta_d$ est alors une distribution positive, c'est-à-dire une mesure positive. La définition est invariante par les transformations C-linéaires sur les dz, mais dans la suite on se bornera aux transformations unitaires. A un sous-espace vectoriel L^p de C^d, $p \leq d$, on fera correspondre une forme positive $\tau(L^p)$ bien déterminée qui vaut $(\frac{i}{2})^p du_1 \wedge d\bar{u}_1 \wedge \ldots \wedge du_p \wedge d\bar{u}_p$, $z \to u$ étant une transformation unitaire telle que $u_{p+1} = \ldots = u_d = 0$ définisse L^p : $\tau(L^p)$ est une forme des dz_i, $d\bar{z}_j$ dont les coefficients sont les coordonnées plückériennes de L^p (cf. [5e]) et l'application $L^p \to \tau(L^p)$ est injective. On désignera par Γ'_p le cône des courants positifs (p, p) et p sera dit la codimension du courant positif. Pour qu'on ait $t \in \Gamma'_p$, il faut et il suffit que les distributions

(2) $$T(L^{d-p}) = t \wedge \tau(L^{d-p})$$

soient des mesures positives et il suffit qu'il en soit ainsi pour un système $\{L_s^{d-p}\}$, permettant le calcul des coefficients $t_{I,\bar{J}}$ de t en fonction des $T(L_s^{d-p})$. Il en résulte que les $t_{I,\bar{J}}\beta_\alpha$ sont des mesures. D'où :

1) Un courant positif s'étend aux formes à coefficients continus.

2) Il est auto-conjugué : $\bar{t} = t$.

3) Il possède une mesure majorante. Soit en effet $\|\varphi\|(x) = \sup_{I,\bar{J}} |\varphi_{I,\bar{J}}(x)|$ pour une forme à coefficients $\varphi_{I,\bar{J}}$ continus ; alors $\mu(g) = \sup_{\|\varphi\| \leq g} |t(\varphi)|$ est une mesure de Radon positive et l'on a $|t(\varphi)| \leq \mu(\|\varphi\|)$ pour toute φ, à coefficients continus, à support compact dans D.

Rappelons enfin la propriété multiplicative des courants positifs : si t appartient à Γ'_p et φ à Γ_1, le produit $t \wedge \varphi$ appartient à Γ'_{p+1}. Exemple : les formes β_p, $1 \leq p \leq d$, étant positives, si t est un courant positif de codimension p dans C^d,

(3) $$\sigma = t \wedge \beta_{d-p}$$

définit une mesure positive ; on notera $\sigma(r)$ la mesure portée par la boule fermée $\|z\| \leq r$ dans C^d : $\sigma(r)$ <u>est une indicatrice de croissance</u> pour t dans $\mathbb{C}^d$ car on a :

PROPOSITION 1.- <u>Soit</u> t <u>un courant positif de codimension</u> p <u>dans un domaine de</u> C^d <u>; il existe une constante</u> $\gamma_{d,p}$ <u>telle que</u> $\gamma_{d,p}\sigma$ <u>soit une mesure majorante pour</u> t .

En effet σ majore les mesures (2) quel que soit L^{d-p} et d'autre part les mesures $T_{I,\bar{J}} = t_{I,\bar{J}}\,\beta_d$ sont des combinaisons linéaires des mesures $T(L_s^{d-p})$ pour un système $\{L_s^{d-p}\}$ choisi comme plus haut.

<u>Cas particulier</u>. Soit $p = 1$: dire que $t = i\,\Sigma\, t_{m\bar{q}}\, dz_m \wedge d\bar{z}_q$ est positif, c'est dire que la distribution $\delta(\lambda) = (\Sigma\, t_{m\bar{q}}\, \lambda_m\, \bar{\lambda}_q)\beta_d$ est une mesure positive pour tout vecteur $\lambda = (\lambda_m)$, $1 \leq m \leq d$; $\sigma = t \wedge \beta_{d-1}$ est la mesure $4(\Sigma\, t_{m\bar{m}})\beta_d$ et $2^d d^2\sigma$ est une mesure majorante pour t (voir [5d, proposition 1]).

Si t est un courant positif, la condition d'homogénéité entraîne l'équivalence des conditions $dt = 0$, $d_z t = 0$, $d_{\bar{z}} t = 0$. Rappelons alors un résultat général [5c]. Pour un point a donné dans C^d considérons la forme positive

$$\alpha_a = i(2\pi)^{-1} d_z d_{\bar{z}} \log\|z - a\|^2 .$$

Elle est définie sur $C^d - \{a\}$. Si t est positif de codimension p , le théorème de multiplication montre que

$$(4) \qquad \nu_a = t \wedge \alpha_a^{d-p} = t \wedge \left(\frac{i}{2\pi} d_z d_{\bar{z}} \log\|z - a\|^2\right)^{d-p}$$

est une mesure positive sur $C^d - \{a\}$. Rappelons alors un résultat de [5c] valable en codimension p quelconque. Soit $\nu_a(R_1 , R_2)$ la masse totale de ν_a portée par l'intersphère $R_1 < \|z - a\| \leq R_2$. Posons $\sigma_a(R) = \int_{\|z-a\| \leq R} \sigma$. On a

$$(5)\qquad 0 \leq \nu_a(R_1, R_2) = \frac{(d-p)!}{\pi^{d-p}}\left[\frac{\sigma_a(R_2)}{R_2^{2(d-p)}} - \frac{\sigma_a(R_1)}{R_1^{2(d-p)}}\right]$$

ce qui entraîne pour un courant positif fermé :

PROPOSITION 2 (cf. [5c] et [5e]).- Soit $\tau_p(r) = \frac{\pi^p}{p!} r^{2p}$ la mesure de la boule de rayon r, de dimension $2p$. Soit t un courant positif fermé de type (p, p).

1) La masse totale de σ (définie par (3)) dans une boule fermée $\|z-a\| \leq r$ s'écrit $\sigma_a(r) = \nu_a(r)\,\tau_{d-p}(r)$ et $\nu_a(r)$ est fonction croissante de r.

2) Soit $\nu(a)$ la limite de $\nu_a(r)$ pour $r = 0$. Si l'on prolonge ν_a définie par (4) sur $C^d - \{a\}$ à C^d par addition d'une mesure $\nu(a)\delta(a)$, la masse totale pour ν_a portée par $\|z-a\| \leq r$ s'écrit

$$(6)\qquad \nu_a(r) = \nu(a) + \int_{0<\|z-a\|\leq r} \nu_a = \sigma(r)[\tau_{d-p}(r)]^{-1}.$$

Ce sont des conséquences directes de (5). De plus, si t est le courant d'intégration sur un ensemble analytique de dimension pure $d-p$, $\nu(a)$ est un nombre entier positif (cf. [7] et [3]).

4. Courant associé à un diviseur (f).

Soit f une fonction holomorphe dans un domaine D de C^d. On appelle courant associé au diviseur (f) le courant positif et fermé $t_f = i\pi^{-1} d_z d_{\bar z} \log|f|$. Il diffère en général du courant t_A d'intégration sur l'ensemble analytique défini par $f = 0$: si A_i est une composante irréductible de A dans D, on a $t_f = \sum_i m_i\, t(A_i)$, où $t(A_i)$ est l'intégration sur A_i (cf. [5f, chapitre 7]) et m_i est un entier positif. En tout point, $\nu(a)$, relatif à t_f, est le degré du premier polynôme homogène non nul dans le développement de $f(a+h)$ selon $h = (h_1, \ldots, h_d)$. On prendra $\nu_a(r)$ défini par (6) de préférence à $\sigma_a(r)$ comme

comme indicatrice de t ; on l'appelle l'indicatrice <u>projective</u> de t. On a :

PROPOSITION 3.- <u>Si</u> f <u>est un polynôme de degré</u> m, <u>alors pour tout</u> $a \in C^d$, t_f <u>vérifie</u> $\lim \nu_a(R) = m$ <u>quand</u> $R \to +\infty$. <u>Réciproquement si</u> f <u>est entière et si pour</u> t_f <u>il existe un</u> $a \in C^d$ <u>tel que</u> $\nu_a(R)$ <u>demeure borné par</u> m, $f = 0$ <u>définit un ensemble algébrique de degré</u> m <u>au plus</u>.

Ce dernier résultat s'obtient directement à partir de la solution explicite du problème de Cousin dans C^d donnée dans [5d] ; c'est aussi un cas particulier d'un théorème général de STOLL sur les ensembles analytiques pour lesquels ν est borné [Math. Ann., t. 156 (1964)].

Soit t positif fermé de codimension 1 : sur supp t on distinguera l'ensemble S_c des a où l'on a $\nu(a) \geq c$: c'est un ensemble <u>fermé</u>, $\nu(a)$ étant semi-continue supérieurement (il en est ainsi de $\sigma_a(r)$ pour r fixé). D'autre part, l'ensemble ω des a en lesquels l'intégrale $\int_0^\lambda \nu_a(t)t^{-1}\,dt$ diverge est de mesure nulle ; c'est localement l'ensemble des $-\infty$ de toute solution V de $2id_z d_{\bar z} = t$ et l'on sait qu'une fonction plurisousharmonique est localement sommable.

E. BOMBIERI utilise le comportement de $\nu_a(t)$ pour donner un "lemme de SCHWARZ" qu'on énoncera pour une fonction plurisousharmonique V solution de $2id_z d_{\bar z} V = t$ dans une boule $\|z\| \leq R$ et dont l'application sera faite à $V = (2\pi)^{-1} \log|F(z)|$, F holomorphe.

PROPOSITION 4.- <u>Soit</u> $V(z)$ <u>plurisousharmonique dans un domaine de</u> C^d <u>contenant la boule</u> $\|z\| \leq R$, <u>et soit</u> τ <u>réel</u>, $0 < \tau < 1$; <u>soit</u> $\nu_0(r)$ <u>la mesure projective associée au courant</u> $t = 2id_z d_{\bar z} V$. <u>On a pour</u> $\|z\| < \frac{\tau R}{6d}$:

$$V(z) \leq \max_{\|z'\| = R} V(z') - (1-\tau)\nu_0(\|z\|) \log \frac{\tau R}{6d\|z\|} .$$

D'autre part, on a besoin de savoir que l'ensemble des points de C^d au voisinage desquels e^{-V} est sommable n'est pas vide :

PROPOSITION 5.- Au voisinage de tout point $a \in \mathbb{C}^d$ où $\nu(a) = 0$, e^{-V} est sommable.

Cette proposition suffit, car $\nu(a) > 0$ entraîne $V(a) = -\infty$, et $a \in \omega$, lequel est de mesure nulle. Sa démonstration à partir de la représentation locale de V par un potentiel utilise actuellement le lemme de John, Nirenberg et Trudinger : si $V(z)$ est le potentiel (dans $\mathbb{R}^{2n}$) d'une mesure μ assez régulière pour vérifier

$$\int_{\|z-b\|<r} |\mu| < \gamma r^{2n-1} \quad , \quad \gamma > 0 \ , \quad \text{pour toutes les boules } B(b,r)$$

avec $\|b-a\| < R$, $r < R$, alors, il existe des constantes c , c' , ne dépendant que de d telles que l'on ait

$$\min_k \int_{\|z-a\|<\frac{1}{2}R} \exp[c\gamma^{-1}|V(z) - k|]\beta_d \leq c' .$$

5. Fonctions entières $F(z)$ de croissance donnée et approximation dans $\mathbb{C}^d$ de $V(z)$ plurisousharmonique par $\log|F(z)|$.

THÉORÈME D'EXISTENCE.- Soit V plurisousharmonique dans $\mathbb{C}^d$: il existe $F(z)$ entière, $F(z) \not\equiv 0$, telle que l'on ait

$$\|F\|_V^2 = \int_{\mathbb{C}^d} |F(z)|^2 e^{-V}(1 + \|z\|^2)^{-3d}\beta_d < \infty . \tag{7}$$

On notera que l'ensemble des z où l'on a $V(z) = -\infty$ n'est pas supposé vide et que l'on aura $F(z) = 0$ en tout z au voisinage duquel e^{-V} n'est pas sommable.

La démonstration s'appuie sur le théorème de HÖRMANDER ([2]) :

Soient Ω un domaine pseudo-convexe dans $\mathbb{C}^d$ et V plurisousharmonique dans Ω . Soit f une forme de type p , q , $f \in L^2_{p,q}(\Omega,V) \cap L^2_{(p,q)}(\Omega,\mathrm{loc})$ et $q \geq 1$. Si l'on a $d_{\bar z} f = 0$, alors il existe une forme $U \in L^2_{p,q-1}(\Omega,V)$ solution de $d_{\bar z} U = f$ et pour laquelle on a

$$\int_\Omega |U|^2 e^{-V}(1 + \|z\|^2)^{-2}\beta_d \leq \int_\Omega |f|^2 e^{-V}\beta_d$$

où l'on a posé $|f|^2 = \Sigma |f_{I,J}|^2$.

Pour passer au théorème d'existence plus haut, on construit un premier polycercle Ω_o dans lequel e^{-V} est sommable, ce qui est possible, cet ensemble étant fermé et de mesure nulle. Après un changement linéaire de coordonnées on écrira

$$\Omega_o = [z \ ; \ |z_1| < 1 \ , \dots , \ |z_d| < 1] \ .$$

On pose

$$\Omega_k = [z \ ; \ |z_{k+1}| < 1 \ , \dots , \ |z_d| < 1] \ ,$$

$\Omega_o \subset \Omega_1 \dots \subset \Omega_d = C^d$. Chaque Ω_k est pseudo-convexe ; on prend $F_o(z) \equiv 1$ dans Ω_o et on construit F_k holomorphe dans Ω_k , vérifiant

$$F_k(0) = 1 \quad , \quad \|F_k\|^2_{\Omega_k, 3k} = \int_{\Omega_k} |F_k(z)|^2 \, e^{-V(z)}(1 + \|z\|^2)^{-3k} \beta_d < \infty \ .$$

La récurrence se fait par le théorème de HÖRMANDER, en construisant F_k vérifiant $d_{\bar z} F_k = 0$ dans Ω_k ; $\|F_k\|_{\Omega_k, 3k} < \infty$ et $F_k(z) = F_{k-1}(z)$ sur $\Omega_k \cap [z_k = 0]$.

Le procédé est classique : on choisit $\psi(\zeta)$, $\zeta \in \mathbf{C}$, qui vaut 1 pour $|\zeta| < \frac{1}{2}$, zéro pour $|\zeta| > 1$, de classe C^1 et telle que $\|d_{\bar z} \psi\| \leq 4$. On définit, pour $z = (z_1, \dots, z_d) \in \Omega_k$, $\psi_k(z) = \psi(z_k)$. Alors $f = z_k^{-1} F_{k-1} d_{\bar z} \psi_k$ est défini dans Ω_k , a son support dans Ω_{k-1} , vérifie $d_{\bar z} f = 0$ et $|f| \leq 8|F_{k-1}|$, ce qui établit $\|f\|_{\Omega_k, 3k-3} < \infty$. Il existe alors U vérifiant $d_{\bar z} U = f$ et

$$\|U\|_{\Omega_k, 3k-1} \leq \|f\|_{\Omega_k, 3k-3} \ ;$$

f et U sont continus ; $F_k(z) = \psi_k(z) F_{k-1}(z) - z_k U(z)$ est défini dans Ω_k , vérifie $d_{\bar z} F_k = 0$, donc est holomorphe dans Ω_k . On vérifie aisément que la norme $\|F_k\|_{\Omega_k, 3k}$ est bornée, ce qui achève la démonstration et construit F par récurrence finie.

6. Adaptation de la méthode de SCHNEIDER-LANG.

On revient à la situation décrite par le théorème A_d. Pour $\alpha \in K$, on note $d = \mathrm{den}(\alpha)$ le plus petit entier naturel tel que $d\alpha$ appartienne à l'anneau O_K des entiers de K. On prend les notations de S. Lang [4] : $\|\alpha\| = \max\limits_{\sigma} |\sigma\alpha|$ où les $\sigma\alpha$ sont les conjugués de α. Pour $\alpha \in K$, on définit la "taille", notée θ :

$$\theta(\alpha) = \max_{\sigma}(\log d\,, \log|\sigma\alpha|) > 0\,.$$

On a :

$$-[K, Q]\,\theta(\alpha) \leq \log|\sigma\alpha|$$

$$-[K:Q]\log \mathrm{den}(\alpha) - ([K:Q]-1)\,\theta(\alpha) \leq \log|\sigma\alpha|\,.$$

Sur les polynômes P de d variables à coefficients dans K on définit :

$$\|P\| = \max \|a_{(j)}\|\,, \qquad (j) = (j_1 < j_2 < \ldots < j_d)\ ;$$

$$|P| = \max |a_{(j)}|\ ;$$

$$\theta(P) = \max(\deg P\,, \log\|P\|)\,.$$

On a alors (cf. S. Lang [4], p. 34) :

LEMME 1.- Soit $D^k = D_1^{k_1} \ldots D_d^{k_d}$, une dérivée d'ordre $|k| = \sum\limits_1^d k_r$. Soit $f = (f_1, \ldots, f_N)$, où les f sont holomorphes au voisinage de $\zeta \in \mathbb{C}^d$; on suppose que $D_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial z_a}$ opère sur l'anneau $K[f] = K[f_1, \ldots, f_N]$ et que $f(\zeta) \in K^N$. Alors il existe une constante $C_1 = C_1(f, \zeta)$ telle que, pour tout polynôme $Q = Q(X_1, \ldots, X_N)$ à coefficients dans O_K, degré $Q \leq r$, on ait

$$\|D^k[Q(f)](\zeta)\| \leq \|Q\|\,(r + |k|)^{|k|}\, C_1^{|k|+r}\,.$$

De plus

$$\mathrm{den}\ D^k[Q(f)](\zeta) \leq C_1^{|k|+r}\,.$$

La démonstration (cf. [4], p. 34) utilise l'existence de polynômes $P_{i\alpha}$ à coefficients dans K tels que $D_\alpha[P_i(f_i)] = P_{i\alpha}(f_1, \ldots, f_N)$, ce qui donne aisément les majorations.

D'autre part, rappelons un résultat classique de C. SIEGEL :

LEMME 2.- *Soit* $AX = 0$ *un système de* r *équations linéaires à* n $(r<n)$ *inconnues à coefficients* a_{ij} *entiers dans* K . *Il existe une solution non triviale* $X = \{x_1,\dots,x_n\}$ *entière dans* K *et telle que*

$$\|X\| \leq C_2(C_2\, n\, \|A\|)^{\frac{r}{n-r}}$$

où $\|X\| = \max\|x_i\|$, $A = \max\|a_{ij}\|$, C_2 *dépend de* K .

L'hypothèse degré de transcendance $K(f) \geq d+1$ entraîne l'existence de $d+1$ fonctions, soit $f_1,\dots,f_{d+1}$ algébriquement indépendantes sur K . On cherche alors à construire, selon la méthode de Siegel, un polynôme

$$F(z) = \sum_{(j)<J} a_{(j)}\, f_1^{j_1} \dots f_{d+1}^{j_{d+1}}$$

où $(j) < J$ signifie $0 \leq j_k < J$, $1 \leq k \leq d+1$. En supposant que sur un ensemble fini $S_0 \in \mathbb{C}^d$, $f(\zeta) \in K^N$ pour $\zeta \in S_0$, on choisira les $a_{(j)}$ entiers dans K tels que $D^\lambda F(\zeta) = 0$ pour $|\lambda| < L$, $\zeta \in S_0$, et de manière à conserver une certaine majoration des $\|a_{(j)}\|$. Dans la suite f , S_0 , K sont donnés, on pose card $S = m$ et les majorations seront faites uniformément par rapport à L .

En résolvant selon le lemme 2 le système linéaire $D^\lambda F(\zeta) = 0$, soit $m\, C_{L+d}^d$ équations linéaires par rapport aux J^{d+1} inconnues $a_{(j)}$, on établit :

LEMME 3.- *Si* J^{d+1} = *partie entière de* $m L^d \log L$, *on peut choisir les* $a_{(j)}$ *non tous nuls, entiers sur* K , *et tels que l'on ait* $D^\lambda F(\zeta) = 0$ *pour* $|\lambda| < L$, $\zeta \in S_0$, card $S = m$ *et tels que* $\theta(a_{(j)}) \leq L$.

On définit alors un entier $s(L)$ tel que l'on ait

$$D^\lambda F(\zeta) = 0$$

pour $|\lambda| < s$, $\zeta \in S_0$, et qu'il existe $\zeta' \in S_0$ et λ' avec $|\lambda'| = s$ tel que $D^{\lambda'}F(\zeta') \neq 0$. On a $L \leq s < \infty$, car $s = \infty$ entraînerait $F \equiv 0$, contrairement à l'indépendance algébrique des f_k , $1 \leq k \leq d+1$. On désigne par g un dénominateur pour les f_k , d'ordre $\le \rho$ et l'on pose $G_s(z) = [g(z)]^{(d+1)J}\, F(z)$ de manière à obtenir pour G_s une fonction entière.

LEMME 4.- <u>Il existe</u> λ' , $|\lambda'| = s$ <u>et</u> $\zeta' \in S_o$ <u>vérifiant</u>

(8) $$\log|D^{\lambda'}\, \varphi(\zeta')| \;\ge\; -([K:Q]-1)s \log s + O(s) \,.$$

En effet, on a $D^{\lambda'}\, G_s(\zeta') = [g(\zeta')^{J(d+1)}]D^{\lambda'}F(\zeta')$ car $D^{\lambda}F(\zeta') = 0$ pour $|\lambda| < s$. D'où, en posant $\xi = D^{\lambda'}F(\zeta')$:

(9) $$\begin{aligned} |\log D^{\lambda'}G_s(\zeta')| &= (d+1)J \log|g(\zeta')| + \log|\xi| \\ &\ge O(r) - ([K:Q]-1)\, \theta(\xi) + O(\log \operatorname{den}(\xi)) \,. \end{aligned}$$

On applique les lemmes 1 et 3 et l'on obtient (8).

7. <u>Fin de la démonstration</u> : <u>construction de la fonction plurisousharmonique, puis du polynôme définissant l'hypersurface algébrique</u>.

On va maintenant étudier la suite des courants positifs fermés définis dans C^d par

$$t_s = \frac{i}{\pi s}\, d_z\, d_{\bar z} \log|G_s(z)|$$

relatifs aux fonctions plurisousharmoniques $\frac{1}{s}\log|G_s|$, et, on va d'abord montrer que les t_s sont bornés, localement. On va même montrer beaucoup plus : il existe pour l'indicatrice projective $\nu_o^{(s)}(r)$ de centre l'origine une <u>borne supérieure indépendante de</u> s <u>et de</u> r , de sorte que les t_s se comportent comme s'ils étaient relatifs à une famille de polynômes de degré borné, et bornés sur tout compact de C^d , ce qui conduira au résultat final. La majoration des t_s résulte d'une majoration des $|G_s(z)|$, mais on devra aussi utiliser la minoration (8) pour obtenir une majoration de l'indicatrice $\nu_o^{(s)}(r)$ relative au courant t_s .

La majoration est donnée par l'intégrale de Cauchy : pour $r > \|\zeta'\|$, on a

$$\log|D^{\lambda'}G_s(\zeta')| \;\le\; s \log s + \max_{|z|=r} \log|G_s(z)| + O(s) \,.$$

On applique le "lemme de SCHWARZ", ce qui donne

$$\log|D^{\lambda'}G_s(\zeta')| \leq s \log s + \max_{|z|=r} \log|G_s(z)| - (1-\tau)\nu_o^{(s)}(r) s \log \frac{\tau R}{2dr} + O(s) .$$

On utilise maintenant l'hypothèse que g et les f_i sont d'ordre fini ρ, ce qui donne une majoration $\log|G_s(z)| = O(J\,R^{\rho+\varepsilon})$ pour $|z| \leq R$. On spécialise $R = s^k$ avec $k < [\rho(d+1)]^{-1} = c$, ce qui donne

$$\max_{|z|=r} \log|G_s(z)| = o(s \log s) \qquad \text{quand} \quad R \to +\infty .$$

D'où, pour $r > |\zeta'|$, $k < c$, $\tau > 0$, la majoration

$$\log|D^{\lambda'}G_s(\zeta')| \leq s \log s + o(s \log s) - [s \log s + O(s)](1-\tau)k\,\nu_o^{(s)}(r).$$

La comparaison avec la minoration donnée par le lemme 4 donne alors pour les courants positifs fermés t_s :

LEMME 5.-

$$(10) \quad \begin{cases} \nu_o^{(s)}(r) \leq [(d+1)\rho + o(1)][K:Q] & \text{pour } s \to +\infty \text{, et tout } r > 0 \\ \nu_o^{(s)}(\zeta) \geq 1 & \text{pour } \zeta \in S_o . \end{cases}$$

(La dernière inégalité pour ν exprime que la multiplicité du germe $G_s = 0$ en ζ est au moins s, par construction de G_s.)

Ainsi les indicatrices projectives en 0 des courants t_s sont majorées par une constante dans C^d. De $\{t_s\}$ on extrait une suite (notée encore t_s) ayant une limite faible t : c'est un courant positif et fermé. On note $\nu_a(r)$ l'indicatrice projective de t relativement au point a. On a pour tout $r > 0$:

$$\lim_{s=\infty} \nu_a^{(s)}(r) = \nu_a(r) ,$$

et ν étant une fonction croissante de r, il en résulte

$$\nu_\zeta(r) \geq \overline{\lim_s}\, \nu^{(s)}(\zeta) \geq 1 .$$

D'où à partir de (10) :

LEMME 6.- Il existe un courant t positif, fermé, de type $(1,1)$ défini sur C^d dont les indicatrices projectives $\nu_a(r)$ vérifient

$$(11) \qquad \begin{cases} \nu_a(r) \leq (d+1)\rho[K:Q] & \text{pour tout } r \geq 0 \text{ et tout } a \in C^d \\ \nu(\zeta) \geq 1 & \text{pour } \zeta \in S_o . \end{cases}$$

Reste à établir que, sur le support de t, l'ensemble S_1 (notations du § 1) des ζ où l'on a $\nu(\zeta) \geq 1$ est contenu dans un ensemble analytique (cet ensemble est fermé et il est conjecturé actuellement mais non établi que S_1 est un ensemble analytique). La démonstration passe d'abord par la résolution de l'équation

$$(12) \qquad i\pi^{-1} d_z d_{\bar z} V = t$$

dans C^d par la méthode de [5d] qui donne une majoration de V ; Bombieri remarque que la construction de [5d] s'applique dès qu'on prend l'origine hors de ω, ce qu'on supposera. La solution est donnée par un potentiel [5d, p. 394]

$$(13) \qquad V(z) = \frac{(d-2)!}{2\pi^{d-1}} \int_{a \in C^d} \left[\frac{1}{\|a\|^{2d-2}} - \frac{1}{\|a-z\|^{2d-2}} \right] d\sigma(a)$$

où σ est la mesure $t \wedge \beta_{d-1} = (2\pi)^{-1} \Delta V$. Alors (13) entraîne :

LEMME 7.- Dans C^d d'une part, au voisinage d'un point $\zeta \in S_o$ d'autre part, on a :

$$(14) \qquad V(z) \leq \nu_o(\infty) \log\|z\| + O(1) \qquad \text{quand } \|z\| \to +\infty ;$$

$$(15) \qquad V(z) \leq \nu(\zeta) \log\|z-\zeta\| + O'(1) \qquad \text{quand } z \to \zeta, \ \zeta \in S_o ,$$

où ν_o est l'indicatrice projective de t, relativement à l'origine.

On prend $k \gg 2d$. Alors (15) montre que e^{-kV} n'est pas sommable en $\zeta \in S_o$. On applique alors le théorème d'existence du § 5 qui établit l'existence d'une fonction entière $F(z)$ telle que l'intégrale (7), $\|F\|^2_{kV}$, ait une valeur finie : sa convergence montre que $F(z)$ s'annule en tout point de S_o . Enfin pour les grandes valeurs de $\|z\|$, la convergence de l'intégrale (7) montre encore que $F(z)$ a une croissance polynomiale de degré au plus $\frac{1}{2}[k\,\nu_o(\infty) + 6d + \varepsilon] - d$. Alors la majoration (11) montre que $F(z)$ est un polynôme et

(16) $$\text{degré } F \leq d(d+1)[K:Q] + 2d .$$

On peut supposer en multipliant F par une constante qu'on a

$$|F| = 1 .$$

On a opéré, jusqu'ici sur les parties finies S_o de l'ensemble S des ζ en lesquels $f(\zeta) \in K^N$. Mais degré F est majoré indépendamment de card S_o et l'espace de tels polynômes avec $|F| = 1$ est compact ; d'où l'existence d'un polynôme F s'annulant sur tout S et vérifiant (16), ce qui achève la démonstration du théorème A_d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BOMBIERI - Algebraic values of meromorphic maps, Inventiones Math., 10 (1970), p. 267-287 et 11 (1970), p. 163-166.

[2] L. HÖRMANDER - L^2 estimates and existence theorems for the operator, Acta Math., 113 (1965), p. 89-192.

[3] J. KING - The currents defined by analytic varieties, Thesis, M.I.T., Cambridge, Mass., 1970, ronéoté.

[4] S. LANG - Introduction to transcendental numbers, Addison-Wesley, 1966.

[5] P. LELONG - a) Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation, Ann. Sc. E.N.S., t. 67 (1950), p. 393-419.

b) Propriétés métriques des ensembles analytiques complexes. Séminaire LELONG, 1965-1966, exposé n° 2.

c) Intégration sur un ensemble analytique complexe, Bull. S.M.F., t. 85 (1957), p. 239-262.

d) Fonctions entières et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans C^n, Journal d'Analyse, Jérusalem, t. 12 (1964), p. 365-406.

e) Plurisubharmonic functions and positive differential forms, Gordon Breach, New York, et Dunod, Paris, 1967.

f) Fonctions entières et fonctionnelles analytiques, Presses de Montréal, 1968.

[6] Th. SCHNEIDER - Ein Satz über ganzwertige Funktionen als Prinzip für Transzendenzbeweise, Math. Ann., 121 (1949), p. 131-140.

[7] P. THIE - The Lelong number of a point of a complex analytic set, Math. Ann., 172 (1967), p. 269-312.