

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

FRANÇOIS LATOUR

Chirurgie non simplement connexe

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 397, p. 289-322

[<http://www.numdam.org/item?id=SB_1970-1971__13__289_0>](http://www.numdam.org/item?id=SB_1970-1971__13__289_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CHIRURGIE NON SIMPLEMENT CONNEXE

(d'après C. T. C. WALL)

par François LATOURIntroduction

Etant donné un complexe cellulaire fini X et un entier n on se pose deux questions :

1) Existe-t-il une variété compacte V (PL ou différentiable) de dimension n et une équivalence d'homotopie simple $\phi : V \rightarrow X$?

2) On considère deux couples (V, ϕ) et (V', ϕ') comme équivalents s'il existe un isomorphisme (PL ou différentiable) ψ entre V et V' tel que $\phi \circ \psi$ est homotope à ϕ' ; déterminer l'ensemble des classes d'équivalence, noté $\tilde{s}_n^*(X)$ ($*$ = PL ou Diff).

Il est plus facile d'étudier le quotient $s_n^*(X)$ pour la relation $(V, \phi) \sim (V', \phi')$ s'il existe un s -cobordisme W entre V et V' et $\bar{\phi} : W \rightarrow X$ étendant ϕ et ϕ' . On a une surjection $\tilde{s}_n^*(X) \rightarrow s_n^*(X)$ et si $n \geq 5$ c'est une bijection (théorème du s -cobordisme [7]).

Pour que $s_n^*(X)$ soit non vide il faut que X possède les propriétés homotopiques des variétés de dimension n , il n'y a donc qu'un entier n pour lequel $s_n^*(X)$ peut être non vide.

Si X est un complexe fini, Y et X' deux sous-complexes, X' étant une

variété $*$ de dimension $n-1$, on considère les couples (V, ϕ) où V est une variété $*$ de dimension n avec dV réunion de deux sous-variétés de dimension $n-1$: W et V' et $\phi : (V, W, V') \rightarrow (X, Y, X')$ induit une équivalence d'homotopie simple entre V et X , entre W et Y et un isomorphisme $*$ entre V' et X' . L'analogie de la relation précédente donne un quotient noté $s^*(X, Y)$.

Ces questions ont été étudiées d'abord par Kervaire et Milnor [3] dans le cas où $X = S^n$; leurs méthodes ont été généralisées par Browder et Novikov dans le cas où X est simplement connexe [1 et 6]

Nous exposerons ici le cas général, en suivant les travaux de Wall. [9]

§ 1 COMPLEXES DE POINCARÉ

Soit X un C.W. complexe fini et connexe; soient $\pi = \pi_1(X)$ et $A = \mathbb{Z}[\pi]$ et w un homomorphisme de π dans $\{\pm 1\}$. On a un antiautomorphisme involutif de A donné par $a = \sum_{g \in \pi} n(g) g \rightarrow \tilde{a} = \sum n(g) w(g) g^{-1}$. L'homomorphisme w permet de définir des homologies comme suit: soit $\tilde{X}$ le revêtement universel de X ; π agit à droite sur $\tilde{X}$ et $C_*(\tilde{X})$, complexe des chaînes cellulaires, est un A -module à droite libre et de type fini; les cellules de X définissent une A -base déterminée aux permutation et multiplication par les éléments de $(\pm \pi)$ près. Si B est un A -module à droite on définit:

$H_*^w(X; B) = H_*(B \otimes_A \overline{C_*(\tilde{X})})$ et $H_*^*(X; B) = H_{-*}(\text{Hom}_A(C_*(\tilde{X}), B))$ où $\overline{C_*(\tilde{X})}$ est C_* muni de la structure à gauche $a.c = c.\tilde{a}$.

Exemples

1) Si $B = \mathbb{Z}$ avec la structure de A -module triviale, $H^*(X, \mathbb{Z})$ est la cohomologie ordinaire de X ; $\mathbb{Z} \otimes_A \overline{C_*(\tilde{X})}$ s'obtient à partir de $C_*(\tilde{X})$ en identifiant $c.g$ et $w(g)c$ et $H_*^w(X, \mathbb{Z})$ est l'homologie ordinaire de X mais à coefficients

tordus par w .

2) Si $B = A$, $H^*(X, A)$ est la cohomologie à supports compacts de $\tilde{X}$ et $H_*^W(X, A)$ est l'homologie ordinaire de $\tilde{X}$.

3) Si $B = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ cela se réduit à l'homologie et la cohomologie de X à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

L'application $C_*(\tilde{X}) \rightarrow C_*^{LF}(X)$ (chaines cellulaires localement finies) donnée par $c \mapsto \sum_{\bar{g}} c \cdot \bar{g}$ passe au quotient pour donner un transfert $\text{tr} : \mathbb{Z} \otimes_A \overline{C_*(\tilde{X})} \rightarrow C_*^{LF}(\tilde{X})$.

Soient $x \in H_n^W(X, \mathbb{Z})$, ξ un cycle représentant x et $\eta = \text{tr}(\xi)$; alors $\eta \cdot g = w(g) \eta$ et le cap produit par $\eta : C_c^*(\tilde{X}) \rightarrow \overline{C_*^*(\tilde{X})}$ est A -linéaire pour les structures à gauche. La classe d'homotopie de cette application, notée $P(x)$, ne dépend pas du choix du cycle ξ ni de l'approximation de la diagonale.

DÉFINITION Un complexe de Poincaré (sans bord) connexe de dimension n est la donnée d'un C.W. complexe fini et connexe X , d'un homomorphisme $w : \pi_1(X) \rightarrow \{\pm 1\}$, d'une classe $[X] \in H_n^W(X, \mathbb{Z})$ tels que :

$$P([X]) : \text{Hom}_A(C_p(\tilde{X}), A) \rightarrow \overline{C_{n-p}(\tilde{X})}$$

est une équivalence d'homotopie simple pour tout p .

Conséquences

1) Pour tout A -module B on a des isomorphismes :

$$[X]_{\cap} : H^p(X, B) \rightarrow H_{n-p}^W(X, B)$$

2) $[X]$ est unique au signe près car $H_n^W(X, \mathbb{Z}) \simeq H^0(X, \mathbb{Z})$. Un calcul analogue montre que w est unique ; de même sa dimension est unique.

Généralisations

1) La définition s'étend clairement aux complexes de Poincaré non connexes.

2) Si (Y, X) est une paire de C.W. complexes finis, on note $\rho: \tilde{Y} \rightarrow Y$ le revêtement universel de Y , $\tilde{X} = \rho^{-1}(X)$ et $A = \mathbb{Z}[\pi_1(Y)]$

DÉFINITION Un complexe de Poincaré (à bord) connexe de dimension n est la donnée d'une paire de C.W complexes finis (Y, X) , Y connexe, X complexe de Poincaré (sans bord) de dimension $n-1$, $w: \pi_1(Y) \rightarrow \{\pm 1\}$ induisant le w correspondant sur chaque composante de X , d'une classe $[Y] \in H_n^w(Y, X; \mathbb{Z})$ (avec $\partial[Y] = [X]$ dans $H_{n-1}^w(X, \mathbb{Z})$) tels que $[Y]$ induise, par cap-produit, une équivalence d'homotopie simple :

$$\text{Hom}_A(C_p(\tilde{Y}), A) \rightarrow \overline{C_{n-p}(\tilde{Y}, \tilde{X})}$$

pour tout p .

Exemple

Toute variété triangulée de dimension n , compacte et orientée, est munie d'une structure de complexe de Poincaré de dimension n : c'est le théorème de dualité de Poincaré.

Propriétés de recollement et de découpage.

1) Si (Y_1, X) et (Y_2, X) sont deux complexes de Poincaré à bord de dimension n , on peut définir de manière canonique une structure de complexe de Poincaré de dimension n sur $Z = Y_1 \cup_X Y_2$; de même lorsqu'on ne recolle que sur une partie du bord.

2) Si $Z = Y_1 \cup_X Y_2$, si Z est un complexe de Poincaré sans bord de dimension n , si (Y_1, X) est un complexe de Poincaré à bord de dimension n , si l'image de $[Y_1]$ est $[Z]$ et si $\pi_1(Y_2) \rightarrow \pi_1(Z)$ est un isomorphisme, alors (Y_2, X) a

une structure de complexe de Poincaré à bord de dimension tel que Z est le recollé de (Y_1, X) et de (Y_2, X) .

Propriétés tangentielles

La notion de fibré normal stable d'une variété se transpose assez bien dans le cas de complexe de Poincaré en utilisant la notion de fibration sphérique; une fibration de Serre $\xi : (p : E_\xi \rightarrow X)$ est une fibration sphérique de dimension q si la fibre a le type d'homotopie de S^{q-1} ; si $M(p)$ est le mapping-cylindre de p , la paire $(M(p), E)$ est le fibré homotopique en boules associé et $M(p)/_E$ est l'espace de Thom de ξ noté X^ξ .

On a clairement des notions d'équivalence (par homotopie fibrée) de somme de Whitney, d'équivalence stable; on a un classifiant BG_q et un classifiant stable BG (G_q monoïde des équivalences d'homotopie de S^{q-1} et $G = \varinjlim G_q$).

Si ξ est une fibration sphérique de dimension q on a l'isomorphisme de Thom $\phi : \tilde{H}_{p+q}(X^\xi, \mathbb{Z}^a) \rightarrow H_p(X, \mathbb{Z}^{a \cdot w(\xi)})$ (homologie ordinaire à coefficients tordus et $w(\xi)$ première classe de Stiefel Whitney de ξ).

THÉOREME 1 (Spivak) [8]

Soit X un complexe de Poincaré de dimension n , il existe une fibration sphérique stable ν sur X , unique telle que la classe de Thom $\phi^{-1}([X]) \in H_{n+N}(X^\nu, \mathbb{Z}^{w(\nu) \cdot w})$ soit sphérique.

Si (Y, X) est un complexe de Poincaré à bord de dimension n , il existe une fibration sphérique stable ν sur Y , unique telle que $\phi^{-1}([Y]) \in H_{n+N}(Y^\nu, X^\nu; \mathbb{Z}^{w(\nu) \cdot w})$ soit sphérique, $\phi^{-1}([X])$ est alors aussi sphérique.

Démonstration

L'unicité découle d'un analogue du théorème de S-dualité d'Atiyah. Rappelons la construction de Spivak : on triangule X , on le plonge dans $\mathbb{R}^{n+N}$ (N grand), on prend $(\bar{X}, d\bar{X})$ un voisinage régulier, alors l'inclusion $d\bar{X} \subset \bar{X}$ a le type d'homotopie de la fibration cherchée et $(\bar{X}, d\bar{X})$ est une variété représentant le fibré homotopique en boules associé.

§ 2 PLONGEMENTS DE COMPLEXES DE POINCARÉ

DÉFINITION Soient X^n et Y^p deux complexes de Poincaré de dimension n et p et $f : X \rightarrow Y$; On appelle plongement de complexes de Poincaré homotope à f la donnée de :

1) deux complexes de Poincaré à bord $(N_1, dN)^p$ et $(N_2, dN)^p$ de même bord

2) $\phi : X \rightarrow N_1$ équivalence d'homotopie simple

3) $\psi : N_1 \cup_{dN} N_2 \rightarrow Y$ équivalence d'homotopie simple telle que

a) $\psi \circ \phi$ est homotope à f

b) $\phi^{-1}|_{dN} : dN \rightarrow X$ a le type d'homotopie d'une fibration sphérique de dimension $p-n$, appelée fibration normale du plongement.

Remarques

1) Si $p-n \geq 3$ et si (N_1, dN) est 2-connexe, le théorème de Spivak assure que b) est réalisé.

2) On a une notion naturelle de plongements isotopes ; de même on voit comment étendre la définition au cas à bord .

La méthode pour étudier les plongements de complexes de Poincaré découle de 1'

Assertion

Soit $f : X^n \rightarrow Y^p$ avec $p-n \geq 3$, soient $(\bar{X}, d\bar{X})^{n+k}$ et $(\bar{Y}, d\bar{Y})^{p+k}$ deux variétés qui sont fibrés homotopiquement en boules sur X et Y , et $\tilde{f} : (\bar{X}, d\bar{X}) \rightarrow (\bar{Y}, d\bar{Y})$ étendant f . Si $g : (\bar{X}, d\bar{X}) \rightarrow (\bar{Y}, d\bar{Y})$ est un plongement de variétés homotope à $\tilde{f}$, g induit un plongement de complexes de Poincaré homotope à f .

Preuve

Soit N_1 un voisinage tubulaire de $g(\bar{X})$ et $N'_1 = \overline{dN_1 - d\bar{Y}}$, alors (N_1, N'_1) est un fibré vectoriel en boules de dimension $p-n$ sur X donc (N_1, N'_1) est un complexe de Poincaré à bord de dimension p .

Soit $N_2 = \bar{Y} - \text{Int}N_1$, comme $p-n \geq 3$, $\pi_1(N_2) = \pi_1(Y)$ et par découpage (N_2, N'_1) est un complexe de Poincaré à bord de dimension p .

Il faut remarquer que, par cette méthode, on obtient des plongements dont la fibration normale admet une réduction vectorielle.

THÉORÈME 2

Soit $f : X^n \rightarrow Y^p$ telle que $v_X - f^*(v_Y)$ est stablement trivial.

Si $p-n \geq 3$ et si $p \geq 2n+1$, il existe un plongement de complexes de Poincaré homotope à f .

On a un théorème analogue pour les plongements de paires de Poincaré.

Esquisse de la démonstration : l'hypothèse de trivialité stable de $v_X - f^*(v_Y)$ permet

d'étendre f en une application $\bar{f} : (\bar{X}, d\bar{X})^{n+k} \rightarrow (\bar{Y}, d\bar{Y})^{p+k}$ du fibré de Spivak de X dans celui de Y . L'hypothèse $p \geq 2n+1$ et $p-n \geq 3$ permet de trouver un plongement de variétés homotope à $\bar{f}$ [5] d'où le résultat d'après l'assertion.

On démontre par des méthodes analogues :

THÉORÈME 3

Soient X une variété de dimension n de bord dX , Y un complexe de Poincaré de dimension p , (Y', Y'') un découpage du bord dY en deux sous-complexes de Poincaré de dimension $p-1$, et $f : (X, dX) \rightarrow (Y, Y')$. On suppose $f^*(\nu_Y)$ admet une réduction vectorielle (ou P.L.). Si

- 1) $p-n \geq 3$
- 2) $\pi_i(X, dX) = 0$ pour $i \leq 2n-p$
- 3) $f_* : \pi_j(X, dX) \rightarrow \pi_j(Y, Y')$ est un isomorphisme pour $j \leq 2n-p$
et surjectif pour $j = 2n-p+1$,

il existe un plongement de complexes de Poincaré de (X, dX) dans (Y, Y') homotope à f .

THÉORÈME 4 (lissage des plongements)

Soient X^n et Y^p deux variétés de dimension n et p et $f : X \rightarrow Y$; on suppose que $p-n \geq 3$ et qu'il existe un plongement de complexes de Poincaré homotope à f dont la fibration normale admet une réduction vectorielle (ou PL) ξ^{p-n} . Si $\tau_X \oplus \xi$ et $f^*(\tau_Y)$ sont des fibrés vectoriels (ou PL) équivalents, il existe un plongement de variétés $g : X \rightarrow Y$ isotope au plongement donné, comme plongement de complexes de Poincaré.

Preuve :

Dans le cas où le fibré normal est trivial , on montre que le plongement de complexes de Poincaré peut se représenter par un plongement de variétés de $X_X(D^k, S^{k-1})$ dans $Y_X(D^k, S^{k-1})$. Ensuite on utilise les techniques de [5] pour montrer que ce plongement est isotope à un plongement de variétés conservant la projection sur D^k .

Décomposition en anses des complexes de Poincaré.

Le théorème 3 permet d'utiliser la méthode classique de décomposition en anses des cobordismes : si V est un complexe de Poincaré de dimension n et W une partie du bord et si $H_p(V, W; A) = 0$ pour $p < k$ ($A = \mathbb{Z}(\pi_1(V))$) , le théorème 3 permet de plonger une réunion de (D^k, S^{k-1}) représentant un système de générateurs de $H_k(V, W; A)$ pour $n-k \geq 3$. En enlevant des anses des deux cotés , on voit que tout cobordisme de dimension ≥ 5 admet une décomposition en anses et :

THÉORÈME 5

Tout complexe de Poincaré de dimension au moins égale à 5 admet une décomposition en anses.

§ 3 DONNÉES DE CHIRURGIE

On désignera par $\star$ l'une des quatre catégories suivantes : variétés différentiables (Diff) , variétés semi-linéaires (PL) , variétés topologiques (Top) , complexes de Poincaré (CP) . Un fibré $\star$ sera donc soit un fibré vectoriel , soit un microfibré semi-linéaire , soit un microfibré topologique , soit un fibré homotopique en boules . On notera $B\star$ le classifiant des fibrés $\star$ c'est-à-dire BO , BPL , $BTop$ ou BG . On sait que tout objet V de la catégorie $\star$ est muni d'un fibré $\star$ stable que l'on appelle son fibré

normal et que l'on notera $v(V)$.

Définition des données de chirurgie :

Soit X un complexe de Poincaré (sans bord), de dimension n ; une donnée de chirurgie sur X dans la catégorie $\star$ est, par définition, un quadruple (V, ϕ, α, η) où V est un objet de la catégorie $\star$ de dimension n sans bord , ϕ est une application de degré l de V dans X , α est un fibré $\star$ (stable) sur X , et η est un isomorphisme de fibrés de $\phi(\alpha)$ sur $v(V)$.

Soit X un complexe de Poincaré de dimension n , dont le bord est subdivisé en sous-complexes $(X', Y_1, \dots, Y_k)$ de dimension $n-1$, parmi lesquels X' est un objet de la catégorie $\star$ (Nota : il se peut que X' soit vide , ou qu'il soit égal à dX tout entier et qu'il n'y ait pas de Y_i) ; une donnée de chirurgie sur $(X, Y_1, \dots, Y_k)$ est, par définition, un quadruple $((V, W_1, \dots, W_k), \phi, \alpha, \eta)$ où V est un objet de la catégorie $\star$ de dimension n , dont le bord est subdivisé en $k+1$ sous-objets de dimension $n-1$ $V', W_1, \dots, W_k$, ϕ est une application de degré l de (V, dV) dans (X, dX) qui induit pour tout i ($i = 1, \dots, k$) une application de degré l de (W_i, dW_i) dans (Y_i, dY_i) et qui induit un isomorphisme de V' sur X' (isomorphisme dans la catégorie $\star$) , α est un fibré $\star$ sur X , et η est un isomorphisme de $\phi(\alpha)$ sur $v(V)$.

Il est clair que par restriction , toute donnée de chirurgie sur $(X, Y_1, \dots, Y_k)$ induit $(\forall i)$ une donnée de chirurgie sur $(Y_i, Y_1 \cap Y_i, \dots, Y_k \cap Y_i)$

Cobordisme des données de chirurgie :

On dira que deux données de chirurgie $\star$, Z_0 et Z_1 sur X (resp : (X, Y)) sont cobordantes , si il existe une donnée de chirurgie $\star$ sur $(X \times I, X \times \{0\}, X \times \{1\})$

(resp : $(X \times I, Y \times I, X \times \{0\}, X \times \{1\})$) dont les restrictions à $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$ (resp : à $(X \times \{0\}, Y \times \{0\})$ et $(X \times \{1\}, Y \times \{1\})$) sont Z_0 et Z_1 respectivement. Ceci définit une relation d'équivalence, l'ensemble des classes d'équivalence sera noté $\Omega^*(X)$ (resp : $\Omega^*(X, Y)$).

Calcul de Ω^{PL} et de Ω^{Diff} :

THÉOREME 6

Soit (V, ϕ, α, η) (resp : $(V, W, \phi, \alpha, \eta)$) une donnée de chirurgie sur X (resp : (X, Y)), alors le fibré α est isomorphe, comme fibré homotopique, au fibré de Spivak de X .

Démonstration (dans le cas sans bord) : ϕ induit une application de degré 1 de l'espace de Thom de $\mathcal{V}(V)$ dans l'espace de Thom de α , et comme la classe fondamentale de l'espace de Thom de $\mathcal{V}(V)$ est sphérique, celle de l'espace de Thom de α l'est aussi, ce qui caractérise le fibré de Spivak. En fait si $\mu : X \rightarrow BG$ est l'application classifiante de $\mathcal{V}(X)$, ceci définit un relèvement

$$\begin{array}{ccc} & & B^* \\ & \nearrow \tilde{\mu} & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\mu} & BG \end{array}$$

On démontre ainsi le

THÉOREME 7 :

Si $*$ est PL ou Diff, cette construction définit une bijection de $\Omega^*(X)$ (resp : $\Omega^*(X, Y)$) sur l'ensemble des classes d'homotopie des relèvements de μ dans B^*

(resp : sur l'ensemble des classes d'homotopie des relèvements de μ dans $B*$ qui coïncident sur X' avec le relèvement défini par la structure d'objet de $*$ donnée sur X').

On sait que , s'il n'est pas vide , cet ensemble est l'espace homogène du groupe des classes d'homotopie d'applications de X dans $G/*$ (resp : de X/X' dans $G/*$) (où $G/*$ désigne la fibre de l'application naturelle $BO \rightarrow BG$ ou $BPL \rightarrow BG$) .

Une suite exacte :

Soit X un objet de $*$ et Y un sous-objet de dX (Si $*$ = Top on supposera que X est muni d'une structure de complexe de Poincaré , qui fait de Y un sous-complexe de Poincaré de dX) . Il est clair que l'on a des applications naturelles $\Omega^*(X, \emptyset) \rightarrow \Omega^*(X, Y)$ et $\Omega^*(X, Y) \rightarrow \Omega^*(Y, \emptyset)$. On définit une application $\Omega^*(Y \times I, \emptyset) \rightarrow \Omega^*(X, \emptyset)$ en considérant $Y \times I$ comme un morceau de X (théorème du collier du bord) et en prolongeant toute donnée sur $Y \times I$ par la donnée triviale sur $\overline{X - Y \times I}$. On définit des lois de groupe sur $\Omega^*(X \times I, \emptyset)$, $\Omega^*(Y \times I, \emptyset)$ et $\Omega^*(X \times I, Y \times I)$ par une construction géométrique classique ; ces groupes sont abéliens si $X = X' \times I$, $Y = Y' \times I$ et $(X, Y) = (X', Y') \times I$. Par ailleurs les structures d'objets de $*$ de X et Y définissent des points de base $(X, Id, \nabla(X), Id)$, $(Y, Id, \nabla(Y), Id)$ et $((X, Y), Id, \nabla(X), Id)$ dans $\Omega^*(X, \emptyset)$, $\Omega^*(Y, \emptyset)$ et $\Omega^*(X, Y)$ respectivement . On démontre alors le

THÉORÈME 8 : La suite

$\dots \rightarrow \Omega^*(X \times I, \emptyset) \rightarrow \Omega^*(X \times I, Y \times I) \rightarrow \Omega^*(Y \times I, \emptyset) \rightarrow \Omega^*(X, \emptyset) \rightarrow \Omega^*(X, Y) \rightarrow \Omega^*(Y, \emptyset)$
est une suite exacte (i.e. : une suite exacte d'ensembles en $\Omega^*(X, \emptyset)$ et $\Omega^*(X, Y)$, et une suite exacte de groupes avant) .

Remarque :

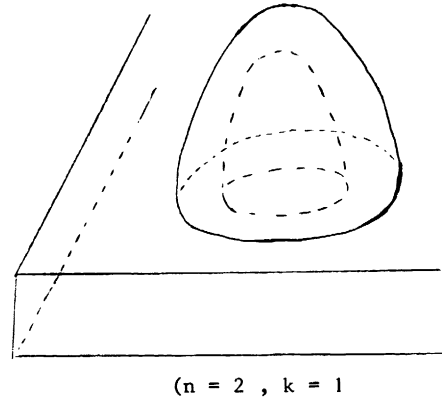
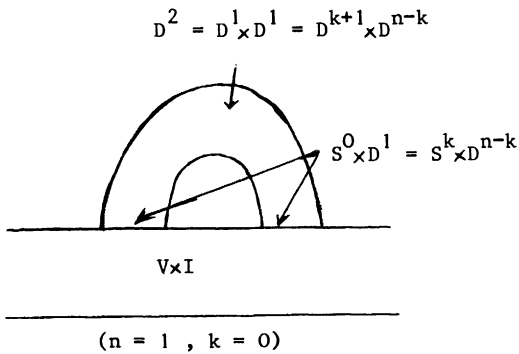
Si $*$ = Diff ou PL , la structure de groupe que l'on vient de définir sur

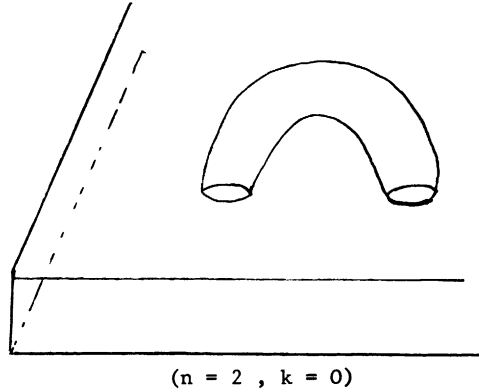
$\Omega^*(X \times I)$ et $\Omega^*(X \times I, Y \times I)$ coïncide avec la structure d'espace homogène donnée par le théorème 7 .

§ 4 LA CHIRURGIE EN DIMENSION INFÉRIEURE À LA MOITIÉ .

DÉFINITION DES CHIRURGIES :

Soit V un objet sans bord de dimension n de $\star$, et soit f un plongement de $S^k \times D^{n-k}$ dans V . Soit f_0 le plongement naturel de $S^k \times D^{n-k}$ dans S^n (i.e. : on identifie D^{n+1} à $D^{k+1} \times D^{n-k}$, ce qui identifie $dD^{n+1} = S^n$ à la réunion de $S^k \times D^{n-k}$ et de $D^{k+1} \times S^{n-k-1}$). Recollons $V \times I$ et D^{n+1} en identifiant pour tout point x de $S^k \times D^{n-k}$, le point $(f(x), 1)$ et le point $f_0(x)$. On obtient un objet W de $\star$ dont le bord est formé de V (identifié à $V \times \{0\}$) et d'un objet V' de $\star$. On peut encore décrire V' de la façon suivante : on enlève l'intérieur de l'image de f pour obtenir un objet V_0 de $\star$ dont le bord est identifié à $S^k \times S^{n-k-1}$, puis on recolle V_0 et $D^{k+1} \times S^{n-k-1}$ le long de leur bord .





Soit maintenant (V, ϕ, α, η) une donnée de chirurgie $\star$ sur X , et soit f un plongement de $S^k \times D^{n-k}$ dans V . On peut faire la construction précédente. Si on s'est donné de plus une homotopie h de $(\phi \cdot f / S^k : S^k \rightarrow X)$ à 0, $\phi : V \rightarrow X$ se prolonge en une application ψ de W dans $X \times I$ qui envoie $V (= V \times \{0\})$ dans $X \times \{0\}$ et V' dans $X \times \{1\}$. On note β le fibré sur $X \times I$ obtenu par extension de α . Soit A l'image de f , c'est un objet de $\star$ dont le fibré normal $\nabla(A)$ est trivialisé de deux façons :

$$1) \text{ par l'isomorphisme } f : S^k \times D^{n-k} \rightarrow A$$

2) par le fait que $\nabla(A) = (V)/A = \phi^*(\alpha)/A = (\phi/A)^*(\alpha)$ et l'homotopie de ϕ/A à 0

On vérifie que si ces deux trivialisations coïncident, η se prolonge de façon naturelle en un isomorphisme μ de $\phi^*(\beta)$ sur $\nabla(W)$. On a ainsi défini une donnée de chirurgie $\star((W, V, V'), \psi, \beta, \mu)$ sur $(X \times I, X \times \{0\}, X \times \{1\})$ qui réalise un cobordisme entre (V, ϕ, α, η) et une nouvelle donnée $(V', \phi', \alpha', \eta)$ sur X . On dira que l'on a fait la chirurgie définie par h et f . Les théorèmes de décompo-

sition en anses montrent que si $\star = \text{PL}$ ou Diff , et si $\star = \text{CP}$ et $n \geq 4$, tout cobordisme entre deux données sur X est obtenu en mettant bout à bout un certain nombre de cobordismes de cette forme.

Pour les données sur (X, Y) on a une notion de chirurgie analogue à celle-ci pour les plongements de $S^k_X D^{n-k}$ dans l'intérieur de X ; on a aussi une notion de chirurgie sur le bord "étendue à l'intérieur" pour les plongements de $S^k_X D^{n-k-1}$ dans Y . Tout cobordisme est ici encore (si $\star = \text{Diff}$ ou PL , et aussi si $\star = \text{CP}$ et $\dim X \geq 5$ (ou $\dim X = 4$ et $Y = \emptyset$)) une suite de chirurgies.

Données réduites et cobordismes réduits :

Ici $\star = \text{Diff}$, PL ou CP pour toute application $\phi : V \rightarrow X$ on notera $M(\phi)$ le mapping cylindre de ϕ , $\widetilde{M(\phi)}$ son revêtement universel et $\widetilde{V}$ le relèvement de V dans $\widetilde{M(\phi)}$. On pose $\pi_i(\phi) = \pi_{i+1}(M(\phi), V)$ et $H_i(\widetilde{\phi}) = H_{i+1}(\widetilde{M(\phi)}, \widetilde{V})$.

Comme ϕ est de degré 1, $\phi_* : H_1(\widetilde{V}) \rightarrow H_1(\widetilde{X})$ est surjective, $\phi^* : H^i_c(\widetilde{X}) \rightarrow H^i_c(\widetilde{V})$ est injective, $H_i(\widetilde{\phi})$ est le noyau de ϕ_* et on a une décomposition en somme directe $H_1(\widetilde{V}) \simeq H_1(\widetilde{\phi}) \oplus H_1(\widetilde{V})$ de plus on a une dualité de Poincaré entre $H_1(\widetilde{\phi})$ et $H^{n-1}(\widetilde{\phi}) = \text{Coker}(\phi^* : H^{n-1}_c(\widetilde{X}) \rightarrow H^{n-1}_c(\widetilde{V}))$.

Soit $(V, \phi, \alpha, \gamma)$ une donnée de chirurgie sur X ($\dim X = n$). Soit i tel que $2i + 2 \leq n$, et soit $\theta \in \pi_i(\phi)$. Un représentant de θ est un couple (f, h) où f est une application de S^i dans V et h une application de D^{i+1} dans X telles que $h/S^i = \phi \circ f$. Comme $2i + 2 \leq n$, on peut supposer que f est un plongement; de plus le fibré normal à ce plongement est stablement trivialisé par α, γ et h ; donc ce fibré normal est trivialisé puisque $2i + 2 \leq n$. Par conséquent f, h et cette trivialisatation normale définissent une chirurgie. On vérifie facilement que si

$(V', \phi', \alpha', \eta')$ est la nouvelle donnée de chirurgie définie par cette chirurgie ,
 $H_i(\tilde{\phi}') = H_j(\tilde{\phi})$ pour $j < i$ et on a une suite exacte $\{0\} \rightarrow H_1(\tilde{\phi}) \rightarrow H_1(\tilde{\phi}') \rightarrow 0$
 où $\{0\}$ est le sous $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$ -module engendré par 0

Ceci permet de montrer que toute donnée de chirurgie sur X est cobordante à une donnée telle que $\pi_i(\phi) = 0$ pour $2i + 2 \leq n$. En particulier pour $n \geq 4$,
 $\phi_*: \pi_1(V) \rightarrow \pi_1(X)$ est un isomorphisme. On en déduit, si $n = 2k + 1$, que
 $H_i(\tilde{\phi}) = 0$ pour i différent de k et $k+1$, et si $n = 2k$, que $H_i(\tilde{\phi}) = 0$ pour i différent de k . On note A l'anneau $\mathbb{Z}(\pi_1(X))$. Pour $n = 2k$ ($k \geq 2$), et puisque V et X sont des complexes cellulaires finis, $H_*(\tilde{\phi})$ est l'homologie d'un complexe
 $0 \rightarrow C_p \rightarrow C_{p-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$
 où les C_j sont des A modules libres munis d'une base naturelle finie. On peut alors démontrer que l'on a un isomorphisme naturel λ de $H_k(\tilde{\phi}) + \sum_{j-k \text{ impair}} C_j$ sur $\sum_{j-k \text{ pair}} C_j$.
 Ceci prouve que $H_k(\tilde{\phi})$ est projectif stablement libre. On se ramène alors (par des chirurgies correspondant à des plongements de S^k dans V qui bordent des disques dans V) au cas où $H_k(\tilde{\phi})$ est A libre et possède une A base telle la matrice de λ définisse l'objet 0 de $Wh(\pi_1(X))$.

DÉFINITION :

Soit (V, ϕ, α, η) une donnée de chirurgie sur X ($\dim X = n$), on dit qu'elle est réduite si $\pi_i(\phi) = 0$ pour $2i + 2 \leq n$ et si de plus, dans le cas où $n = 2k$ ($k \geq 2$), $H_k(\tilde{\phi})$ est libre et possède une base vérifiant la propriété ci-dessus. Si
 $((W, V_0, V_1), \phi, \alpha, \eta)$ est un cobordisme entre deux données réduites, on dit qu'il est réduit si $\pi_i(\phi) = 0$ pour $2i + 1 \leq n$ et si de plus, dans le cas où $n = 2k - 1$ ($k \geq 2$), $H_k(\tilde{\psi}, \tilde{\psi}/V_0)$ est libre et possède une base vérifiant une pro-

priété analogue à celle que l'on a décrite ci-dessus .

Le raisonnement que l'on a fait ci-dessus , et un raisonnement analogue pour les cobordismes démontrent le

THÉORÈME 9 :

Si $\dim X \geq 4$, tout élément de $\Omega^*(X)$ peut être représenté par une donnée réduite si deux données réduites définissent le même élément de $\Omega^*(X)$, elles sont cobordantes par un cobordisme réduit .

Remarques :

1) On a pour les paires (X, Y) une notion analogue de données et de cobordismes réduits (je ne les définis pas ici) et un théorème analogue au théorème 9.

2) Tout cobordisme réduit est une suite de chirurgies de dimension k si $n = 2k + 1$ ($k \geq 2$) . Si $n = 2k$ (≥ 4) tout cobordisme réduit est une suite de chirurgies de dimension $k-1$, suivie d'une suite de chirurgies de dimension k de sorte que toutes les données intermédiaires sont des données réduites .

La suite exacte de Wall (cas sans bord) :

Ici $*$ = Diff ou PL . En associant à tout représentant (V, ϕ) d'un élément de $s^*(X)$, la donnée de chirurgie (V, ϕ, α, η) où $\alpha = (\phi^{-1})^* (\bigvee(V))$, et où η est l'isomorphisme naturel de $\phi^*(\phi^{-1})^* (\bigvee(V))$ sur $\bigvee(V)$, on définit une application naturelle :

$$\xi : s^*(X) \rightarrow \Omega^*(X)$$

Par ailleurs on a une application évidente (oubli de la structure $*$)

$$\chi : \Omega(X) \rightarrow \Omega^{\text{CP}}(X)$$

THÉORÈME 10

Si $\dim X \geq 4$, la suite $s^*(X) \xrightarrow{\xi} \Omega^*(X) \xrightarrow{\chi} \Omega^{CP}(X)$
est une suite exacte d'ensembles .

Démonstration :

Il est clair que $\chi \cdot \xi (s^*(X))$ est le point de base de $\Omega^{CP}(X)$. Inversement on doit montrer que si une donnée de chirurgie $\star Z = (V, \phi, \alpha, \eta)$ sur X est cobordante à $(X, Id, \bigvee(X), Id)$ parmi les données de chirurgie CP , alors Z est cobordante parmi les données $\star$ à une donnée $\star Z' = (V', \phi', \alpha', \eta')$ où ϕ' est une équivalence d'homotopie . On peut supposer que Z et le cobordisme de Z à $(X, Id, \bigvee(X), Id)$ sont réduits ; le cobordisme est alors une suite de chirurgies , que l'on peut lisser grâce au théorème 4 ; Z' est le lissage de $(X, Id, \bigvee(X), Id)$ ainsi obtenu .

Considérons maintenant un représentant $H = (W, \Psi, \beta, \mu)$ d'un élément de $\Omega^{CP}(X \times I, \emptyset)$, et un représentant (V, ϕ) d'un élément de $s^*(X)$, on peut considérer que H est un cobordisme CP de la donnée $\star$ associée à (V, ϕ) à la donnée $CP (X, Id, \bigvee(X), Id)$; en appliquant à ce cobordisme la même méthode de lissage , on obtient un représentant (V', ϕ') d'un nouvel élément de $s^*(X)$. Ceci définit une opération du groupe $\Omega^{CP}(X \times I, \emptyset)$ sur $s^*(X)$.

THÉORÈME 11 :

Si $\dim X \geq 4$ deux éléments A et B de $s^*(X)$ ont même image par ξ si et seulement si il existe un élément G de $\Omega^{CP}(X \times I, \emptyset)$ tel que $B = G.A$.

Supposons maintenant que $s^*(X)$ soit non vide , et choisissons un point de base ; pour simplifier on supposera que X est un objet de $\star$ et que ce point de base est (X, Id) .

On a alors une application naturelle (oubli de la structure $\star$)

$$\chi : \Omega^{\star}(X \times I, \emptyset) \rightarrow \Omega^{CP}(X \times I, \emptyset)$$

et on démontre le

THÉOREME 12 :

Si $\dim X \geq 4$ pour tout élément A de $s^{\star}(X)$ le stabilisateur de A dans $\Omega^{CP}(X \times I, \emptyset)$ est l'image de χ .

En continuant ces constructions, on obtient, pour tout élément X sans bord de $\star$ de dimension $n \geq 4$, une suite exacte

$$\dots \Omega^{\star}(X \times I^p, \emptyset) \rightarrow \Omega^{CP}(X \times I^p, \emptyset) \rightarrow s^{\star}(X \times I^{p-1}, \emptyset) \rightarrow \dots$$

$$\dots \Omega^{CP}(X \times I, \emptyset) \rightarrow s^{\star}(X) \rightarrow \Omega^{\star}(X) \rightarrow \Omega^{CP}(X)$$

Cette suite étant une suite exacte de groupes sauf en $\Omega^{CP}(X \times I, \emptyset)$, $s^{\star}(X)$ et $\Omega^{\star}(X)$ où l'exactitude est précisée par les théorèmes 10, 11 et 12.

La suite exacte de Wall (cas relatif) :

On suppose encore que $\star = \text{Diff}$ ou PL . On suppose que $\dim X \geq 5$ ou que $\dim X = 4$ et $Y = \emptyset$. On a alors une suite exacte d'ensembles

$$s^{\star}(X, Y) \xrightarrow{f} \Omega(X, Y) \xrightarrow{\chi} \Omega^{CP}(X, Y)$$

On fait opérer $\Omega^{CP}(X \times I, Y \times I)$ sur $s^{\star}(X, Y)$, et les orbites de cette opération sont les ensembles de la forme $\xi^{-1}(D)$ (où D est un élément de $\Omega^{\star}(X, Y)$). Si X est un objet de $\star$, et Y un sous-objet de son bord, $\mathcal{R}^{\star}(X \times I, Y \times I)$ existe et s'envoie naturellement dans $\Omega^{CP}(X \times I, Y \times I)$. L'image de cette application est le stabilisateur de chacun des points de $s^{\star}(X, Y)$. Et la suite exacte se prolonge indéfiniment vers la gauche, comme dans le cas sans bord.

397-20

Remarque :

Il est clair que le problème que l'on s'est posé est maintenant ramené à celui du calcul des Ω^{CP} ; c'est ce que nous allons étudier au § 6 .

§ 5 PRÉLIMINAIRES AU CALCUL DES Ω^{CP} Nombres d'intersection

Soient (Y, y_0) une variété connexe de dimension $2n$, $w : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \{\pm 1\}$ la première classe de Stiefel, (X_i, x_i) ($i = 0, 1$) deux variétés simplement connexes de dimension n et $f_i : X_i \rightarrow Y$ deux immersions munies d'un chemin a_i entre y_0 et $f_i(x_i)$ (immersions dans le revêtement universel de Y). On veut définir un nombre d'intersection $I(f_0, a_0 ; f_1, a_1) \in \mathbb{Z}(\pi_1(Y))$ ne dépendant que des classes d'homotopie régulière ; pour cela on suppose que f_0 et f_1 sont en position générale. A tout point d'intersection P , on associe deux chemins $b_i(P)$ entre y_0 et P en composant a_i avec un chemin joignant $f_i(x_i)$ à P dans $f_i(X_i)$ (ces chemins sont définis à homotopie près car $\pi_1(X_i) = 0$). Soit $\varepsilon_p = \pm 1$, obtenu en comparant l'orientation de $T_p(Y)$ induite de l'orientation de $T_{y_0}(Y)$ par le chemin $b_0(P)$ et celle de $T_p(X_0) \oplus T_p(X_1)$ et soit $g_p = b_0(P) \cdot b_1(P)^{-1} \in \pi_1(Y)$. On pose $I(f_0, a_0 ; f_1, a_1) = \sum_p \varepsilon_p g_p$.

Il est clair que cela ne dépend que des classes d'homotopie régulière ; de plus si $(f_1, a_1) \cdot g = (f_1, g^{-1} a_1)$ et pour une définition manifeste de la somme connexe $(f_1, a_1) + (f'_1, a'_1)$ on a les formules :

$$I(f_0, a_0 ; (f_1, a_1) \cdot g) = I(f_0, a_0 ; f_1, a_1) \cdot g$$

$$I(f_0, a_0 ; (f_1, a_1) + (f'_1, a'_1)) = I(f_0, a_0 ; f_1, a_1) + I(f_0, a_0 ; f'_1, a'_1)$$

$$I(f_1, a_1; f_0, a_0) = (-1)^n \overline{I(f_0, a_0; f_1, a_1)}$$

La dernière relation montre qu'on ne pourra définir une classe d'autointersection $o(f_0, a_0)$ que dans le quotient de $\mathbb{Z}(\pi_1(Y))$ par $\{\alpha - (-1)^n \bar{\alpha}\}$. On a les formules :

$$o((f_0, a_0).g) = \bar{g}.o(f_0, a_0).g$$

$$o((f_0, a_0) + (f_1, a_1)) = o(f_0, a_0) + o(f_1, a_1) + [I(f_0, a_0; f_1, a_1)]$$

$$[I(f_0, a_0; f_0, a_0)] = o(f_0, a_0) + (-1)^n \overline{o(f_0, a_0)}$$

la dernière formule n'est vraie que si le fibré normal de f_0 est trivial. Pour $n \geq 3$, f_0 est régulièrement homotope à un plongement si et seulement si $o(f_0, a_0) = 0$ (Whitney).

Les méthodes du § 2 permettent d'étendre ces définitions dans le cas où Y est un complexe de Poincaré et $n \geq 3$.

Construction de $L_n(\pi, w)$

Soit A un anneau unitaire muni d'un anti-automorphisme involutif on appelle k -forme quadratique non-dégénérée Q la donnée d'un A -module (à droite) M libre de type fini, muni d'une classe d'équivalence de bases, d'une application $\lambda : M \times M \rightarrow A$ et d'une application $\mu : M \rightarrow V_k = A/\{a - (-1)^k \bar{a}\}$ tels que :

1) Pour tout x de M l'application $y \mapsto \lambda(x, y)$ est une application A -linéaire de M dans A .

$$2) \lambda(y, x) = (-1)^k \overline{\lambda(x, y)}$$

3) L'application $M \rightarrow \text{Hom}_A(M, A)$ déduite de λ est un isomorphisme simple.

$$4) \quad \mu(x + y) = \mu(x) + \mu(y) + [\lambda(x, y)]$$

$$5) \quad [\lambda(x, x)] = \mu(x) + (-1)^k \overline{\mu(x)}$$

$$6) \quad \mu(x \cdot a) = \bar{a} \cdot \mu(x) \cdot a$$

On a une notion de somme directe de deux formes quadratiques ; soit $Q_0(k)$ la forme quadratique définie par $M = A \oplus A$ avec la base canonique $\{e, f\}$ et $\lambda(e, e) = \lambda(f, f) = 0$, $\lambda(e, f) = 1$, $\lambda(f, e) = (-1)^k$ $\mu(e) = \mu(f) = 0$.

On appelle $\Gamma_k(A)$ le monoïde de Grothendieck quotient du monoïde des classes d'isomorphisme des k -formes quadratiques non-dégénérées par la relation :

$Q_1 \sim Q_2$ s'il existe p et q et un isomorphisme de $Q_1 \oplus pQ_0(k)$ sur $Q_2 \oplus qQ_0(k)$.

Si π est un groupe et $w : \pi \rightarrow \{\pm 1\}$, on note $L_{2n}(\pi, w)$ le monoïde $\Gamma_n(A)$ où $A = \mathbb{Z}(\pi)$ et l'involution est construite à partir de w .

Soit A comme précédemment ; on considère les triples (Q, M_0, M_1) où Q est une k -forme quadratique non dégénérée sur le A -module M de dimension $2p$, M_i ($i = 0, 1$) des sous-modules libres de dimension p , tels qu'il existe un isomorphisme de (Q, M_1) sur la paire $(pQ_0(k), \text{sous-module de base } e_1, \dots, e_p)$

On a une opération de somme directe qui fait de l'ensemble des classes d'isomorphisme de tels triples un monoïde abélien. On fait le quotient par le sous-monoïde engendré par $(Q_0(k), Ae, Af)$ et encore par la relation d'équivalence engendrée par : $(Q, M_0, M_1) \sim (Q, M'_0, M_1)$ s'il existe $a_1, \dots, a_p, b$ dans M tels que $\lambda(a_i, b) = \delta_{1,i}$ et $\{a_1, \dots, a_p\}$ est une base de M_0 et $\{b, a_2, \dots, a_p\}$ est une base de M'_0 .

Il est clair que cette relation est compatible avec la loi de monoïde. Si $A = \mathbb{Z}(\pi)$ et si l'involution est construite à partir de w , on note le quotient $L_{2n+1}(\pi, w)$.

Wall a donné une caractérisation de $L_{2n+1}(\pi, w)$ comme quotient du groupe stable

SU des automorphismes des formes quadratiques $pQ_0(k)$.

Remarque

$L_n(\pi, w)$ ne dépend de n que par son reste modulo 4.

§ 6 CALCUL DE $\Omega^{CP}(X)$

LEMME 1

Soient X_0 et X_1 deux complexes de Poincaré (à bord) de dimension n . Si X_0 s'obtient en rajoutant à X_1 une anse de dimension ≥ 3 , il existe une bijection de $\Omega^{CP}(X_1)$ sur $\Omega^{CP}(X_0)$.

Preuve :

Soit $(V_1, \phi_1, \alpha_1, \eta_1)$ une donnée de chirurgie sur X_1 , on en déduit une donnée de chirurgie sur X_0 en rajoutant à V_1 la même anse qu'à X_1 . On montre par les méthodes du § 2 que cela donne une bijection sur les Ω^{CP} .

Corollaire

Si X est un complexe de Poincaré de dimension n et si $n \geq 5$, il existe un complexe de Poincaré X' de dimension $n-1$ et une bijection de $\Omega^{CP}(X)$ sur $\Omega^{CP}(X' \times I)$.

Calcul de $\Omega^{CP}(X)$ si $\dim X = 2k \geq 6$

Soit (V, ϕ, α, η) une donnée de chirurgie réduite sur X . Tout élément x de $\pi_k(\phi) = H_k(\tilde{\phi})$ détermine une classe d'immersions à fibré normal trivialisé de S^k dans $\tilde{V}$ ou encore une classe d'immersion f_x de S^k dans V munie d'un chemin a_x entre le point base de V et celui de $f_x(S^k)$. En posant $\lambda(x, y) = I(f_x, a_x; f_y, a_y)$ et $\mu(x) = o(f_x, a_x)$ on obtient une k -forme quadratique, notée $Q(\phi)$ qui est non-

dégénérée à cause de la dualité de Poincaré .

LEMME 2

Si $(V', \phi', \alpha', \eta')$ se déduit de (V, ϕ, α, η) par une chirurgie de dimension $k-1$, les formes quadratiques $Q(\phi')$ et $Q(\phi) \oplus Q_0(k)$ sont isomorphes .

Preuve :

Soient $f : S^{k-1} \times D^{k+1} \rightarrow V$ et $h : D^k \rightarrow X$ prolongeant $\phi_0 f|_{S^{k-1}}$, qui définissent une chirurgie de dimension $k-1$ sur V . Soit $(W, \Psi, \alpha, \bar{\eta})$ le cobordisme correspondant, on a $H_i(\tilde{\Psi}, \tilde{\phi}) = 0$ pour $i \neq k$ et $H_j(\tilde{\Psi}, \tilde{\phi}') = 0$ pour $j \neq k+1$, on a donc les suites exactes :

$$0 \rightarrow H_k(\tilde{\phi}) \rightarrow H_k(\tilde{\Psi}) \rightarrow A \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow A \rightarrow H_k(\tilde{\phi}') \rightarrow H_k(\tilde{\Psi}) \rightarrow 0$$

Mais ces suites exactes ne sont pas scindées de façon canonique . Comme $\pi_{k-1}(\phi) = 0$ on peut relever h en $\bar{h} : D^k \rightarrow V$ et même supposer que $\bar{h}$ est un plongement mais $\bar{h}$ n'est pas unique car $\pi_k(\phi) \neq 0$. Ce disque déterminé, on peut choisir pour représentants de la base de $H_k(\tilde{\phi})$, des immersions de S^k ne rencontrant pas $\bar{h}(D^k)$ donc incluses dans V' ; ces choix faits, on a un isomorphisme de $Q(\phi) \oplus Q_0(k)$ sur $Q(\phi')$ défini comme suit : l'application $Q(\phi) \rightarrow Q(\phi')$ est déterminée par le choix des représentants de la base de $H_k(\tilde{\phi})$, l'image de $f \in Q_0(k)$ est l'âme D^k prolongée par le plongement $\bar{h}$ de D^k , l'image de $e \in Q_0(k)$ est la sphère transverse S^k .

Il résulte du lemme que, si (V, ϕ, α, η) et $(V', \phi', \alpha, \eta')$ sont des données réduites équivalentes, les classes de $Q(\phi)$ et de $Q(\phi')$ dans $L_{2k}(\pi_1(X), w)$ sont égales, soit $\gamma_X : \Omega^{CP}(X) \rightarrow L_{2k}(\pi, w)$ cette application .

THÉORÈME 13

Si $2k \geq 6$, $\gamma_X : \Omega^{\text{CP}}(X) \rightarrow L_{2k}(\pi, w)$ est une bijection, de plus si X est de la forme $X' \times I$ c'est un isomorphisme de groupes

Preuve

D'après le lemme 1 il suffit d'étudier le cas $X = X' \times I$. Il est alors clair que γ est un homomorphisme.

Si $\gamma(V, \phi, \alpha, \eta)$ est nul l'isomorphisme $Q(\phi) \oplus pQ_0(k) \rightarrow qQ_0(k)$ permet grâce au lemme 2 de construire un cobordisme réduit entre (V, ϕ, α, η) et la donnée triviale. Reste à montrer la surjectivité pour cela on va réaliser toute k -forme non dégénérée Q comme un $Q(\phi)$. A chaque élément ϵ_i d'une base de Q , on peut associer une immersion $f_i : (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (X' \times I, X' \times \{1\})$ reliée par un chemin a_i au point base de X' , telle que S^{k-1} est plongée dans $X' \times \{1\}$ comme bord d'un disque D_i de sorte que les disques D_i sont disjoints et que $I(f_i, a_i; f_j, a_j) = \lambda(\epsilon_i, \epsilon_j)$ et $o(f_i, a_i) = \mu(\epsilon_i)$. Les plongements de S^{k-1} dans $X' \times \{1\}$ peuvent servir à faire des chirurgies sur la donnée triviale $X' \times \{1\}$; on obtient un cobordisme (V, ϕ, α, η) entre X' et une donnée de chirurgie qui est aussi triviale car Q est non-dégénérée; (V, ϕ, α, η) est la donnée réduite sur $X' \times I$ cherchée.

Calcul de $\Omega^{\text{CP}}(X)$ pour $\dim X = 2k + 1 \geq 7$

On suppose que X est de la forme $X' \times I$; soit (V, ϕ, α, η) une donnée de chirurgie réduite sur X avec $dV = W_0 \cup W_1$. On appelle partage de V un triple (V_0, V_1, W) où $V = V_0 \cup_W V_1$, où W^{2k} définit une donnée $(W, \psi, \alpha, \bar{\eta})$ réduite sur X' et V_i ($i = 0, 1$) s'obtient à partir de $W_i \times I$ en ajoutant des anses d'indice k . Une décomposition en anses de V montre qu'il existe des partages.

A un partage de V on associe le triple (Q, M_0, M_1) où Q est la forme quadratique $Q(\Psi)$, M_0 le sous-module engendré par les sphères transverses des anses de V_0 et M_1 par celles de V_1 ; le lemme 2 assure que (Q, M_0, M_1) vérifie les propriétés des triples; de plus si on modifie les anses de V_i par opération de Smale, permutation ou action de $\pi_1(X)$, M_i est invariant.

Si à partir du partage (V_0, V_1, W) on construit un partage (V'_0, V'_1, W') en ajoutant à V_0 une anse triviale et à V_1 l'anse duale, le nouveau triple est $(Q, M_0, M_1) \oplus (Q_0(k), Ae, Af)$; les classes dans L_{2k+1} des triples associés à deux partages de la donnée (V, ϕ, α, η) sont donc identiques.

Si on fait sur V une chirurgie sur un plongement $f: S^k \times D^{k+1} \rightarrow V$ on considère un partage (V_0, V_1, W) où $f/S^k \in \pi_k(\phi) \simeq H_k(V, W_0; A)$ est utilisée comme anse de la décomposition de V_0 . La donnée $(V', \phi', \alpha, \eta')$ après chirurgie admet comme partage (V'_0, V'_1, W) avec $V'_0 = (V_0 - \text{Int } f(S^k \times D^{k+1})) \cup D^{k+1} \times S^k$, on voit donc, que les triples associées à (V_0, V_1, W) et (V'_0, V'_1, W) ont la même image dans L_{2k+1} . Soit $\gamma_{X' \times I}: \Omega^{CP}(X' \times I) \rightarrow L_{2k+1}(\pi_1(X'), w)$ l'application ainsi déterminée; si X est un complexe de Poincaré général, on peut construire une application γ_X compatible avec la définition précédente et la bijection du lemme 1.

THÉOREME 14

Si $k \geq 3$, $\gamma_X: \Omega^{CP}(X) \rightarrow L_{2k+1}(\pi_1(X), w)$ est une bijection, de plus si X est de la forme $X' \times I$, $\gamma_{X' \times I}$ est un homomorphisme de groupes.

Preuve

Il est facile de voir que γ est un homomorphisme si $X = X' \times I$. Si $\gamma(V, \phi, \alpha, \eta)$ est nul, on peut se ramener après chirurgie, à un triple isomorphe à

$(pQ_0(k), \oplus Ae_i, \oplus Af_i)$ et donc à une donnée de chirurgie triviale. Soit $x \in L_{2k+1}(\pi, w)$, on représente x par un triple $(pQ_0(k), \oplus Ae_i, M_1)$, on fait la chirurgie sur p sphères triviales de dimension $k-1$ de X' ; on obtient un cobordisme V_0 entre X' et une donnée $(W, \Psi, \alpha, \bar{\eta})$ sur X' , la structure des anses de V_0 donne un isomorphisme bien déterminé entre $pQ_0(k)$ et $Q(\Psi)$, on fait la chirurgie sur les sphères représentant la base de l'image de M_1 par cet isomorphisme: on obtient un cobordisme V_1 entre W et une donnée de chirurgie sur X' qui est triviale; $V_0 \cup_W V_1$ est alors une donnée de chirurgie sur $X' \times I$ dont l'image par γ est x .

Remarque

Si $\dim X = 5$ on peut encore définir une application $\gamma_X : \Omega^{CP}(X) \rightarrow L_5(\pi, w)$ qui est injective et qui est un homomorphisme si X est de la forme $X' \times I$.

Cas relatif

On peut définir également des groupes abéliens $L_n(\pi' \rightarrow \pi, w)$ ne dépendant que du reste de n modulo 4 et des bijections

$$\gamma_{X,Y} : \Omega^{CP}(X^n, Y) \rightarrow L_n(\pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X), w)$$

pour $n \geq 6$ de sorte qu'on ait le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow \Omega^{CP}(Y \times I) & \rightarrow \Omega^{CP}(X) & \rightarrow \Omega^{CP}(X, Y) & \rightarrow \Omega^{CP}(Y) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \rightarrow L_n(\pi', w) & \rightarrow L_n(\pi, w) & \rightarrow L_n(\pi' \rightarrow \pi, w) & \rightarrow L_{n-1}(\pi', w) \end{array}$$

Produit par une variété

Soit (X, Y) une paire de complexes de Poincaré. Soit P un objet de $*$. A toute donnée de chirurgie $*$ $((V, W), \phi, \alpha, \eta)$ sur (X, Y) on peut associer la

donnée $\ast((V \times P, W \times P), \phi \times \text{Id}_P), \alpha, \eta)$ sur $(X \times P, Y \times P)$. Ceci définit une application

$$x_P : \Omega^{\ast}(X, Y) \rightarrow \Omega^{\ast}(X \times P, Y \times P)$$

On démontre le

THÉORÈME 15

$x_{P(2, \mathbb{C})} : \Omega^{\text{CP}}(X, Y) \rightarrow \Omega^{\text{CP}}(X \times P(2, \mathbb{C}), Y \times P(2, \mathbb{C}))$ est une bijection, et
 $\gamma_{X \times P(2, \mathbb{C}), Y \times P(2, \mathbb{C})} \cdot x_{P(2, \mathbb{C})}^{\ast} = \gamma_X, Y$

Remarque : On définit de la même façon une application

$$x_P : s^{\ast}(X, Y) \rightarrow s^{\ast}(X \times P, Y \times P)$$

et le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \Omega^{\text{CP}}(X \times I, Y \times I) & \longrightarrow & s^{\ast}(X, Y) & \longrightarrow & \Omega^{\ast}(X, Y) & \longrightarrow & \Omega^{\text{CP}}(X, Y) \\ & \downarrow x_P & & \downarrow x_P & & \downarrow x_P & & \downarrow x_P \\ \dots & \Omega^{\text{CP}}(X \times P \times I, Y \times P \times I) & \longrightarrow & s^{\ast}(X \times P, Y \times P) & \longrightarrow & \Omega^{\ast}(X \times P, Y \times P) & \longrightarrow & \Omega^{\text{CP}}(X \times P, Y \times P) \end{array}$$

est commutatif

§ 7 EXEMPLES

La suite exacte de Kervaire Milnor

Les méthodes de la chirurgie furent inventées par Kervaire et Milnor avant 1960. Leurs résultats concernent les boules et les sphères. Ils ont montré que $\Omega^{\text{CP}}(\mathbb{D}^n, \emptyset)$ est nul pour n impair, égal à $\mathbb{Z}$ pour $n = 4k$ ($k \geq 2$) et à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $n = 4k + 2$ ($k \geq 1$). Il est par ailleurs évident que $s^{\ast}(\mathbb{D}^n, \emptyset) = s^{\ast}(S^n)$, et ces ensembles sont munis de structures de groupe (abélien) par somme connexe. On obtient

ainsi la suite exacte de groupes abéliens dite de Kervaire Milnor :

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow s^*(S^{4k}) \rightarrow \pi_{4k}(G/\star) \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z} \rightarrow s^*(S^{4k-1}) \rightarrow \pi_{4k-1}(G/\star) \rightarrow 0 \rightarrow s^*(S^{4k-2}) \rightarrow \pi_{4k-2}(G/\star) \\
 \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow s^*(S^{4k-3}) \rightarrow \pi_{4k-3}(G/\star) \rightarrow 0 \rightarrow s^*(S^{4k-4}) \rightarrow \pi_{4k-4}(G/\star) \dots \\
 \dots \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow s^*(S^5) \rightarrow \pi_5(G/\star) \rightarrow 0 \rightarrow s^*(S^4) \rightarrow \pi_4(G/\star)
 \end{aligned}$$

Si $\star = \text{Diff}$, Kervaire et Milnor ont étudié les homomorphismes μ . Ils ont montré que $s^{\text{Diff}}(S^5) = s^{\text{Diff}}(S^6) = 0$, que $s^{\text{Diff}}(S^7) = \mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$, et ils ont calculé l'ordre de $s^{\text{Diff}}(S^n)$ pour $8 \leq n \leq 18$

n	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
ordre de $s^{\text{Diff}}(S^n)$	2	8	6	992	1	3	2	16256	2	16	16

Si $\star = \text{PL}$, $s^*(S^n) = 0$ pour $n \geq 5$, on en déduit que pour $i \geq 5$, $\pi_i(G/\text{PL}) = L_i(0)$ ($= \mathbb{Z}$, 0 ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

Le calcul des groupes L_i

Les groupes $L_i(\pi, w)$ sont presque tous inconnus. On vient de voir que Kervaire et Milnor avaient calculé $L_i(0)$. Par des calculs algébriques compliqués Wall les a calculés dans un certain nombre de cas particuliers, ces résultats sont dans le tableau suivant :

(π, w)	L_1	L_2	L_3	L_4
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, w = 0$	0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, w = \text{id}$	0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}, w \neq 0$	0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}, w = 0$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$

On peut calculer un certain nombre des groupes L_i , en particulier les $L_i(\mathbb{Z}^n, 0)$, grâce au

THÉOREME 16

Si $Wh(\pi) = 0$, on a un isomorphisme naturel

$$L_i(\pi \times \mathbb{Z}, w \times 0) = L_i(\pi, w) \oplus L_{i-1}(\pi, w)$$

Démonstration :

Soit V une variété de dimension $i-1$ (> 5) dont le groupe de Poincaré est π et dont l'orientation est définie par w . On a deux applications ($T = S^1$)

$$\times_T : \Omega^{CP}(V, \emptyset) \rightarrow \Omega^{CP}(V \times T, \emptyset)$$

$$\text{et } \beta : \Omega^{CP}(V \times I, \emptyset) \rightarrow \Omega^{CP}(V \times T, \emptyset)$$

(β étant définie par recollement de $V \times \{0\}$ avec $V \times \{1\}$) qui définissent deux applications

$$u : L_{i-1}(\pi, w) \longrightarrow L_i(\pi \times \mathbb{Z}, w \times 0)$$

$$\text{et } v : L_i(\pi, w) \longrightarrow L_i(\pi \times \mathbb{Z}, w \times 0)$$

On vérifie que u et v ne dépendent que de π et w (et pas de V) et que ce sont des homomorphismes de groupes. On a donc une application

$$(u, v) : L_{i-1}(\pi, w) \oplus L_i(\pi, w) \rightarrow L_i(\pi \times \mathbb{Z}, w \times 0)$$

Pour montrer que c'est un isomorphisme on montre que v est injectif et on construit une rétraction

$$\rho : L_i(\pi \times \mathbb{Z}, w \times 0) \longrightarrow L_{i-1}(\pi, w)$$

en construisant une application (si $n \geq 7$)

$$\rho_V : \Omega^{CP}(V \times T, \emptyset) \longrightarrow \Omega^{CP}(V, \emptyset)$$

telle que $\rho_V \cdot \chi_T = \text{Id}$ et que $\rho_V(x) = 0$ soit équivalent à $x = \beta(y)$. Ces deux démonstrations utilisent un théorème de Farrell (cf : [2]) et supposent que $\text{Wh}(\pi) = 0$.

Calcul de $s^*(T^n \times D^k, \emptyset)$ pour $n+k \geq 5$

Soit V une variété semi-linéaire de dimension n (on note π le groupe de Poincaré de V et w sa classe d'orientation). On a vu au § 6 (Th 15) que l'application μ définie par le diagramme commutatif (où $P = P(2, \mathbb{C})$)

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega^{\text{PL}}(V, \emptyset) & \xrightarrow{\chi} & \Omega^{\text{CP}}(V, \emptyset) \\
 \downarrow \mu & & \downarrow \chi_P^k \\
 L_n(\pi, w) & \xrightarrow{\simeq} & L_{n+4k}(\pi, w)
 \end{array}$$

$\Omega^{\text{CP}}(V \times P^k, \emptyset)$
 $\downarrow \chi_{V \times P^k}$

ne dépend pas de k . Si $n \geq 5$, on a donc $\mu = \chi_V \cdot \chi$.

LEMME 1 :

Si $V = D^n$, μ est un homomorphisme de groupes injectif ; cet homomorphisme est surjectif si $n \neq 4$; pour $n = 4$ son conoyau a deux éléments.

C'est une conséquence des calculs de Kervaire et Milnor. Pour $n \geq 5$ cela résulte de ce que l'on a vu ci-dessus. Pour $n = 1, 2$ ou 3 cela résulte de calculs directs et du fait que $\pi_i(G/O) = \pi_i(G/PL)$ pour $i = 1, 2$ et 3 . Pour $n = 4$, on définit une application $L_{4k}(0) \xrightarrow{\theta} \mathbb{Z}$ qui est un isomorphisme sur $8\mathbb{Z}$, et telle que

$\theta \cdot \mu : \pi_4(G/PL) = \pi_4(G/O) \xrightarrow{\theta} \mathbb{Z}$ soit un isomorphisme sur $16\mathbb{Z}$, à cause du théorème de Rohlin (θ est définie au moyen de l'index).

LEMME 2 :

Soit $\mu_{n,k} : \Omega^{\text{PL}}(T^n \times D^k, \emptyset) \rightarrow L_{n+k}(\mathbb{Z}^n, 0)$

$$a) \mu_{n,k}^{-1}(0) = 0$$

b) Pour $k \geq 1$, $\mu_{n,k}$ est un homomorphisme de groupes dont le conoyau est isomorphe à $H^{4-k}(T^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Pour démontrer ce lemme, on construit des homomorphismes de groupes

$$u' : \Omega^{PL}(V, \emptyset) \rightarrow \Omega^{PL}(V \times T, \emptyset)$$

$$v' : \Omega^{PL}(V \times I, \emptyset) \rightarrow \Omega^{PL}(V \times T, \emptyset)$$

$$\rho' : \Omega^{PL}(V \times T, \emptyset) \rightarrow \Omega^{PL}(V, \emptyset)$$

comme dans la démonstration du théorème 16, de telle façon que

$$\mu u' = u \mu, \mu v' = v \mu, \mu \rho' = \rho \mu, \rho' u' = \text{Id} \text{ et } \text{Im } v' = \text{Ker } \rho.$$

On en déduit le lemme par récurrence sur n . S'il est vrai pour $\mu_{n-1,k}$ ($\forall k$) :

a) $\mu_{n,k}(x) = 0$ entraîne $\rho \mu_{n,k}(x) = \mu_{n-1,k} \rho'(x) = 0$ donc $\rho'(x) = 0$, donc $x = v'(y)$ avec $v. \mu_{n-1,k+1}(y) = \mu_{n,k}(x) = 0$, donc $y = 0$

b) Si $k > 1$, $\mu_{n,k}$ est un homomorphisme (pour le voir il suffit de construire les deux lois de groupe par le même argument géométrique). On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{PL}(T^{n-1} \times D^k, \emptyset) \oplus \Omega^{PL}(T^{n-1} \times D^{k+1}, \emptyset) & \xrightarrow[\simeq]{u', v'} & \Omega^{PL}(T^n \times D^k, \emptyset) \\ \downarrow \mu_{n-1,k} \quad \mu_{n-1,k+1} & & \downarrow \mu_{n,k} \\ L_{n+k-1}(\mathbb{Z}^{n-1}, 0) + L_{n+k}(\mathbb{Z}^{n-1}, 0) & \xrightarrow[\simeq]{u, v} & L_{n+k}(\mathbb{Z}^n, 0) \end{array}$$

$$\text{Donc } \text{Coker } \mu_{n,k} = \text{Coker } \mu_{n-1,k} \oplus \text{Coker } \mu_{n-1,k+1}.$$

De ces deux lemmes on déduit le

THÉORÈME 17 :

Pour $n+k \geq 5$, $s^{PL}(T^n \times D^k, \emptyset)$ est isomorphe à $H^{3-k}(T^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$; l'isomorphisme que l'on construit est compatible avec les revêtements d'ordre fini.

Ce résultat a été admis sous le nom de théorème 5 dans l'exposé 362.

§ 8 LE CAS TOPOLOGIQUE

Kirby et Siebenman ont montré (en utilisant le théorème ci-dessus ; cf [4]) que pour toute variété topologique compacte V :

- 1) Il existe une variété semi-linéaire $B(V)$ et une application $p : B(V) \rightarrow V$ qui fait de V un fibré en boules fermées sur V
- 2) Si $(B(V), p)$ et $(B'(V), p')$ sont deux tels fibrés, l'équivalence d'homotopie $p^{-1}p' : B' \rightarrow B$ est simple.

Il en résulte que toute variété topologique est munie de façon naturelle d'une structure de complexe de Poincaré, et que l'on peut définir $s^{Top}(X)$ et $s^{Top}(X, Y)$. On peut alors répéter sans aucun changement tout ce que l'on a dit aux § 3 et 4, sauf peut être le théorème 7 qui nécessite des théorèmes de transversalité, les théorèmes de transversalité topologiques n'étant démontrés que dans le cas où la dimension de la variété image inverse est au moins 6, le théorème 7 ne sera vrai que si $\dim X \geq 6$ (resp : $\dim Y \geq 6$, ou $\dim X \geq 6$ et $Y = \emptyset$).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BROWDER Surgery on simply connected manifolds , lecture notes ,
Princeton 1968.
- [2] FARREL et HSIANG A geometric interpretation of the Kunneth formula
in algebraic K-theory. Bull ; of A.M.S. 74 (1968) p. 548-553.
- [3] KERVAIRE et MILNOR Groups of homotopy spheres I. Ann. of Math.
77 (1963) , 504-537.
- [4] MORLET Hauptvermutung et triangulation des variétés
Sém.Bourbaki 1968/69. n° 362.
- [5] MORLET Séminaire I.H.E.S.
- [6] NOVIKOV Homotopy equivalent smooth manifolds I
Translations of A.M.S. 48 (1965) 271-396.
- [7] POENARU Le théorème de s-cobordisme Sém. Bourbaki 1970/71 n° 392.
- [8] SPIVAK Spaces statisfying Poincaré duality Topology 6 (1967)
77-102.
- [9] WALL Surgery on compact manifolds Academic Press 1970.