HYMAN BASS

K_2 des corps globaux

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. nº 394, p. 233-255

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1970-1971__13__233_0>

Séminaire BOURBAKI
23e année, 1970/71, n° 394 Juin 1971

$\underline{\underline{K}}_2$ DES CORPS GLOBAUX

[d'après J. TATE, H. GARLAND, ...]

par Hyman BASS

1. Introduction

Soit F un corps (toujours supposé commutatif). On note $F^{\cdot}$ son groupe multiplicatif. Par symbole sur F à valeurs dans un groupe abélien C on entend une fonction $(\ ,\ ):F^{\cdot}\times F^{\cdot}\to C$ telle que

$$(aa',b) = (a,b)(a',b) \text{ et } (a,bb') = (a,b)(a,b')$$

pour tout $a,a',b,b' \in F^{\cdot}$ et telle que

$$(a,1-a) = 1$$

pour tout $a \neq 0,1$. De l'égalité $(a^{-1},1-a^{-1}) = 1$ $(a \neq 0,1)$ on déduit que $(a,-a) = 1$ et $(a,a) = (a,-1)$ pour tout $a \in F^{\cdot}$. De l'égalité $(ab,-ab) = 1$ on déduit aussi $(a,b) = (b,a)^{-1}$ pour tout $a,b \in F^{\cdot}$.

Exemples.

(1) Le symbole modéré

$$(\ ,\ )_v:F^{\cdot}\times F^{\cdot}\longrightarrow k_v^{\cdot}$$

associé à une valuation discrète v de F, de corps résiduel k_v, est défini par

$$(a,b)_v = \text{le reste dans } k_v \text{ de } (-1)^{v(a)v(b)} a^{v(b)}/b^{v(a)} .$$

(cf, [13], Ch. III, § 1, n° 4, ou [10]). On note

$$\lambda_{\mathrm{mod},v}: K_2F \longrightarrow k_v^{\cdot}$$

l'homomorphisme induit.

(2) Le <u>symbole réel</u> $(\ , \ )_\infty : \mathbb{R}^{\cdot} \times \mathbb{R}^{\cdot} \to \mu_2 = \{\pm 1\}$ défini par $(a,b)_\infty = -1 \Leftrightarrow a < 0$ et $b < 0$.

(3) (Tate) Le <u>symbole différentiel</u> $(\ , \ )_{\mathrm{diff}} : F^{\cdot} \times F^{\cdot} \longrightarrow \Omega^2_{F/\mathbb{Z}}$ défini par

$$(a,b)_{\mathrm{diff}} = \frac{da}{a} \wedge \frac{db}{b} .$$

(4) Le groupe K_2F est le récepteur d'un <u>symbole universel</u> $F^{\cdot} \times F^{\cdot} \longrightarrow K_2F$, noté $(a,b) \longrightarrow \{a,b\}_F$, de sorte que $\mathrm{Hom}(K_2F, C)$ s'identifie au groupe des symboles à valeurs dans C.

Le foncteur K_2 était introduit par Milnor [10] (n° 5). Sa définition (pour tout anneau) est inspirée du travail de Steinberg [17] sur les extensions centrales de groupes algébriques semi-simples. De ce point de vue la description ci-haut de K_2F est un théorème difficile de Matsumoto [9] (n° 5). C'est ainsi que C. Moore [11] a inauguré l'étude arithmétique de K_2F comme outil pour calculer certains groupes de cohomologie de groupes linéaires.

Cet exposé est consacré aux résultats amenant à un calcul de K_2F lorsque F est un <u>corps global</u>, c'est-à-dire un corps de nombres (extension finie de $\mathbb{Q}$) ou un corps de fonctions (en une variable sur un corps fini). Les résultats de Moore (n^o 3) précisent la contribution à K_2F fait par les symboles locaux de la théorie des corps de classes. D'après un théorème récent de Garland [7] il ne reste en plus qu'un groupe fini (n^o 7).

La description de K_2F en termes d'invariants classiques est maintenant complète pour les corps de fonctions, grâce à des beaux résultats récents de Tate ([19] et [20], cf n^o 8). Pour les corps de nombres ces résultats de Tate ramènent le calcul de K_2F à une question de cohomologie galoisienne (n^o 10) ayant des liens étroits avec la théorie d'Iwasawa [8] des corps cyclotomiques. Les démonstrations de Tate étaient inspirées directement par des conjectures (non publiées) de Lichtenbaum. Signalons aussi que le rapport de K_2F avec la théorie d'Iwasawa a été précisé récemment par Coates [5].

Notation. Soient X un groupe abélien et m un entier > 0. On note $X \xrightarrow{m} X$ l'homothétie de rapport m et X_m son noyau. Si X est fini on note $|X| = \text{Card}\ X$.

2. Symboles locaux continus

Soient F un corps global, v une place non complexe de F, F_v le complété de F en v, μ_v le groupe des racines de l'unité dans

F_v, et $m_v = |\mu_v|$. Soit

$$\left(\frac{\ ,\ }{v}\right): F_v^\cdot \times F_v^\cdot \longrightarrow \mu_v$$

le m_v-symbole de restes normiques ([12], Ch. XIV, § 2). C'est un symbole continu. Réciproquement:

<u>Théorème 1</u> (C. Moore [11]). <u>Tout symbole continu sur</u> F_v <u>à valeurs dans un groupe abélien localement compact</u> C <u>s'obtient par composition de</u> $\left(\frac{\ ,\ }{v}\right)$ <u>avec un homomorphisme</u> $\mu_v \to C$.

Notons $\lambda_v : K_2F_v \to \mu_v$ l'homomorphisme associé à $\left(\frac{\ ,\ }{v}\right)$. Tate a montré que $\mathrm{Ker}(\lambda_v)$ est un groupe divisible.

Supposons que v soit une place finie, de corps résiduel k_v. Le symbole modéré $(\ ,\ )_v$ (ex.(1)) est lié à $\left(\frac{\ ,\ }{v}\right)$ par la formule

$$\lambda_{\mathrm{mod},v}(x) = \text{le reste dans } k_v \text{ de } \lambda_v(x)^{m_v/(q_v-1)}$$

ou $q_v = |k_v|$. Ainsi λ_v s'identifie à $\lambda_{\mathrm{mod},v}$ si $m_v = q_v - 1$. Cette égalité vaut pour toute place v si F est un corps de fonctions, et pour toute sauf un nombre fini de v si F est un corps de nombres.

3. <u>L'homomorphisme</u> λ <u>et son conoyau</u>

Soient F un corps global, μ_F le groupe des racines de l'unité de F, et $m_F = |\mu_F|$. Soit $\nu: \bigoplus_{v \text{ non complexe}} \mu_v \longrightarrow \mu_F$ l'homomorphisme induit par les homomorphismes $\mu_v \xrightarrow{m_v/m_F} \mu_F$.

Si $a,b \in F^{\cdot}$ il résulte des remarques dans le n°2 que $(\frac{a,b}{v}) = 1$ en dehors d'un nombre fini de places v, d'où un homomorphisme

$$\lambda : K_2F \longrightarrow \bigoplus_{v \text{ non complexe}} \mu_v \ .$$

La loi de réciprocité "explicite" s'exprime par la formule $\nu \circ \lambda = 0$. ([1], Ch.12, Th.13).

<u>Théorème2</u> (C. Moore [11]) - <u>La suite</u>

$$K_2F \xrightarrow{\lambda} \bigoplus_{v \text{ non complexe}} \mu_v \xrightarrow{\nu} \mu_F \longrightarrow 0$$

<u>est exacte</u>.

Ce théorème précise tous les renseignements sur K_2F apportés par les symboles "classiques." Il reste à déterminer la partie "exotique," $\mathrm{Ker}(\lambda)$, de K_2F.

4. <u>Première approximation à</u> $\mathrm{Ker}(\lambda)$; <u>l'homomorphisme</u> λ_R.

Soient R un anneau de Dedekind, $R^{\cdot}$ son groupe multiplicatif, F son corps de fractions, et $\{R^{\cdot},R^{\cdot}\}$ le sous-groupe de K_2F engendré par les $\{a,b\}_F$ où $a,b \in R^{\cdot}$. Les symboles modérés aux places v de F associées aux idéaux maximaux de R définissent un homomorphisme

$$\lambda_R : K_2F \longrightarrow \bigoplus_v k_v^{\cdot}$$

qui s'annulle sur $\{R^{\cdot},R^{\cdot}\}$.

Soient F un corps global, S_∞ l'ensemble des places infinies de F, et S un ensemble fini non vide de places contenant S_∞. Si R est l'anneau des S-entiers de F il résulte du Th.2 que λ_R est surjectif et que Ker(λ) est un sous-groupe d'indice fini de Ker(λ_R). Par ailleurs $\{R^{\cdot},R^{\cdot}\}$ est un groupe de type fini

Choisissons une énumeration $v_1, v_2, \ldots$ des places finie de F telle que $|k_{v_n}| \leq |k_{v_{n+1}}|$ pour tout n.

<u>Théorème3</u> (cf.[18] ou [19])- <u>Si</u> n <u>est suffisamment grand et si</u> R <u>est l'anneau des</u> S-<u>entiers de</u> F <u>où</u> $S = S_\infty \cup \{v_1,\ldots,v_n\}$, <u>la suite</u>

$$0 \to \{R^{\cdot},R^{\cdot}\} \longrightarrow K_2F \xrightarrow{\lambda_R} \bigoplus_{v\notin S} k_v^{\cdot} \to 0$$

<u>est exacte</u>. <u>En particulier</u> Ker(λ_R) = $\{R^{\cdot},R^{\cdot}\}$, <u>un groupe de type fini</u>.

La démonstration du Th.3 (pas encore publiée) est élémentaire mais assez longue. Pour le cas où $R = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{F}_q[t]$ la méthode, découverte par Tate, montre que Ker(λ) = 0 (cf.[10]). L'argument ressemble beaucoup à la première démonstration de Gauss de la loi quadratique de réciprocité.

5.<u>Lien de</u> K_2 <u>avec les extensions centrales de groupes linéaires</u>.

Soit G un groupe égal à son groupe dérivé. Il y a une <u>extension centrale universelle</u> (découverte par Schur)

$$0 \to H_2(G,\mathbb{Z}) \longrightarrow \tilde{G} \xrightarrow{p} G \to 1$$

dont la classe dans $H^2(G, H_2(G,\mathbb{Z})) \cong \mathrm{Hom}(H_2(G,\mathbb{Z}), H_2(G,\mathbb{Z}))$ correspond à l'identité.

Soient F un corps, n un entier ≥ 3, et $G = SL_n(F)$. Si $a,b \in F^{\cdot}$ soient $\tilde{h}_{12}(a), \tilde{h}_{13}(b) \in \tilde{G}$ des relèvements des éléments $h_{12}(a) = \mathrm{diag}(a, a^{-1}, 1, 1, \ldots)$ et $h_{13}(b) = \mathrm{diag}(b, 1, b^{-1}, 1, \ldots)$ de G. Le commutateur $\langle a,b\rangle = (\tilde{h}_{12}(a), \tilde{h}_{13}(b))$ est indépendant des relèvements et définit une fonction bilinéaire antisymétrique

$$\langle\ ,\ \rangle : F^{\cdot} \times F^{\cdot} \longrightarrow H_2(SL_n(F),\mathbb{Z}).$$

<u>Théorème 4</u> (Matsumoto [9] et Steinberg [17]) - <u>La fonction $\langle\ ,\ \rangle$ est un symbole et l'homomorphisme</u>

$$s_n : K_2F \longrightarrow H_2(SL_n(F),\mathbb{Z})$$

<u>qu'elle définit est un isomorphisme</u>.

Steinberg a montré que $\langle\ ,\ \rangle$ est un symbole et que s_n est surjectif. Matsumoto a démontré l'injectivité de s_n. Ils ont démontrés en même temps des résultats analogues pour tous les groupes de Chevalley simplement connexes.

Les s_n sont compatibles avec les plongements $\begin{pmatrix} SL_n & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$ de SL_n dans SL_{n+m}, d'où un isomorphisme $s : K_2F \longrightarrow H_2(SL(F),\mathbb{Z})$ où $SL = \bigcup_n SL_n$.

De cette façon on voit que la définition de K_2F donnée ici s'accorde avec celle de Milnor [10]. Milnor pose, pour tout anneau A, $K_2A = H_2(E(A), \underline{\underline{Z}})$ où $E(A) = \bigcup_n E_n(A)$ est le groupe dérivé de $GL(A) = \bigcup_n GL_n(A)$.

M. Stein ([15] et [16]) a récemment généralisé le Th. 4 aux anneaux semi-locaux. K. Dennis [6] a démontré aussi un théorème de stabilité pour K_2 ($H_2(E_n(A), \underline{\underline{Z}}) \to K_2A$ est surjectif pour $n >> 0$) dans un cadre très large.

6. Le transfert

Un homomorphisme d'anneaux $j : A \to B$ induit un homomorphisme $GL(A) \to GL(B)$ et donc aussi $j : K_2A \to K_2B$. Supposons que B soit un A-module libre de rang $d = [B:A]$. Le choix d'une base du A-module B définit des A-isomorphismes $B^n \cong A^{dn}$ d'où des homomorphismes $GL_n(B) \to GL_{dn}(A)$. La limite inductive $GL(B) \to GL(A)$ induit un homomorphisme

$$Tr_{B/A} : K_2B \to K_2A$$

(le transfert) qui ne dépend pas du choix de base de B (cf.[10]).

Pour une extension finie de corps E/F l'homomorphisme $Tr_{E/F}$ ne se voit pas facilement sur les symboles. Son existence de notre point de vue s'appuie donc sur le Th. 4 de Matsumoto-Steinberg. Son utilité provient des propriétés suivantes:

a) Tr fait de K_2 un foncteur contravariant pour les extensions libres de rang fini.

(b) Si $R \to R'$ est un homomorphisme d'anneaux commutatifs et si $j:A \to B$ est un homomorphisme de R-algèbres le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K_2B & \longrightarrow & K_2(R'\otimes_R B) \\ {\scriptstyle Tr}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Tr} \\ K_2A & \longrightarrow & K_2(R'\otimes_R A) \end{array}$$

est commutatif.

(c) Le composé $K_2A \xrightarrow{j} K_2B \xrightarrow{Tr} K_2A$ est l'homothétie de rapport $d = [B:A]$. En particulier $\mathrm{Ker}(j) \subset (K_2A)_d$. Si m est un entier premier à d les homomorphismes $(K_2A)_m \to (K_2B)_m$ et $K_2A/mK_2A \to K_2B/mK_2B$ induits par j sont injectifs, et les homomorphismes au sens inverse induits par Tr sont surjectifs.

(d) Soit $j:F \to E$ une extension finie de corps. Si $a \in F^{\cdot}$ et $\beta \in E^{\cdot}$ on a

$$Tr_{E/F}\{a,\beta\}_E = \{a, N_{E/F}\beta\}_F.$$

Si $\alpha \in E^{\cdot}$ est tel que $\alpha^m = a$ il en résulte que $\{a, N_{E/F}\beta\}_F = (Tr_{E/F}\{\alpha,\beta\}_E)^m$.

(e) Si l'extension E/F est galoisienne de groupe G on a

$$j(Tr_{E/F}(x)) = \sum_{s\in G} s(x).$$

Vu (c) il en résulte que j induit des isomorphismes

$$(K_2F)_m \xrightarrow{\cong} (K_2E)_m^G \quad \text{et} \quad K_2F/mK_2F \xrightarrow{\cong} (K_2E/mK_2E)^G$$

pour tout entier m premier à $d = [E:F]$.

Voici une application typique du transfert.

Lemme 1 (Tate) - *Soit* F *un corps de caractéristique* $p > 0$ *tel que* $[F:F^p] = p^e$ *avec* $e \leq 1$. *Alors* K_2F *est divisible par* p (et même uniquement si $e = 0$).

Soient $a, b \in F^{\cdot}$ et posons $\alpha = a^{1/p}$. L'hypothèse fournit un $\beta \in E = F(\alpha)$ tel que $N_{E/F}(\beta) = b$. D'après (d) on a $\{a,b\}_F = (Tr_{E/F}\{\alpha,\beta\}_E)^p$, d'où le lemme.

Théorème 5 - *Soit* F *un corps global de caractéristique* $p > 0$. *Alors* $\mathrm{Ker}(\lambda)$ *est un groupe fini d'ordre premier à* p.

Lemme 1 entraîne que K_2F est divisible par p. On a une suite exacte $0 \to \mathrm{Ker}(\lambda) \to K_2F \xrightarrow{\lambda} \bigoplus_v \mu_v$ où les $|\mu_v|$ sont premiers à p. Donc $\mathrm{Ker}(\lambda)$ est aussi divisible par p. Mais (Th. 3) $\mathrm{Ker}(\lambda)$ est un groupe de type fini, d'où le théorème.

7. *Finitude de* $\mathrm{Ker}(\lambda)$ (d'après Garland [7])

Soient R un anneau de Dedekind, F son corps de fractions, $\lambda_R : K_2F \to \bigoplus_v k_v^{\cdot}$ l'homomorphisme du n° 4, n un entier ≥ 3, et $K_2F \to H_2(SL_n(F), \mathbb{Z})$ l'isomorphisme du Th. 4. L'inclusion $SL_n(R) \to SL_n(F)$ fournit ainsi un homomorphisme $H_2(SL_n(R), \mathbb{Z}) \to K_2F$ qui figure ci-dessous.

Théorème 6 (cf. [7]) - *Supposons que l'ensemble d'idéaux maximaux de* R *soit dénombrable. Il existe un homomorphisme* g *tel que la suite*

$$H_2(SL_n(R), \mathbb{Z}) \to K_2F \xrightarrow{\lambda_R} \bigoplus_v k_v^{\cdot} \xrightarrow{g} H_1(SL_n(R), \mathbb{Z}) \to 0$$

<u>soit exacte</u>.

Supposons maintenant que R soit l'anneau d'<u>entiers algébriques</u> dans un <u>corps de nombres</u> F. On sait que le groupe $SL_n(R)$ est de présentation finie, et donc le groupe $H_2(SL_n(R),\underline{\underline{Z}})$ est de type fini. On trouve ainsi une autre démonstration que Ker(λ) est de type fini (cor. du Th.3). La <u>finitude</u> de Ker(λ) résulte, vu l'isomorphisme

$$H^2(SL_n(R),\underline{\underline{R}}) = \mathrm{Hom}(H_2(SL_n(R),\underline{\underline{Z}}),\underline{\underline{R}})$$

du théorème suivant:

<u>Théorème</u> 7 (Garland, [7]) - <u>Pour tout</u> $n \geq 7$ <u>on a</u> $H^2(SL_n(R),\underline{\underline{R}}) = 0$.

<u>Corollaire</u> - Ker(λ) <u>est fini</u>.

<u>Remarques</u>.

(1) Le Th. 7 est un cas particulier de résultats de Garland sur $H^2(\Gamma,\underline{\underline{R}})$ pour certains groupes arithmétiques Γ. Il étudie la cohomologie de Γ par son action sur un espace symétrique X et à l'aide du théorème de deRham pour $\Gamma\backslash X$ (lorsque Γ est sans torsion). L'espace $\Gamma\backslash X$ n'est pas compact , et le point essentiel est un résultat sur le comportement à l'infini de certaines formes harmoniques sur $\Gamma\backslash X$.

(2) À l'aide de la compactification de $\Gamma\backslash X$ construite par Borel et Serre [4] Borel a maintenant calculé tout l'anneau de cohomologie

"stable", "$H^*(\Gamma_\infty, \mathbb{R})$", pour les groupes arithmetiques dans une famille classique. (Cf. l'exposé de Serre dans le présent Séminaire , n° 4.)

(3) La finitude de $\mathrm{Ker}(\lambda^F)$, lorsque F est une extension abélienne totalement réelle de $\mathbb{Q}$, était démontrée par Brumer par voie arithmétique, avant la démonstration de Garland (lettre à Tate datée Feb. 2, 1970). Brumer utilise des résultats de Iwasawa et de Kubota-Leopoldt.

8. La structure de K_2F et de $\mathrm{Ker}(\lambda)$ sur un corps de fonctions (d'après Tate [19]).

Soit F un corps de fonctions de corps de constants $k_o = \mathbb{F}_q$. Soient k la clôture algébrique de k_o, $\Gamma = \mathrm{Gal}(k/k_o)$, et $F_\infty = Fk$. Considérons les suites exactes

(1) $$0 \to k^\cdot \to F^\cdot_\infty \xrightarrow{\mathrm{div}} D \to C \to 0$$

et

(2) $$0 \to J(k) \to C \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \to 0$$

où D est le groupe de diviseurs, C est le groupe des classes de diviseurs, et J est la jacobienne de F_∞. Les groupes $k^\cdot$ et $J(k)$ sont de torsion et divisibles. Le produit tensoriel d'un groupe divisible avec un groupe de torsion est nul. Donc le produit tensoriel de $k^\cdot$ avec (1) fournit une suite exacte

(3) $$0 \to \mathrm{Tor}(k^\cdot, C) \longrightarrow k^\cdot \otimes F^\cdot_\infty \longrightarrow k^\cdot \otimes D \to k^\cdot \to 0$$

D'autre part on a la suite exacte

(4) $\quad 0 \to \mathrm{Ker}(\lambda^{F_\infty}) \longrightarrow K_2F_\infty \xrightarrow{\lambda^{F_\infty}} k^{\cdot}\otimes D \longrightarrow k^{\cdot} \to 0$

(cf. n^{o}3) où l'on identifie le λ du n^{o}3 avec λ_{mod}, ce qui est licite pour un corps de fonctions. Introduisons

$$e : k^{\cdot}\otimes F^{\cdot}_\infty \longrightarrow K_2F_\infty \ , \ e(w\otimes a) = \{w,a\}_{F_\infty}$$

qui figure dans le diagramme commutatif

(5)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}(k^{\cdot},C) \arrow[r] \arrow[d, "e_o"] & k^{\cdot}\otimes F^{\cdot}_\infty \arrow[r] \arrow[d, "e"] & k^{\cdot}\otimes D \arrow[r] \arrow[d, equal] & k^{\cdot} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\lambda^{F_\infty}) \arrow[r] & k_2F_\infty \arrow[r, "\lambda^{F_\infty}"] & k^{\cdot}\otimes D \arrow[r] & k^{\cdot} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Par ailleurs l'inclusion $F \subset F_\infty$ induit un diagramme commutatif

(6)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\lambda^{F_\infty})^{\Gamma} \arrow[r] & (K_2F_\infty)^{\Gamma} \arrow[r] & (k^{\cdot}\otimes D)^{\Gamma} \arrow[r] & k^{\cdot\Gamma} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\lambda^{F}) \arrow[r] \arrow[u] & K_2F \arrow[r] \arrow[u] & \bigoplus_v k^{\cdot}_v \arrow[r] \arrow[u] & k^{\cdot}_o \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

<u>Théorème 8</u> (Tate [19]) - <u>Toute flèche verticale dans les diagrammes</u> (5) <u>et</u> (6) <u>est un isomorphisme</u>.

On en déduit des isomorphismes $\mathrm{Ker}(\lambda^{F}) \cong \mathrm{Tor}(k^{\cdot},C)^{\Gamma}$ $\cong \mathrm{Tor}(k^{\cdot},J(k))^{\Gamma}$ et donc un isomorphisme non canonique de $\mathrm{Ker}(\lambda^{F})$ avec le noyau de $J(k) \xrightarrow{1-q\gamma} J(k)$, où $\gamma \in \Gamma$ désigne l'automorphisme de Frobenius. Soient $r_1,\dots,r_{2g}$ les valeurs propres de γ sur (le module de Tate de) $J(k)$. On conclut que

$$|\ker(\lambda^F)| = \prod_{i=1}^{2g} (1 - qr_i) = (q-1)(q^2-1)\, \zeta_F(-1),$$ où ζ_F est la fonction zêta de F.

<u>Corollaire</u> - On a

$$\frac{|\operatorname{Ker}(\lambda^F)|}{|\operatorname{Coker}(\lambda^F)|} = (q^2-1)\, \zeta_F(-1). \tag{7}$$

Une fois interprété le facteur q^2-1 la formule (7) garde un sens lorsque F est un corps de nombres. Mais alors ζ_F a un zéro d'ordre r_2 en $s = -1$! Néanmoins dans le cas totalement réel ($r_2 = 0$) Tate et Birch, à l'aide des expériences de Atkin sur le calculateur Atlas, ont été amenés à conjecturer la formule

$$|\operatorname{Ker} \lambda_R| = w_F^{(2)}\, |\zeta_F(-1)| \tag{8}$$

où R est l'anneau d'entiers de F et où $w_F^{(r)}$ désigne le plus grand entier m tel que $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ opère trivialement sur $\mu_m^{\otimes r}$. Dans le cas des corps de fonctions on a $w_F^{(r)} = q^r-1$. Vu la surjectivité de λ_R (conséquence du Th.2) la formule (8) est bien analogue à (7).

La conjecture (8) n'est démontrée que dans des cas très particuliers (cf. par exemple Coates [5]). Certaines propriétés de divisibilité de $\zeta_F(-1)$ qu'elle entraîne ont été vérifiées par Serre ([14] (3.7)) en interprétant $\zeta_F(-1)$ comme la caractéristique d'Euler-Poincaré de $SL_2(R)$.

La démonstration du beau théorème 8 se fait à l'aide des symboles galoisiens (n° 9) que Tate utilise aussi dans le cas des corps de nombres.

9. <u>Les symboles galoisiens de Tate</u> ([16]).

Soit F un corps, soit p sa caractéristique, et posons

$G_F = Gal(F_s/F)$ où F_s est une clôture séparable de F.

Pour tout G_F-module topologique M on pose $H^r(F,M) = H^r(C^\cdot(G_F,M))$ où $C^\cdot(G_F,M)$ désigne le complexe des cochaînes standard continues sur G_F à valeurs dans M.

Nous n'aurons à considérer que des limites projectives de modules discrets. Pour ces modules, on définit un produit tensoriel, noté $\otimes$, par passage à la limite projective à partir des quotients discrets.

Soit

$$(\varepsilon) \qquad 0 \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow F_s^\cdot \longrightarrow 0$$

une suite exacte de G_F-modules topologiques. La suite exacte de cohomologie fournit un homomorphisme $\delta : F^\cdot = H^0(F,F_s^\cdot) \longrightarrow H^1(F,M)$, et le cup-produit $(a,b)_\varepsilon^F = \delta a \cdot \delta b$ définit une fonction bilinéaire antisymétrique

$$(\ ,\ )_\varepsilon^F : F^\cdot \times F^\cdot \longrightarrow H^2(F, M \otimes M).$$

Pour voir si c'est un symbole introduisons le sous-groupe D de $H^2(F, M \otimes M)$ engendré par les éléments $\mathrm{cor}(a,1-a)_\varepsilon^E$ où E parcourt les extensions séparables finies de F et où $a \in E^\cdot$, $a \neq 0,1$.

<u>Lemme</u> 2 - <u>Le groupe</u> D <u>est divisible par tout entier</u> m, <u>non divisible par</u> p.

Ceci se démontre à l'aide de la formule $\mathrm{cor}(a,b)_\varepsilon^E = (a, N_{E/F}b)_\varepsilon^F$ pour $a \in F^\cdot$, $b \in E^\cdot$ et des algèbres séparables

$$E_a = F[T]/(T^m - a) \qquad (a \in F^{\cdot})$$

Lemme 3 - *Soit* M *un* G_F*-module topologique et soit* $m > 0$ *un entier tel que*

(9) $$M \xrightarrow{\cong} \varprojlim_n M/m^n M.$$

Alors pour tout entier $r \geq 0$ *aucun sous-groupe de* $H^r(F,M)$ *n'est divisible par* m.

En appliquant le lemme 3 (à $M \otimes M$) et le lemme 2 on déduit la proposition suivante.

Proposition 1 - *Supposons qu'il existe un entier* m *non divisible par* p *tel que le module* M *dans la suite exacte* (ε) *satisfait à la condition* (9). *Alors* $(\ ,\ )^F_\varepsilon$ *est un symbole*.

Le symbole $(\ ,\ )_m$. C'est le symbole $(\ ,\ )_{\varepsilon_m}$ associé à la suite exacte

(ε_m) $$0 \to \mu_m \to F_s^{\cdot} \xrightarrow{m} F_s^{\cdot} \to 0$$

où m est un entier non divisible par p. On note

$$h_m^F : K_2F \longrightarrow H^2(F, \mu_m \otimes \mu_m)$$

l'homomorphisme correspondant. On a les équivalences

(10) $$(a,b)_m = 1 \Leftrightarrow \{a,b\}_F \in mK_2F \Leftrightarrow b \in N_{E_a/F}(E_a^{\cdot})$$

pour tout $a,b \in F^{\cdot}$.

Lorsque $\mu_m \subset F$ on a

$$H^2(F,\mu_m \otimes \mu_m) = H^2(F,\mu_m) \otimes \mu_m = Br(F)_m \otimes \mu_m$$

et l'on retrouve le symbole de [12], Ch.XIV, §2, Prop.5. Si $F = F_v$ comme dans le n°2 et si $m = m_v$ le symbole $(\ ,\ )_{m_v}$ s'identifie ainsi à $(\frac{\ ,\ }{v})$.

<u>Proposition</u> 2 (cf. [12]) - <u>Si</u> $\mu_m \subset F$ <u>et si</u> $a \in F^{\bullet}$ <u>la suite</u>

$$F(a^{1/m})^{\bullet} \xrightarrow{\text{norme}} F^{\bullet} \xrightarrow{(a,\ )_m} Br(F(a^{1/m})/F) \otimes \mu_m \to 0$$

<u>est exacte</u>.

On se demande si l'homomorphisme

$$\bar{h}_m^F : K_2F/mK_2F \longrightarrow H^2(F,\mu_m \otimes \mu_m)$$

induit par h_m^F est un isomorphisme. On se ramène aussitôt au cas où $m = \ell^n$, ℓ étant un nombre premier différent de p. Posons $E = F(\mu_\ell)$. Tate a démontré les implications:

(11) $\bar{h}_\ell^E$ injectif $\Rightarrow \bar{h}_{\ell^n}^E$ injectif pour tout n

$\Rightarrow \bar{h}_{\ell^n}^F$ injectif pour tout n

et

(12) $\bar{h}_\ell^E$ surjectif $\Rightarrow \bar{h}_{\ell^n}^E$ surjectif pour tout n

$\Rightarrow \bar{h}_{\ell^n}^F$ surjectif pour tout n.

Par ailleurs $\bar{h}_\ell^E$ est injectif si $Br(E)_\ell$ est monogène, et surjectif si tout élément de $Br(E)_\ell$ est neutralisé par une extension cyclique de E. Si F est un corps global ces conditions sont satisfaites par tous les E_v, et la dernière condition aussi par E. On a même:

<u>Théorème 9</u> (Tate [19]) - <u>Si</u> F <u>est un corps global l'homomorphisme</u> $\overline{h}^F_m : K_2F/mK_2F \longrightarrow H^2(F, \mu_m \otimes \mu_m)$ <u>est un isomorphisme pour tout entier</u> m <u>non divisible par</u> p = car.(F).

Ce théorème fournit très peu de renseignements sur $\mathrm{Ker}(\lambda^F)$ car Tate a montré que $\bigcap_m mK_2F$ est un sous-groupe de $\mathrm{Ker}(\lambda^F)$ d'indice ≤ 2, et que $\mathrm{Ker}(\lambda^F) \subset mK_2F$ pour tout m non divisible par 8.

<u>Corollaire</u> - <u>Si</u> m <u>n'est pas divisible par</u> 8 <u>l'homomorphisme</u>

$$K_2F/mK_2F \longrightarrow \oplus\, \mu_v/m\mu_v$$

<u>induit par</u> λ^F <u>est injectif</u>.

10. <u>L'homomorphisme</u> $h : K_2F \longrightarrow H^2(F, T^{(2)})$

<u>Notation</u>. Soit X un groupe abélien. On note X_{tors} son sous-groupe de torsion, X_{div} son plus grand sous-groupe divisible, $X/\mathrm{div} = X/X_{div}$, et $X(\ell)$ sa composante ℓ-primaire, ℓ étant un nombre premier.

Soit F un corps de caractéristique $p \neq \ell$. Les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{lccccccccc}
(\varepsilon_{\ell^n}) & 0 & \longrightarrow & \mu_{\ell^n} & \longrightarrow & F_s^{\cdot} & \xrightarrow{\ell^n} & F_s^{\cdot} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \uparrow{\scriptstyle \ell^m} & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle 1} & & \\
(\varepsilon_{\ell^{n+m}}) & 0 & \longrightarrow & \mu_{\ell^{n+m}} & \longrightarrow & F_s^{\cdot} & \xrightarrow{\ell^{n+m}} & F_s^{\cdot} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

fournissent, par passage à la limite projective, une suite exacte

$$(\varepsilon_{\ell^\infty}) \qquad 0 \longrightarrow T \longrightarrow L \longrightarrow F_s^{\cdot} \longrightarrow 0.$$

T est un Z_ℓ-module libre de rang 1 où G_F opère suivant son action sur les μ_{ℓ^n}. On note

$$(13) \qquad 0 \longrightarrow T^{(r)} \longrightarrow V^{(r)} \longrightarrow W^{(r)} \longrightarrow 0$$

le produit tensoriel r fois sur Z_ℓ avec T de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{\underline{Z}}_\ell \longrightarrow \underline{\underline{Q}}_\ell \longrightarrow \underline{\underline{Q}}_\ell/\underline{\underline{Z}}_\ell \longrightarrow 0,$$

où G_F opère trivialement. On a $T^{(1)} = T$ et $W = W^{(1)}$ s'identifie à $\varinjlim_n \mu_{\ell^n}$. Les groupes $H^q(F,V^{(r)})$ sont des $\underline{\underline{Q}}_\ell$-modules, les groupes $H^q(F,W^{(r)})$ sont de torsion, et le lemme 3 (n^o 9) entraîne que $H^q(F,T^{(r)})_{div} = 0$ pour tout q et r. De la suite exacte

$$H^q(F,V^{(r)}) \to H^q(F,W^{(r)}) \to H^{q+1}(F,T^{(r)}) \to H^{q+1}(F,V^{(r)})$$

on déduit donc un isomorphisme

$$(14) \qquad H^q(F,W^{(r)})/div \xrightarrow{\cong} H^{q+1}(F,T^{(r)})_{tors}$$

pour tout q et r.

D'après la Prop. 1 la suite exacte $(\varepsilon_{\ell^\infty})$ définit un homomorphisme

$$(15) \qquad h: K_2F \longrightarrow H^2(F,T^{(2)}).$$

Il figure dans le théorème fondamental suivant qui ramène la plupart des questions sur K_2 d'un corps global à la cohomologie galoisienne.

<u>Théorème 10</u> (Tate [16] et [17]) - <u>Soit</u> F <u>un corps global</u>. <u>L'homomorphisme</u> h <u>de</u> (15) <u>induit un isomorphisme</u>

$$K_2F(\ell) \longrightarrow H^2(F,T^{(2)})_{tors} = H^1(F,W^{(2)})/\mathrm{div}$$

La démonstration de Tate du théorème 10 utilise de façon essentielle le théorème 2 de C. Moore, et, pour les corps de nombres, le théorème 7 de Garland (et donc implicitement le théorème 4 de Matsumoto-Steinberg), aussi bien qu'un théorème fondamental d'Iwasawa [7] sur les corps cyclotomiques.

Il se ramène aussitôt (à l'aide du transfert) au cas où $\mu_\ell \subset F$. Supposons en plus que $\sqrt{-1} \in F$ si $\ell = 2$, de sorte que, si $F_\infty = F(W)$, le groupe $\Gamma = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ est isomorphe à $\underline{\underline{Z}}_\ell$. On démontre facilement que $H^i(\Gamma,W^{(2)}) = 0$ pour $i \geq 1$, d'où un isomorphisme

(16) $$H^1(F,W^{(2)}) \xrightarrow{\cong} H^1(F_\infty,W^{(2)})^\Gamma.$$

La théorie de Kummer fournit en plus une identification

(17) $$H^1(F_\infty,W^{(2)}) = W \otimes F_\infty^\bullet$$

Notons S_F (resp., S_{F_∞}) l'ensemble des places de F (resp., de F_∞) ne divisant pas $\ell\infty$ (i.e. toutes les places si F est un corps de fonctions). Posons $D' = \underline{\underline{Z}}^{(S_{F_\infty})}$. L'homomorphisme divisoriel $F_\infty^\bullet \to D'$ induit un homomorphisme

$$d: W \otimes F_\infty^\bullet \longrightarrow W \otimes D'.$$

D'autre part on a l'homomorphisme

$$\begin{aligned} e: W \otimes F_\infty^\bullet &\longrightarrow K_2F_\infty(\ell) \\ w \otimes a &\longmapsto \{w,a\}_{F_\infty} \end{aligned}$$

(cf. n° 8). Notons $\bigoplus_v' \mu_v(\ell) = \bigoplus_{v \in S_F} \mu_v(\ell)$. Considérons le diagramme

$$(18) \qquad \begin{tikzcd} H^1(F_\infty, W^{(2)})^\Gamma \arrow[r, equal] & (W \otimes F_\infty^\bullet)^\Gamma \arrow[rr, "d^\Gamma"] \arrow[dr, "e^\Gamma"'] & & (W \otimes D')^\Gamma \\ & & K_2F_\infty(\ell)^\Gamma \arrow[ur, "\lambda_{\mathrm{mod}}^{F_\infty}(\ell)^\Gamma"'] & \\ H^1(F, W^{(2)}) \arrow[uu, "\cong"] \arrow[r] & H^2(F, T^{(2)})_{\mathrm{tors}} & K_2F(\ell) \arrow[l, "h"'] \arrow[u] \arrow[r, "\lambda_{\mathrm{mod}}^F(\ell)"] & \bigoplus_v' \mu_v(\ell) \arrow[uu, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

Le théorème 10 fournit ainsi un homomorphisme

$$f : (W \otimes F_\infty^\bullet)^\Gamma \rightarrow K_2F(\ell)$$

qui, vu l'isomorphisme (14), induit un isomorphisme

$$(19) \qquad (W \otimes F_\infty^\bullet)^\Gamma/\mathrm{div} \xrightarrow{\ \cong\ } K_2F(\ell)$$

et qui, d'après Tate [20], rend commutatif le diagramme

$$(20) \qquad \begin{tikzcd} (W \otimes F_\infty^\bullet)^\Gamma \arrow[rr, "d^\Gamma"] \arrow[dr, "e^\Gamma"] \arrow[dd, "f"'] & & (W \otimes D')^\Gamma \arrow[dd, equal] \\ & K_2F_\infty(\ell)^\Gamma \arrow[ur, "\lambda_{\mathrm{mod}}(\ell)^\Gamma"'] & \\ K_2F(\ell) \arrow[ur] \arrow[rr, "\lambda_{\mathrm{mod}}(\ell)"] & & \bigoplus_v' \mu_v(\ell) \end{tikzcd}$$

En appliquant ces conclusions aux corps $F(\mu_{\ell^n})$ et passant à la limite inductive on conclut:

$$(21) \qquad e: W \otimes F_\infty^\bullet \longrightarrow K_2F_\infty(\ell)$$

<u>est surjectif, et</u> $\mathrm{Ker}(e) = \bigcup_n ((W \otimes F_\infty^\bullet)^{\Gamma_n})_{\mathrm{div}}$, où $\Gamma_n = \mathrm{Gal}(F_\infty/F(\mu_{\ell^n}))$.

Lorsque F est un corps de fonctions on voit (cf. (3) du n° 8) que $((W \otimes F_\infty^\bullet)^\Gamma)_{div} = 0$ et donc le théorème 8 du n° 8 résulte de (19) et de (21).

Dans le cas des corps de nombres Coates [5] a trouvé une interprétation naturelle de Ker(e) dans la théorie d'Iwasawa. Notant $F_n = F(\mu_{\ell^n})$ il montre aussi que les homomorphismes

$$K_2F_n(\ell) \longrightarrow K_2F_\infty(\ell)^{\mathrm{Gal}(F_\infty/F_n)}$$

sont surjectifs et à noyau "constant" pour $n \gg 0$.

Références

[1] E. Artin et J. Tate, Class field theory.

[2] H. Bass, K_2 of global fields, AMS Taped Lecture (Cambridge, Mass., Oct. 1969).

[3] B. J. Birch, K_2 of global fields, Proc. Symp. Pure Math., vol. 20, AMS (1970).

[4] A. Borel et J.-P. Serre, Adjonction de coins aux espaces symétriques; applications à la cohomologie des groupes arithmétiques, C.R. Acad. Sc. Paris t. 271 (9 Dec. 1970) 1156-1158.

[5] J. Coates, Notes d'un cours à Harvard, 1971.

[6] K. Dennis, K_2 and the stable range condition (à paraître).

[7] H. Garland, A finiteness theorem for K_2 of a number field (à paraître aux Annals).

[8] K. Iwasawa, Notes d'un cours à Princeton, 1969-70 (à paraître chez Springer).