VALENTIN POÉNARU

Le théorème de *S*-cobordisme

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 392, p. 197-219

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1970-1971__13__197_0>

Séminaire BOURBAKI
23e année, 1970/71, n° 392 Février 1971

LE THÉORÈME DE S-COBORDISME

par Valentin POENARU

Pour la torsion de Whitehead on renvoie le lecteur à l'article de Milnor [9], à De Rham [11], Wall [16], J. H. C. Whitehead [17], [18]. Pour le théorème de s-cobordisme à B. Mazur [7], Barden [1], Stallings [15], Kervaire [4]. On a utilisé ici la présentation de Kervaire.

I. Rappels sur la torsion de Whitehead.

Soient A un anneau unitaire pas nécessairement commutatif et $GL(n, A)$ le groupe (multiplicatif) des matrices carrées, inversibles, à $n \times n$ éléments, dans A. En identifiant $M \in GL(n, A)$ avec $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(n+1, A)$, on a des inclusions naturelles :

$GL(1, A) \subset GL(2, A) \subset \ldots$ e.a.d.s., et, par définition

$GL(A) = \varinjlim GL(n, A)$.

Soient $i \neq j$, où $i, j \in \{1,2,3,\ldots\}$, et E_{ij} la matrice qui est 1 à l'endroit (i-ème ligne, j-ème colonne) et 0 partout ailleurs. Une matrice de la forme $I + \lambda E_{ij}$, $\lambda \in A$, est dite élémentaire. Soit $E(A) \subset GL(A)$ le sous-groupe engendré par les matrices élémentaires. On a le

LEMME DE WHITEHEAD.- $E(A) = [GL(A), GL(A)]$. Par définition $K_1(A) = GL(A)/E(A)$.

Maintenant on va considérer un groupe π donné une fois pour toutes et on prendra $A = Z[\pi]$, la Z-algèbre du groupe π . On remarque que $\pi \hookrightarrow U(Z[\pi])$ = le groupe des éléments inversibles de $Z[\pi]$, ce qui nous donne un homomorphisme $\pi \to K_1(Z[\pi])$. De même $-1 \in U(Z[\pi]) \to K_1(Z[\pi])$ et par définition, <u>le groupe de Whitehead de</u> π <u>est</u>

$$Wh(\pi) = K_1(Z[\pi]) \,/\, (\text{le sous-groupe engendré par les images de } \pi \text{ et de } -1).$$

C'est un groupe abélien, qu'on écrira additivement. $\pi \to Wh(\pi)$ est un foncteur covariant de la catégorie des groupes, dans la catégorie des groupes abéliens. Si $f : \pi \to \pi$ est un automorphisme intérieur, l'automorphisme induit $f_* : Wh(\pi) \to Wh(\pi)$ est l'identité.

$Wh(\pi)$ possède un automorphisme naturel, $w : Wh(\pi) \to Wh(\pi)$, appelé <u>conjugaison</u>, défini comme suit :

si $a = \Sigma n_i \pi_i$ $(n_i \in Z \text{ , } \pi_i \in \pi)$, on définit $\bar{a} = \Sigma n_i \pi_i^{-1}$. C'est un anti-automorphisme de $Z[\pi]$. Ceci donne lieu à un anti-automorphisme de $GL(Z[\pi]) : (a_{ij}) \to (\bar{a}_{ji})$. On y déduit l'automorphisme w .

Le calcul de $Wh(\pi)$ est très difficile. Jusqu'à une époque récente, on ne savait, à peu près, seulement que $Wh(\pi) = 0$ pour $\pi = 0 , Z_2 , Z_3 , Z_4 , Z$ et que $Wh(Z_5) \neq 0$. Depuis, il y a eu des travaux très importants de Bass, et d'autres, qui ont apporté beaucoup de lumière sur le sujet. Je cite seulement quelques résultats en guise d'exemple :

. $Wh(Z + Z + \dots + Z) = 0$ (Bass-Heller-Swan [2]) ;

. $Wh(\pi * \pi') = Wh(\pi) + Wh(\pi')$ (résultat de Stallings [14], qui implique, en particulier, que $Wh(F_p) = 0$) ;

. si π est fini, $Wh(\pi)$ est un groupe abélien de type fini, de rang = (le nombre des représentations réelles irréductibles de π) - (les nombres des représentations rationnelles irréductibles de π), (Bass [3]).

La théorie algébrique de la torsion.

On va considérer des $Z(\pi)$-complexes C :

$$C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_o , \qquad (d_{i-1} \circ d_i = 0) ,$$

où chaque C_i est un $Z(\pi)$-module libre de type fini, muni d'une base "préférée"; la base est donnée à une permutation près, et ses éléments sont donnés à un facteur du type $\pm \pi_i$ près, $(\pi_i \in \pi)$. C s'appelle un complexe basé.

Une suite exacte de complexes basés

$$0 \to C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \to 0$$

est dite basée, si

a) f injecte la base de C' dans la base de C ;

b) g applique la base de C moins l'image de la base de C' , biunivoquement, sur la base de C'' .

Un morphisme de $Z(\pi)$-complexes $f : C \to C'$ est dit équivalence d'homotopie si $f_* : H_*(C) \xrightarrow[\approx]{} H_*(C')$ est un isomorphisme. Si C , C' sont basés, on définit le $Z(\pi)$-complexe basique acyclique, cylindre (mod C) de f , désigné par $M(f)$ et défini comme suit :

$$M(f)_i = C_{i-1} + C'_i$$

$$d^f = d' - d + f .$$

THÉORÈME 1 (Whitehead [18]).- A tout $Z(\pi)$-complexe basique acyclique, C , on peut attacher, d'une manière unique, un élément $\tau(C) \in Wh(\pi)$, caractérisé par les propriétés suivantes :

1) Si C est réduit à deux dimensions consécutives

$$\cdots \to 0 \to 0 \to C_i \xrightarrow[\approx]{d} C_{i-1} \to 0 \to 0 \cdots ,$$

alors

$$\tau(C) = (-1)^{i-1}[d]$$

où $[d]$ est la classe de la matrice inversible d, dans $Wh(\pi)$.

2) Si $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ est une suite exacte (basée) de complexes basés acycliques, on a :

$$\tau(C) = \tau(C') + \tau(C'') .$$

3) Si l'on définit $\tau(f)$ pour les équivalences d'homotopie (entre complexes basiques) $f : C \to C'$, par $\tau(f) = \tau(M(f))$, on a :

a) $f_o \sim f_1$ (homotopie) $\Rightarrow \tau(f_o) = \tau(f_1)$;

b) $\tau(g \circ f) = \tau(f) + \tau(g)$ (où $C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{g} C''$).

<u>Esquisse de démonstration</u>. L'unicité est facile [18]. Pour l'existence, on commence par remarquer que les $B_i = \mathrm{Im}(C_{i+1} \xrightarrow{d} C_i)$ sont stablement libres (à cause des suites exactes $0 \to B_i \to C_i \to B_{i-1} \to 0$). Choisissons au hasard des bases (stables) pour chaque B_i. La suite exacte écrite plus haut nous donne alors une nouvelle base (stable) pour C_i. Soit t_i la matrice qui exprime cette nouvelle base par rapport à celle qui est donnée au début (C est <u>basé</u>). On définit

$$\tau(C) = \Sigma (-1)^i [t_i] .$$

On vérifie d'une part que cette définition est indépendante des bases (stables) choisies pour les B_i, d'autre part que 1), 2), 3) sont satisfaites (voir Milnor [9]).

La théorie géométrique de la torsion.

On va considérer maintenant un C.W.-complexe (= complexe cellulaires) fini, connexe, X . Donc, X est muni d'une filtration

$$X = X_n \supset X_{n-1} \supset \dots \supset X_o \supset X_{-1} = \emptyset$$

(X_i = le i-ème squelette de X) où X_o = un ensemble fini, et X_i est obtenu à partir de X_{i-1} en attachant un nombre fini de disques (cellules) de dimension i .

Soit D_k le disque "standard" de dimension k , ($D_k = \{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 \leq 1\} \subset R_k$) , $S_{k-1} = \partial D_k$. Dans S_{k-1} , on considère les hémisphères nord (et sud) $D_{k-1}^+ = S_{k-1} \cap (x_k \geq 0)$ (et $D_{k-1}^- = S_{k-1} \cap (x_k \leq 0)$). On a $D_{k-1}^+ \cap D_{k-1}^-$ = l'équateur $= S_{k-2} = S_{k-1} \cap (x_k = 0)$. Soit ψ une application continue

$$\psi : (D_{k-1}^- , S_{k-2}) \to (X_{k-1} , X_{k-2}) .$$

L'espace $Y = X \cup_\psi D_k$ a une structure naturelle de CW-complexe : on ajoute à X d'abord la cellule D_{k-1}^+ et ensuite la cellule D_k . (Donc $Y_i = X_i$ (si $i < k - 1$) , $Y_{k-1} = X_{k-1} \cup D_{k-1}^+$, $Y_j = (X_j \cup Y_{k-1}) \cup D_k$, si $j \geq k$.)

L'inclusion $X \hookrightarrow Y$ est appelée une dilatation (élémentaire de dimension k). Il y a une rétraction évidente, unique à homotopie près $Y \searrow X$. On l'appelle contraction (élémentaire de dimension k). Une dilatation, (ou une contraction), de dimension k , est appelée déformation élémentaire (de dimension k). Une suite finie de contractions est appelée collapsing (ou effondrement).

Soient maintenant X_o , X_1 deux CW-complexes finis arbitraires et $f : X_o \to X_1$ une application cellulaire qui est une équivalence d'homotopie ;

f est dite une <u>équivalence d'homotopie simple</u>, si elle est homotope à une composition finie de déformations élémentaires. (Et, si une telle équivalence d'homotopie simple existe $X_0 \to X_1$, on dira que X_0 et X_1 ont le même <u>type d'homotopie simple</u>.)

Maintenant si $f : X_0 \to X_1$ est tout simplement une équivalence d'homotopie (cellulaire), on lui attache une <u>torsion de Whitehead</u>

$$\tau(f) \in Wh(\pi_1(X_0)) = Wh(\pi_1(X_1))$$

comme suit : soient $\widetilde{X}_0$, $\widetilde{X}_1$ les revêtements universels, et $\widetilde{f} : \widetilde{X}_0 \to \widetilde{X}_1$ l'application cellulaire induite. Soit $\pi = \pi_1(X_0) = \pi_1(X_1)$ (la dernière identification étant faite par f_*). On considère le $Z[\pi]$-complexe des chaînes cellulaires de $\widetilde{X}_i$: $C(\widetilde{X}_i)$. Si l'on considère des relèvements arbitraires des cellules de X_i, c'est un complexe <u>basé</u>. $\widetilde{f}$ induit un morphisme de $Z[\pi]$-complexes, qui est une équivalence d'homotopie

$$\widetilde{f}_{\natural} : C(\widetilde{X}_0) \to C(\widetilde{X}_1) .$$

Par définition $\tau(f) = \tau(\widetilde{f}_{\natural}) \in Wh(\pi)$.

THÉORÈME 2 (Whitehead [17], [18]).- f est une équivalence d'homotopie simple si et seulement si $\tau(f) = 0$.

La meilleure référence pour la démonstration est le travail de Wall [16]. On y trouve aussi le résultat suivant, qui améliore d'une unité un théorème antérieur de Whitehead :

THÉORÈME 3 (Whitehead-Wall [16]).- Si $f : X_0 \to X_1$ est une équivalence d'homotopie avec $\tau(f) = 0$, on peut passer de X_0 à X_1 par une suite de déformations élémentaires de dimensions $\leq \max(\dim X_0, \dim X_1, 3) + 1$.

Si $i : A \to B$ est une inclusion, $\tau(i)$ dépend seulement de la paire (B, iA) et sera désignée par

$$\tau(B, A) = \tau(B, iA) .$$

UN EXEMPLE IMPORTANT.- Considérons un CW-complexe fini, connexe, X, avec "point base" $x_o \in X$ et soit $n \geq 2$. Considérons le CW-complexe X' obtenu en ajoutant, à X, p cellules de dimension n, par le recollement

$$D_n^i \supset \dot{\partial} D_n^i \xrightarrow[\text{constante}]{\text{application}} x_o \in X \qquad (i = 1,\ldots,p) .$$

On remarque que

$$C_n(\widetilde{X}', \widetilde{X}) = H_n(\widetilde{X}', \widetilde{X}) = \pi_n(\widetilde{X}', \widetilde{X}) = \pi_n(X', X) .$$

Soit X_n le n-ème squelette de X. On ajoute encore p cellules de dimension $(n+1)$ à $X \cup D_n^1 \cup \ldots \cup D_n^p$, rattachées à l'aide des applications

$$D_{n+1}^i \supset \partial D_{n+1}^i = S_n^i \xrightarrow[\varphi_i]{} X_n \cup D_n^1 \cup \ldots \cup D_n^p = X' .$$

On va supposer que ceci est fait de telle manière que l'inclusion naturelle

$$X \hookrightarrow X \cup D_n^1 \cup \ldots \cup D_n^p \cup D_{n+1}^1 \cup \ldots \cup D_{n+1}^p = Y$$

soit une équivalence d'homotopie.

On dira que Y est "bon" si $\varphi_i(S_n^i)$ ne touche pas à D_n^j $(j \neq i)$ et "contient D_n^i exactement une fois". (Ceci implique que Y collapse sur X.)

La suite exacte d'homologie du triple $(\widetilde{Y}, \widetilde{X}', \widetilde{X})$ se réduit à

$$0 \leftarrow H_n(\widetilde{X}', \widetilde{X}) \xleftarrow[d]{} H_{n+1}(\widetilde{Y}, \widetilde{X}') \leftarrow 0 .$$

Les deux termes sont des $Z[\pi_1(X)]$-modules libres qui admettent comme bases les relèvements de D_n^i, D_{n+1}^i, respectivement. Par rapport à ces bases, d est une matrice inversible à coefficients dans $Z[\pi_1(X)]$:

$$d \in GL(p, Z[\pi_1(X)]) \hookrightarrow GL(Z[\pi_1(X)]) \to Wh(\pi_1(X)) .$$

<u>L'image de</u> d <u>dans</u> $Wh(\pi_1(X))$ <u>est</u> $\tau(Y, X)$.

On montre que cette image est 0 , si et seulement si l'on peut rendre Y bon par une suite finie de modifications élémentaires du type suivant :

1) permutation des φ_n^i ;
2) homotopie des φ_n^i (dans X') ;
3) glisser φ_n^i sur φ_n^j ;
4) ajouter une cellule D_n^{p+1} par l'application $S_n^{p+1} \to x_o$ et une cellule

D_{n+1}^{p+1} rattachée par $S_n^{p+1} \xrightarrow[\approx]{} D_n^{p+1}/S_{n-1}^{p+1}$.

II. <u>Le théorème de</u> s-<u>cobordisme</u>.

Un h-<u>cobordisme</u> est, par définition, un triple de variétés C^∞ : $(W ; M , M')$ tel que

1) W , M , M' sont connexes ;
2) M , M' sont fermées ;
3) W a un bord $\neq \emptyset$: ∂W qui est $M + M'$ (union disjointe) ;
4) les inclusions $M , M' \subset W$ sont des équivalences d'homotopie.

On peut donc considérer

$$\tau(W , M) \ , \ \tau(W , M') \ \in \ Wh(\pi_1 W) \ .$$

Si W est orientable, de dimension n , on a :

$$\tau(W , M') \ = \ (-1)^{n-1} \ \bar{\tau}(W , M) \ ,$$

où $Wh(\pi_1 W) \ni \alpha \to \bar{\alpha} \in Wh(\pi_1 W)$ est l'automorphisme de conjugaison. Ceci est le <u>théorème de dualité de Milnor</u> [9]. Même sans conditions d'orientabilité $\tau(W , M') = 0 \Leftrightarrow \tau(W , M) = 0$. Par définition, W est un s-<u>cobordisme</u> si $\tau(W , M) = 0$.

Si (W, M, M') , (W_1, M', M'') sont deux h-cobordismes, on peut considérer leur somme $(W \cup_{M'} W_1, M, M'')$ qui est encore un h-cobordisme. La torsion se comporte d'une manière additive, par rapport à cette opération, à condition de tout rapporter dans un même groupe, par les isomorphismes d'inclusion

$$\pi_1 W \underset{\approx}{\longleftarrow} \pi_1 M' \underset{\approx}{\longrightarrow} \pi_1 W_1 .$$

THÉORÈME 4 (Le théorème de s-cobordisme).- Soit $(W ; M , M')$ un h-cobordisme de dimension $\dim W \geq 6$. W est difféomorphe à $M \times I$ si et seulement si $\tau(W, M) = 0$. (Donc tout s-cobordisme de dimension ≥ 6 , est trivial.)

Esquisse de démonstration. (On va se restreindre au cas orientable.) Si $W = M \times I$, W collapse sur $M \times 0 = M$, donc $\tau(W, M) = 0$. Pour démontrer la réciproque, on rappelle quelques notions sur les anses. (Comme on le sait bien, il y a deux manières "équivalentes", d'ailleurs, de présenter cette théorie : d'une part les (niveaux des) fonctions de Morse, ce qui est la méthode rigoureuse mais longue à raconter et d'autre part les anses ; c'est la méthode heuristique, donc facilement racontable, donc celle qu'on choisit ici.) Soit V un cobordisme de dimension $n+1$, entre P_0 , P_1 $(\partial V = P_0 + P_1)$, et $D_{n+1} = D_\lambda \times D_{n+1-\lambda}$. On a

$$\partial D_{n+1} = S_n = \partial D_\lambda \times D_{n+1-\lambda} + D_\lambda \times \partial D_{n+1-\lambda} .$$

Si $\varphi_\lambda : \partial D_\lambda \times D_{n+1-\lambda} \to P_1$ est un plongement différentiable, on définit " V + (une anse d'indice λ) " :

$$V + (\varphi_\lambda) = V \cup D_{n+1}$$

où chaque $x \in \partial D_\lambda \times D_{n+1-\lambda}$ est identifié à $\varphi_\lambda(x) \in P_1$. Il y a une manière canonique de mettre une structure différentiable sur $V + (\varphi_\lambda)$. On a une inclusion naturelle $P_0 \subset \partial(V + (\varphi_\lambda))$. Désignons par P_2 : $\partial(V + (\varphi_\lambda)) - P_0$.

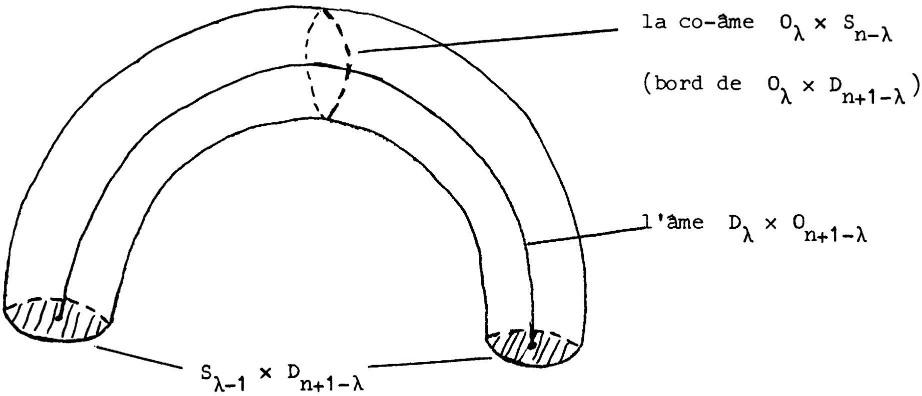
Soit O_λ $(O_{n+1-\lambda})$ le centre du disque D_λ $(D_{n+1-\lambda})$. On a un plongement

$$(D_\lambda \times O_{n+1-\lambda}, \partial(D_\lambda \times O_{n+1-\lambda})) \hookrightarrow (V + (\varphi_\lambda), V)$$

qui est appelé "<u>l'âme</u>" de l'anse φ_λ. (Toute l'homotopie de l'anse est concentrée dans son âme.) La sphère :

$$\partial(O_\lambda \times D_{n+1-\lambda}) = O_\lambda \times S_{n-\lambda} \hookrightarrow P_2$$

est, par définition, la <u>co-âme</u> de l'anse.



On rappelle un nombre de faits fondamentaux :

1) <u>Lemme de cancellation</u>.- Si $\varphi_{\lambda+1} : \partial D_{\lambda+1} \times D_{n-\lambda} \hookrightarrow P_2$ est un plongement tel que $\varphi_{\lambda+1}(\partial D_{\lambda+1} \times O_{n-\lambda})$ coupe $S_{n-\lambda}$, co-âme de φ_λ, <u>transversalement</u>, en exactement un point, on a :

$$V + (\varphi_\lambda) + (\varphi_{\lambda+1}) = V \text{ (difféomorphisme)}.$$

2) <u>Lemme de la dualité des anses</u>.- Si $V = P \times I$, $P_o = P \times 0$, $P_1 = P \times 1$, il existe une anse d'indice $n - \lambda$: $\psi_{n-\lambda+1}$ telle que

$$V + (\varphi_\lambda) = (P \times I) + (\varphi_\lambda) = (P_2 \times I) + (\psi_{n-\lambda+1}).$$

C'est le même disque $D_\lambda \times D_{n+1-\lambda}$ mais l'âme et le co-bord du co-âme interchangent de rôle. Ceci devient clair si l'on remarque qu'un cobordisme $(W ; V' , V'')$ est difféomorphe à $((P \times I) + (\varphi_\lambda) , P_o , P_2)$ si et seulement si, il existe une fonction C^∞ , $f : W \to I$ avec $f^{-1}(0) = V'$, $f^{-1}(1) = V''$ ayant exactement un point critique non dégénéré, d'indice λ . Le passage $(\varphi_\lambda) \Rightarrow (\psi_{n-\lambda+1})$ n'est rien d'autre que le passage $f \Rightarrow 1 - f$. D'autre part, la "dualité des anses" n'est autre chose qu'une manière très géométrique de regarder la dualité de Poincaré.

3) <u>Lemme de "nicification"</u>.- Si $W = V + (\varphi'_\lambda) + (\varphi'_\mu)$, avec $\lambda > \mu$, on peut trouver des anses φ''_μ , φ''_λ , telles que

$$W = V + (\varphi''_\mu) + (\varphi''_\lambda) .$$

4) <u>Lemme homotopique</u>.- Si $i \leq \lambda$ et $i + \lambda \leq n - 1$, l'homomorphisme d'inclusion $\pi_i(P_2) \to \pi_i(V + (\varphi_\lambda))$ est un isomorphisme.

Le lemme de "nicification" nous dit que le h-cobordisme W peut toujours se représenter, en allant de M à M' , sous la forme :

$$\begin{aligned} W = M \times I &+ \underbrace{(\varphi_o^1) + \dots + (\varphi_o^{m_o})}_{\text{anses d'indice } 0} + \underbrace{(\varphi_1^1) + \dots + (\varphi_1^{m_1})}_{\text{anses d'indice } 1} \\ &+ \underbrace{(\varphi_2^1) + \dots + (\varphi_2^{m_2})}_{\text{anses d'indice } 2} + \dots + \underbrace{(\varphi_i^1) + \dots + (\varphi_i^{m_i})}_{\text{anses d'indice } i} \\ &+ \underbrace{(\varphi_{i+1}^1) + \dots + (\varphi_{i+1}^{m_{i+1}})}_{\text{anses d'indice } i+1} + \dots + \underbrace{(\varphi_{n+1}^1) + \dots + (\varphi_{n+1}^{m_{n+1}})}_{\text{anses d'indice } n+1} . \end{aligned}$$

On va désigner par X_λ :

$$X_\lambda = (M \times I) + (\text{les anses d'indice} \leq \lambda) , \quad X_{-1} = (M \times I) ,$$

$$\partial X_\lambda = Y_\lambda - (M \times 0) .$$

La décomposition décrite, ci-dessus, donne, par la dualité des anses, une décomposition (duale) allant de M' à M, où les anses φ^i_λ deviennent des anses $\psi^i_{n+1-\lambda}$. Si l'on désigne par X^*_μ :

$$X^*_\mu = (M' \times I) + (\text{les anses } \psi \text{ d'indice } \leq \mu) ,$$

on aura :

$$\partial X^*_\mu = Y^*_\mu - (M' \times 0)$$

et, dans W, les sous-variétés Y_λ et $Y^*_{n+1-\lambda}$ de codimension 1 sont identiques :

$$Y_\lambda \equiv Y^*_{n+1-\lambda} .$$

Supposons maintenant que, pour un certain q, $2 \leq q < n-2$, il n'y ait pas d'anses d'indice $< q$ (donc $X_{-1} = X_o = \ldots = X_{q-1}$). Dans Y_q, on considère le plongement différentiable $S^i_{n-q} \hookrightarrow Y_q$, co-âme de l'anse (φ^i_q). Soit $\pi = \pi_1(M) = \pi_1(M') = \pi_1(W)$.

$H_q(\widetilde{X}_q, \widetilde{X}_{-1})$ est un $Z[\pi]$-module libre ayant comme base des relèvements $[D^i_q]$, des âmes correspondant aux anses (φ^i_q).

LEMME 1 (voir [4]).- Dans les conditions décrites ci-dessus, avec $2 \leq q < n-2$, soit $f : S_q \to Y_q$ un plongement différentiable. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un plongement $f' : S_q \to Y_q$, isotope à f, tel que pour un certain $i_o \in [1,\ldots,m_q]$, $f'(S_q) \cap S^j_{n-q} = \emptyset$ si $j \neq i_o$ et $f'(S_q)$ coupe $S^{i_o}_{n-q}$ transversalement, en un point (exactement).

(ii) Les relèvements de f dans $\widetilde{X}_q$ sont représentés, dans $H_q(\widetilde{X}_q, \widetilde{X}_{-1})$, par $\pm \gamma.[D^{i_o}_q]$ où $\gamma \in \pi$.

Démonstration du lemme (d'après Kervaire). (i) $\Rightarrow$ (ii) est évidente. Pour montrer que (ii) $\Rightarrow$ (i), on considère dans Y_q les parties

$D^i_q \times S^i_{n-q} \hookrightarrow Y_q$ provenant des anses φ^i_q. [$0^i_q \times S^i_{n-q} \equiv S^i_{n-q}$, co-âme de l'anse φ^i_q .] On peut toujours supposer que, pour chaque i , il existe un ensemble fini $E^i \subset S^i_{n-q}$, tel que $f(S_q) \cap (D^i_q \times S^i_{n-q}) = D^i_q \times E^i$.

Soient $p \in S_q$ tel que $f(p)$ ne touche pas aux $D^i_q \times S^i_{n-q}$ et $P \subset Y_q$ un disque de dimension n , tel que $D^i_q \times E^i \subset P \ni f(p)$; P sera pris comme "point base" pour $\pi_1(Y_q) = \pi$.

Soient a^i_1 , a^i_2 ,... les points de E^i et $\varepsilon^i_j = \pm 1$ le signe de l'intersection de $f(S_q)$ avec S^i_{n-q} au point a^i_j . On choisit aussi des $b^i_j \in \partial(D^i_q \times a^i_j)$ et on unit b^i_j à $f(p)$ par un chemin x^i_j , de $f(S_q)$, tel que $x^i_j \cap (\cup D^i_q \times E^i) = b^i_j$. Puisque le "point base" de $\pi_1(Y_q)$ est P , x^i_j engendre un élément $[x^i_j] \in \pi_1(Y_q) = \pi$.

Modulo multiplication par des éléments de π , les "relèvements" de f , dans $H_q(\tilde{X}_q , \tilde{X}_{-1})$, sont de la forme :

$$\bar{f} = \sum_{i,j} \varepsilon^i_j [x^i_j][D^i_q] .$$

L'hypothèse (ii) et le fait que $H_q(\tilde{X}_q , \tilde{X}_{-1})$ est un $Z[\pi]$-module libre impliquent qu'il existe un point $a \in E^{i_o}$, tel que les éléments de $\cup E^i - \{a\}$ s'arrangent en paires (a^i_λ , a^i_μ) , avec $[x^i_\lambda] = [x^i_\mu]$, $\varepsilon^i_\lambda = - \varepsilon^i_\mu$. On va montrer qu'une telle paire (a^i_λ , a^i_μ) peut être éliminée.

On commence par remarquer que

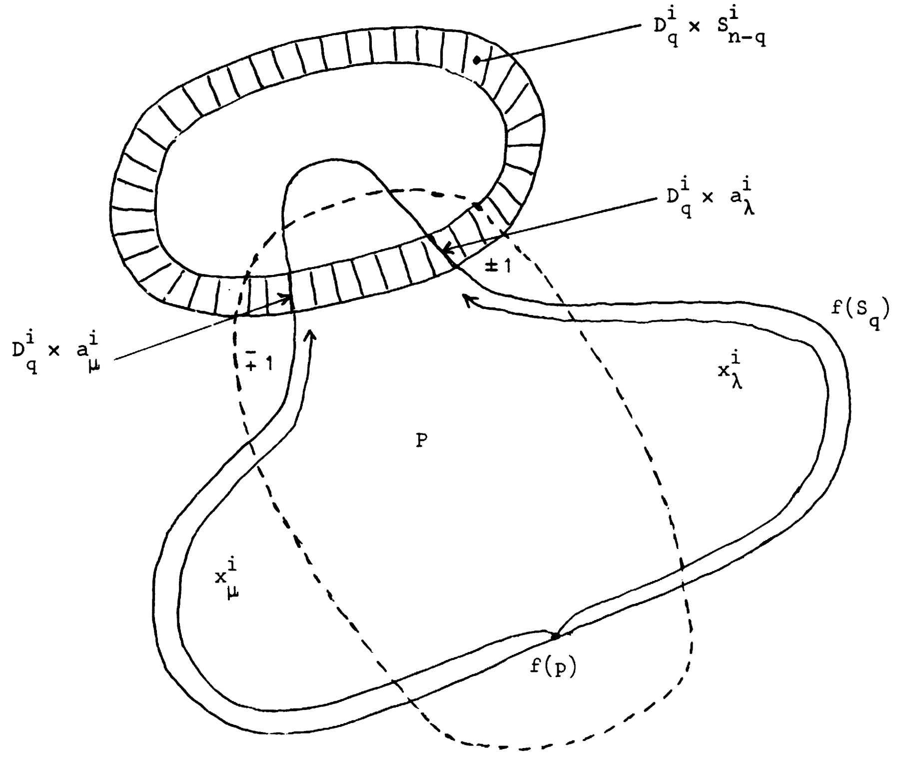
$$\text{(x)} \qquad \pi_1(Y_q) = \pi_1(Y_q - \bigcup_i S^i_{n-q}) .$$

Ceci est évident si $q > 2$. Si $q = 2$, on remarque que, vu qu'il s'agit d'un h-cobordisme, les anses (φ_q^i) ont la propriété que chaque

$$\varphi_2^i = \varphi_q^i : S_{q-1} \times D_{n-q+1} \rightarrow M \times 1 \subset \partial X_{-1}$$

est homotope à 0. Il existe donc des fibrés de fibre D_{n-1} et de base $S_2 = S_q$: $F_i \xrightarrow[\pi_i]{} S_2$ $(i = 1, \ldots, m_2)$ tels que $X_q = X_2 = (M \times 1) \# F_1 \# \ldots \# F_{m_2}$ (somme connexe de variétés à bord $\neq \emptyset$). Soient $\bar{F}_i \xrightarrow[\pi_i]{} S_2$ les fibrés en sphères S_{n-2} associées. On a $Y_2 = (M \times 1) \# \bar{F}_1 \# \ldots \# \bar{F}_{m_2}$ (somme connexe de variétés sans bord), et S_{n-2}^i s'identifie à $\pi^{-1}(y_i)$, $(y_i \in S_2)$, où $\pi_i^{-1}(y_i) \subset \bar{F}_i - M \times 1$. Vu que $\bar{F}_j - \pi_i^{-1}(y_i) = S_{n-2} \times R_2$ (difféomorphisme) (et que $n \geq 4$), on a l'isomorphisme (x).

On unit maintenant $\bar{b}_\lambda^i$ à b_μ^i par un arc $c_{\lambda,\mu}^i$ de $\partial(D_q^i \times S_{n-q}^i)$ contenu dans P, et, d'après tout ce qu'on vient de dire, le lacet fermé $x_\lambda^i + c_{\lambda,\mu}^i + (x_\mu^i)^{-1}$ (où $+$ représente l'opération "somme de chemins") est homotope à 0 dans Y_q, <u>en fait dans</u> $Y_q - \bigcup_i S_{n-q}^i$. Le procédé bien connu de Whitney nous permet maintenant d'éliminer (a_λ^i, a_μ^i) (vu que $n \geq 4$ et que $q < n-2$).



On peut passer maintenant à la démonstration proprement dite.

Etape 1.

L'étape 1 dit qu'on peut toujours s'arranger pour n'avoir que des anses de deux indices consécutifs :

LEMME 2.- Soient $(W ; M, M')$ un h-cobordisme de dimension $n+1 \geq 6$, et r un entier tel que $2 \leq r \leq n-2$. On peut toujours représenter W sous la forme

$$W = (M \times 1) + (\varphi_r^1) + \dots + (\varphi_r^\alpha) + (\varphi_{r+1}^1) + \dots + (\varphi_{r+1}^\alpha) .$$

[On remarque que la torsion n'intervient pas dans cette première étape.]

Démonstration (très esquissée). On peut éliminer sans aucune peine les anses d'indice 0 et $(n+1)$. En utilisant le fait que $n \geq 5$, on peut faire disparaître les anses d'indice 1 en introduisant de nouvelles anses (triviales) d'indices 2 et 3 qui s'entre-tuent. (C'est "l'astuce de Smale" utilisée déjà dans le théorème de h-cobordisme [13], [5].) On utilise ici le fait que

$$\pi_1(Y_1) = \pi_1(X_1) \quad \text{et} \quad \pi_1(Y_2) = \pi_1(X_2)$$

(conséquences du lemme homotopique). Par la dualité des anses, le même procédé fait disparaître les anses d'indice n . Supposons que, pour un certain q , $2 \leq q < r \leq n-2$, on ait réussi à se débarrasser de toutes les anses d'indice $\leq q-1$. (Ici $n-2 > 2$, donc $n+1 \geq 6$.) On peut faire disparaître les anses d'indice q , en introduisant des anses d'indices $q+1$, $q+2$ (qui s'entre-tuent) et en faisant glisser les nouvelles anses d'indice $q+1$ sur les anciennes, de telle manière, qu'à la fin, elles tuent les anses d'indice q . Ceci utilise le lemme 1 et le lemme suivant qu'on donne sans démonstration :

LEMME 3.- Soient $f : S_q \to Y_q - \bigcup_j (\varphi_{q+1}^j(S_q \times D_{n-q}))$ un plongement différentiable, et $x_j \in Z[\pi]$, $(j = 1, \dots, m_{q+1})$, des éléments arbitraires. Considérons l'opérateur bord

$$H_{q+1}(\widetilde{X}_{q+1}, \widetilde{X}_q) \xrightarrow[d]{} H_q(\widetilde{X}_q, \widetilde{X}_{q-1} = \widetilde{X}_{-1}) ,$$

qui est surjectif (parce qu'on a un h-cobordisme). On peut trouver un autre plongement différentiable $g : S_q \to Y_q - \bigcup_j (\varphi^j_{q+1}(S_q \times D_{n-q})$, tel que :

(i) f et g sont isotopes dans Y_{q+1} ;

(ii) dans $H_q(\widetilde{X}_q , \widetilde{X}_{-1})$, $\bar{g} = \bar{f} + \sum_j x_j\, d([D^j_{q+1}])$.

Le procédé d'élimination des anses d'indice q que l'on vient d'esquisser et la dualité des anses impliquent le lemme 2.

Etape 2.

LEMME 4.- Soit W un h-cobordisme (W , M , M') , tel que $\tau(M , W) = 0$, $\dim W = n+1 \geq 6$, qui possède une décomposition comme dans le lemme 2 ci-dessus, avec $2 \leq r < n-2$. Alors W est difféomorphe à un produit $W = M \times I = M' \times I$.

Esquisse de démonstration. On remarque qu'on est dans une situation (lisse) tout à fait analogue à notre Exemple important de la fin du paragraphe I. En particulier, si l'on considère

$$H_{r+1}(\widetilde{X}_{r+1} , \widetilde{X}_r) \xrightarrow[d]{} H_r(\widetilde{X}_r , \widetilde{X}_{-1}) ,$$

d est une matrice inversible à coefficients dans $Z[\pi]$ et son image dans $Wh(\pi)$ est justement $\tau(M , W) = 0$. Donc d peut être ramenée à une forme diagonale par une suite finie d'opérations élémentaires du type :

(i) on multiplie une ligne par $\pm\gamma$, $\gamma \in \pi$;

(ii) on ajoute une ligne à une autre ligne ;

(iii) on fait la somme directe avec la matrice 1 .

Si $2 \leq r \leq n-2$, ces opérations peuvent se traduire géométriquement par des opérations de glissements d'anses d'indice $r+1$ les unes sur les autres, et d'adjonction de paires triviales d'anses d'indices r , $r+1$ qui s'entre-tuent. Ceci ne change pas W . On peut donc supposer que l'opérateur bord d est diagonalisé. Si, en plus, $2 \leq r < n-2$ le lemme 1 nous dit que φ^i_{r+1} tue φ^i_r .

III. Quelques résultats apparentés.

THÉORÈME 5 (Stallings).- Soient M une variété, C^∞ , fermée, connexe, de dimension $\dim M \geq 4$, et $\tau_o \in Wh(\pi_1 M)$ un élément quelconque. Il existe un h-cobordisme (de dimension ≥ 5) $(W ; M , M')$ tel que $\tau(W , M) = \tau_o$.

Démonstration. On représente τ_o par une matrice τ . Vu que $\dim M \geq 4$, on peut ajouter à $(M \times I)$ des anses d'indices 2 et 3

$$W = \underbrace{(M \times I) + (\text{anses d'indice } 2)}_{X_2} + (\text{anses d'indice } 3) ,$$

de telle façon que l'opérateur bord $H_3(\widetilde{W} , \widetilde{X}_2) \xrightarrow{d} H_2(\widetilde{X}_2 , (M \times I))$ soit exactement τ . Alors W est le h-cobordisme cherché. (On remarque qu'il s'agit, de nouveau, d'une version de l'exemple fondamental de la fin du paragraphe I.)

COROLLAIRE 6.- Tout h-cobordisme (W , M , M') , avec $n+1 = \dim W \geq 6$, admet un h-cobordisme "inverse" (W^{-1} , M' , M) , unique à difféomorphisme près, tel que

$$W \cup_{M'} W^{-1} = M \times I \quad , \quad W^{-1} \cup_M W = M' \times I .$$

Démonstration. D'après le théorème précédent, on construit un h-cobordisme (W^{-1} , M' , M'') tel que $\tau(W^{-1} , M') = (-1)^n \bar{\tau}(W , M)$. Alors, $\tau(W \cup_{M'} W^{-1} , M) = (-1)^n \bar{\tau}(W^{-1} , M') + \tau(W , M) = 0$. Donc $W \cup_{M'} W^{-1} = M \times I$. Donc $M'' = M$. On vérifie facilement la seconde égalité (en utilisant de nouveau le théorème de s-cobordisme et le théorème de dualité de Milnor).

L'unicité est un "abstract non sense".

Remarques.- Il ne faut pas confondre W^{-1} avec le h-cobordisme dual de (W, M, M') : $(W, M', M) = W$ allant de M' à M.

Le corollaire ci-dessus reste vrai si $\dim W = 5$ (conséquence du "engulfing theorem" de Stallings).

COROLLAIRE 7.- Soient (W_1, M, M_1), (W_2, M, M_2) deux h-cobordismes de dimension $n+1 \geq 6$ tels que $\tau(W_1, M) = \tau(W_2, M)$. Il existe un difféomorphisme

$$(W_2, M) \xrightarrow[\approx]{} (W_1, M) \qquad \text{(qui est l'identité sur } M\text{)}.$$

Démonstration. Soit (W_1^{-1}, M_1, M) l'inverse de (W_1, M, M_2). Puisque $\tau(W_1^{-1}, M_1, M) = (-1)^n \bar{\tau}(W_2, M, M_2)$, on a $(W_1^{-1}, M_1, M) = (W_2^{-1}, M_2, M)$ e.a.d.s.

COROLLAIRE 8.- Soit (W, M, M') un h-cobordisme de dimension ≥ 6. On a les difféomorphismes suivants :

a) $W - M = M' \times (0, 1]$;

b) $W - M' = M \times [0, 1)$;

c) $W - (M \cup M') = M \times (0, 1) = M' \times (0, 1)$;

d) $M \times S_1 = M' \times S_1$ (De Rham).

Remarque.- Ce corollaire est vrai même en dimension 5 (engulfing).

Démonstration. a) résulte en calculant de deux façons (procédé de B. Mazur) le produit infini $W \cup_{M'} W^{-1} \cup_M W \cup_{M'} W^{-1} \cup \ldots$. c) résulte de a), b) ou par l'application du même procédé au produit infini

$$\ldots W^{-1} \cup W \cup W^{-1} \cup W \cup \ldots .$$

d) résulte en considérant l'action naturelle du groupe Z sur la variété écrite ci-dessus, et les deux manières de calculer le quotient.

Remarque.- On peut obtenir autant de contre-exemples à la Haupvermutung (pour les non variétés) que l'on veut, à partir de c) en considérant les deux triangulations différentes de $(W, M, M')/M \cup M'$ obtenues à partir de M, M', quand $M \neq M'$.

IV. Quelques remarques.

Vu que cet exposé parle de choses relativement anciennes (qu'on a pensé tout de même utile d'inclure dans les archives de Bourbaki), on va finir par quelques commentaires historiques.

La "torsion de Whitehead" (dont une version très spéciale, mais beaucoup plus commode pour les calculs avait été déjà rencontrée par Reidemeister, De Rham et Franz, dans l'étude des espaces lenticulaires) a été inventée par J. H. C. Whitehead vers la fin des années 30, comme un outil pour l'attaque de la conjecture (généralisée) de Poincaré. (En fait, Whitehead avait commencé par essayer de démontrer que toute équivalence d'homotopie était simple.) Pendant longtemps, Whitehead a pensé que cette théorie du type simple d'homotopie était un échec et déconseillait aux gens la lecture de son mémoire (considéré aujourd'hui comme fondamental) [17].

En 1960 Smale a démontré le théorème de h-cobordisme [13], [5] qui est le cas spécial du théorème de s-cobordisme, quand $\pi_1 = 0$. Les gens se sont rendus compte, à l'époque, que la technique de Smale était une sorte de version différentiable de celle de Whitehead, ayant en plus "la dualité des anses". Du point de vue de la théorie du type simple d'homotopie, on pourrait résumer le théorème du s-cobordisme en disant que (pourvu que les dimensions soient suffisamment grandes), dans le cas lisse, la dualité des anses nous fait gagner une unité par rapport au théorème 3, donné ci-dessus.

Le passage au cas non simplement connexe nécessitait une idée supplémentaire par rapport au théorème de h-cobordisme (dans la présentation donnée ci-dessus, cette idée est dans le lemme 1). La première démonstration du théorème de s-cobordisme est donnée par B. Mazur en 1962 [7], [8]. Des démonstrations indépendantes sont dues aussi à Barden et Stallings. La plus courte est celle de Kervaire [4], qu'on a reproduite ici.

Siebenmann a généralisé ces résultats pour les variétés ouvertes [12 bis].

Les méthodes de Kirby et Siebenmann ont apporté deux choses nouvelles (et importantes) dans le sujet :

1) La torsion est un invariant topologique [6], [10].

2) Le théorème du s-cobordisme est faux en dimension 4 ou 5 (cf. [12]).

2) ne contredit cependant aucune des deux conjectures suivantes :

(i) le théorème (de h-cobordisme) est vrai si $\pi_1 = 0$;

(ii) le type simple d'homotopie est un invariant complet pour les variétés de dimensions 3 et 4 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. BARDEN - On the structure of manifolds, Ph. Thesis, Cambridge (1963).

[2] H. BASS, A. HELLER, R. SWAN - The Whitehead group of a polynomial extension, Publ. Math. I.H.E.S., n° 22 (1964).

[3] H. BASS - K-theory and stable algebra, Publ. Math. I.H.E.S., n° 22 (1964).

[4] M. KERVAIRE - Le théorème de Barden, Mazur, Stallings, Comm. Math. Helvetia, (1965), p. 31-42.

[5] J. CERF - Travaux de Smale sur la structure des variétés, Sém. Bourbaki, 1961/62, exposé n° 230, New York, Benjamin.

[6] R. KIRBY, L. SIEBENMANN - On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung, B.A.M.S., 1969, p. 742-749.

[7] B. MAZUR - Relative neighborhoods and the theorem of Smale, Ann. of Math. (2) 77, 1963, p. 232-249.

[8] B. MAZUR - Differential topology from the point of view of simple homotopy theory, Publ. Math. I.H.E.S., n° 15 (1963).

[9] J. MILNOR - Whitehead torsion, B.A.M.S., 1966, p. 358-426.

[10] C. MORLET - Hauptvermutung et triangulation des variétés, Sém. Bourbaki, 1968/69, exposé n° 362, Lecture Notes 179, Springer-Verlag.

[11] G. DE RHAM, S. MAUMARY, M. KERVAIRE - Torsion et type simple d'homotopie, Springer-Verlag (1967).

[12] L. SIEBENMANN - Are non-triangulable manifolds triangulable ? (A paraître).

[12 bis] ----- - Infinite simple homotopy types, Proceedings Nederl. Akad. (1970), p. 479-495.

[13] S. SMALE - On the structure of manifolds, Amer. J. of Math., 84 (1962), p. 387-399.

[14] J. STALLINGS - Whitehead torsion of free products, Ann. of Math., (1965), p. 354-363.

[15] J. STALLINGS - Lectures on polyhedral topology, Tata Institute, 1968.

[16] C. T. C. WALL - Formal deformations, Proc. Lond. Math. Soc., (1966), p. 342-352.

[17] J. H. C. WHITEHEAD - Simplicial spaces nuclei and m-groups, Proc. Lond. Math. Soc., (1939), p. 243-327.

[18] J. H. C. WHITEHEAD - Simple homotopy types, Amer. J. of Math., (1950), p. 1-57.