SÉMINAIRE N. BOURBAKI

CLAUDE GODBILLON

Problèmes d'existence et d'homotopie dans les feuilletages

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 390, p. 167-181
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1970-1971__13__167_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
23e année, 1970/71, n° 390 Février 1971

PROBLÈMES D'EXISTENCE ET D'HOMOTOPIE DANS LES FEUILLETAGES

par Claude GODBILLON

1. Rappels sur les feuilletages ([5], [11]).

Soit M^m une variété différentiable (*) paracompacte sans bord de dimension m.

Un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension q, $0 \leq q \leq m$, (ou de dimension $m-q$) de M est déterminé par un atlas différentiable (U_i, φ_i) de M ayant la propriété suivante :

si on identifie R^m au produit $R^q \times R^{m-q}$ les changements de cartes $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ sont de la forme
$(x, y) \longmapsto (g_{ji}(x), h_{ji}(x, y))$.

Les applications $k_i = p_1 \circ \varphi_i : U_i \to R^q$ sont les applications distinguées de $\mathcal{F}$. Ce sont des submersions, et leur donnée (compte tenu des relations $k_j = g_{ji} \circ k_i$) caractérise le feuilletage $\mathcal{F}$.

La topologie des feuilles de $\mathcal{F}$ est la topologie la moins fine sur M rendant continues les applications distinguées k_i lorsqu'on munit R^q de la topologie discrète. Elle est localement connexe et plus fine que la topologie initiale de M. Ses composantes connexes, qui sont des variétés paracompactes de dimension $m-q$, sont les feuilles de $\mathcal{F}$.

On peut munir chaque feuille F de $\mathcal{F}$ d'une structure différentiable pour laquelle l'injection de F dans M est une immersion, et telle que les

(*) On dit ici différentiable pour indéfiniment différentiable.

plans tangents aux feuilles définissent un champ différentiable de $(m-q)$-plans sur M (ou de façon équivalente un sous-fibré de dimension $m-q$ du fibré tangent à M). Ce champ est intégrable et admet pour variétés intégrales maximales les feuilles de $\mathcal{F}$.

Inversement un champ différentiable σ de $(m-q)$-plans tangents à M détermine s'il est intégrable un feuilletage de codimension q de M dont les feuilles sont des variétés intégrales de σ (théorème de Frobenius).

La donnée d'un feuilletage de dimension q de M est donc équivalente à celle d'un champ intégrable de q-plans tangents à M. Il est par suite naturel de poser le problème suivant [11] :

Problème 1.- <u>L'existence d'un champ de q-plans tangents à M suffit-elle pour assurer l'existence d'un feuilletage de dimension q de M ?</u>

Ou plus précisément encore [5] :

Problème 2.- <u>Tout champ de q-plans tangents à M est-il homotope à un champ intégrable ?</u>

La réponse à ces deux questions est évidemment positive pour $q = 1$; on verra (§ 5, prop. 1) qu'elle peut être négative pour $q > 1$.

Remarque 1.- La donnée d'un feuilletage de codimension q de M est aussi équivalente à celle d'un système de Pfaff de rang q intégrable sur M.

En particulier une forme de Pfaff ω sur M sans zéro et telle que $\omega \wedge d\omega = 0$ définit un feuilletage de codimension 1 de M.

Remarque 2.- Dans le cas de la codimension 1 on étendra la notion de feuilletage aux variétés à bord de la façon suivante :

soit $h : \partial M \times]-1, 0] \to M$ un "voisinage collier" du bord de M (i.e.

un difféomorphisme h de $\partial M \times]-1\,,0]$ sur un voisinage ouvert de ∂M tel que $h(x\,,0) = x$ pour tout $x \in \partial M$). Un champ différentiable de $(m-1)$-plans tangents à M détermine un feuilletage de codimension 1 de M s'il se prolonge en un champ intégrable sur la variété (sans bord) $N = M \cup_h (\partial M \times]-1\,,+1[)$ admettant les sous-variétés $\partial M \times \{t\}$, $t \geq 0$, pour variétés intégrales.

2. Quelques constructions classiques.

a) Image inverse d'un feuilletage.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension q d'une variété différentiable M défini par une famille d'applications distinguées $k_i : U_i \to R^q$. Soit f une application différentiable d'une variété V dans M transverse à $\mathcal{F}$ (i.e. transverse à chaque feuille de $\mathcal{F}$). Dans ces conditions les submersions $k_i \circ f : f^{-1}(U_i) \to R^q$ définissent un feuilletage $f^*\mathcal{F}$ de codimension q de V .

On appliquera par exemple cette construction lorsque f est l'injection d'un ouvert V de M dans M ; ou plus généralement lorsque f est une submersion d'une variété V dans M .

En particulier une submersion de V dans M (munie du feuilletage trivial de dimension 0) définit un feuilletage de codimension m de V .

b) Feuilletage transverse à une fibration ([3]).

Soient M et N deux variétés différentiables sans bord, et soit α une représentation du groupe fondamental $\pi_1(M)$ dans le groupe des difféomorphismes de N . Le fibré $\pi : E \to M$ de fibre N associé par α au revêtement universel $p : \widetilde{M} \to M$ de M s'obtient en quotientant le produit $\widetilde{M} \times N$ par l'action $(x\,,y) \longmapsto (cx\,,\alpha(c)y)$ de $\pi_1(M)$.

Le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\tilde{M} \times N$ défini par la projection sur N est invariant par cette action. Il induit donc un feuilletage $\mathcal{F}$ de E dont chaque feuille est transverse à chaque fibre $\pi^{-1}(x)$, $x \in M$.

c) Feuilletages de variétés produit.

PROPOSITION 1.- Soit M une variété différentiable compacte à bord non vide. Il existe un feuilletage de codimension 1 de la variété produit $M \times S^1$.

Plus généralement d'ailleurs :

PROPOSITION 1'.- Soit M une variété différentiable compacte à bord non vide, et soit N une variété différentiable compacte sans bord sur laquelle il existe une forme de Pfaff fermée sans zéro. La variété produit $M \times N$ possède un feuilletage de codimension 1 .

Soient en effet α une forme de Pfaff fermée sans zéro sur N et f une fonction différentiable sur M ayant les propriétés suivantes :

(i) 0 est une valeur régulière de f ;

(ii) $f^{-1}(0) = \partial M$.

La forme de Pfaff $\omega = df + (\exp(\frac{-1}{f^2}))\alpha$ est sans zéro sur $M \times N$ et vérifie $\omega \wedge d\omega = 0$.

Remarque 3.- En particulier si N est fibrée sur S^1 il existe un feuilletage de codimension 1 de la variété produit $M \times N$.

En fait cette remarque n'est qu'une reformulation de la proposition 1'. En effet, l'existence d'une forme de Pfaff fermée sans zéro sur N entraîne que N est fibrée sur S^1 [13].

d) Recollement de feuilletages.

Soient M et M' deux variétés différentiables à bord non vide de même dimension, et soient h un difféomorphisme de ∂M sur $\partial M'$ et N la variété obtenue par recollement de M et M' au moyen de h. Si $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}'$) est un feuilletage de codimension 1 de M (resp. M') il existe un feuilletage de codimension 1 de N égal à $\mathcal{F}$ sur M et à $\mathcal{F}'$ sur M'.

e) Feuilletages des sphères .

Il n'existe pas de feuilletage de codimension 1 des sphères de dimensions paires.

Par contre la proposition 1 permet de construire un feuilletage de codimension 1 de la sphère S^3 par décomposition de S^3 en deux tores pleins $D^2 \times S^1$ et $S^1 \times D^2$ (recollés sur leurs bords par échange des méridiens et des parallèles) : c'est le feuilletage de Reeb de S^3 [11].

On pourrait être tenté de feuilleter de façon analogue les sphères S^{2n+1}, $n \geq 2$, au moyen des décompositions $S^{2n+1} = D^p \times S^q \cup S^{p-1} \times D^{q+1}$, $p+q=2n+1$. Ceci n'est pas possible pour $q > 1$; en effet il n'existe pas de feuilletage de codimension 1 d'une variété différentiable compacte dont le bord est simplement connexe (théorème de stabilité globale [11]). Pour $q = 1$ la proposition 1 permet de feuilleter $D^{2n} \times S^1$; mais pour $n \geq 2$ on ne sait pas construire directement de feuilletage de codimension 1 de $S^{2n-1} \times D^2$.

Depuis l'exemple de Reeb, datant de 1944, les seuls exemples connus de feuilletages de sphères (distincts des fibrations classiques) étaient ceux de S^3 obtenus aux moyens de variations diverses sur la construction de Reeb. Récemment H. B. Lawson Jr. a obtenu par une méthode très originale des feuilletages de codimension 1 des sphères de dimension $2^k + 3$, $k \geq 1$, [6], [12].

f) <u>Tourbillonnement en codimension</u> 1 ([5]).

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 d'une variété différentiable M et soit $c : S^1 \to M$ une transversale fermée de $\mathcal{F}$ (i.e. un plongement de S^1 dans M transverse à chaque feuille de $\mathcal{F}$). Si le fibré normal à c est trivial on peut trouver un voisinage ouvert U de $c(S^1)$ et un difféomorphisme h de U sur $S^1 \times R^{m-1}$ ayant les propriétés suivantes :

(i) $h(c(z)) = z$ pour tout $z \in S^1$;

(ii) sur l'ouvert U, $\mathcal{F}$ peut être défini par la forme de Pfaff $h^*(d\theta)$.

Soit f une fonction différentiable sur R^{m-1} ayant les propriétés suivantes :

(i) 0 est une valeur régulière de f ;

(ii) $f^{-1}(0) = S^{m-2}$;

(iii) $f(x) = 1$ pour $\|x\| \geq 2$.

La forme de Pfaff $\omega = df + ef(\exp(\frac{-1}{f^2}))d\theta$ sur $S^1 \times R^{m-1}$ est sans zéro intégrable et égale à $d\theta$ pour $\|x\| \geq 2$.

On peut donc obtenir un nouveau feuilletage $\mathcal{F}'$ de codimension 1 de M en remplaçant sur U $h^*(d\theta)$ par $h^*\omega$. Ce nouveau feuilletage a la sous-variété $h^{-1}(S^1 \times S^{m-2})$ pour feuille compacte, et détermine un feuilletage de la variété à bord $\overline{M - h^{-1}(S^1 \times D^{m-1})}$: $\mathcal{F}'$ est le feuilletage obtenu par tourbillonnement de $\mathcal{F}$ le long de c.

On peut faire une construction analogue dans le cas où le fibré normal à c n'est pas trivial.

3. Feuilletages des variétés ouvertes (A. Phillips [10]).

Soient V et N deux variétés différentiables, et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension q de N. Si E est un sous-fibré de dimension q de $T(N)$ supplémentaire du sous-fibré E' correspondant à $\mathcal{F}$, on désigne par

- $\mathrm{Trans}_{\mathcal{F}}(V, N)$ l'ensemble des applications différentiables de V dans N transverses à $\mathcal{F}$ muni de la topologie C^1 ;
- $\mathrm{Max}(T(V), E)$ l'ensemble des morphismes de rang maximum q de $T(V)$ dans E muni de la topologie C^0 ;
- Δ l'application continue de $\mathrm{Trans}_{\mathcal{F}}(V, N)$ dans $\mathrm{Max}(T(V), E)$ associant à $f : V \to N$ le composé de $f^T : T(V) \to T(N)$ avec la projection de $T(N)$ sur E parallèlement à E'.

Dans ces conditions Philipps [10] et Gromov [4] ont simultanément démontré le résultat suivant :

THÉORÈME 1.- Si V est une variété ouverte (i.e. sans bord et sans composante connexe compacte) l'application $\Delta : \mathrm{Trans}_{\mathcal{F}}(V, N) \to \mathrm{Max}(T(V), E)$ est une équivalence d'homotopie faible.

On va en déduire :

THÉORÈME 2 [10].- Soit M une variété différentiable ouverte et soit σ un champ de $(m-q)$-plans tangents à M. Si le fibré quotient E de $T(M)$ par le sous-fibré correspondant à σ est à groupe structural discret, σ est homotope à un champ intégrable.

Démonstration. Puisque le fibré quotient $p : E \to M$ est à groupe structural discret, il existe un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension q de E transverse à cette fibration (§ 2, b)), et admettant la section nulle, identifiée à M, pour feuille. Le fibré p^*E, considéré comme le sous-fibré de $T(E)$ tangent aux fibres de E, est de dimension q et supplémentaire du sous-fibré correspondant à $\mathcal{F}$. Sa restriction à M est isomorphe à E ; et par suite la projection de $T(M)$ sur E détermine un élément h_0 de $\mathrm{Max}(T(M), p^*E)$.

Il existe donc une homotopie h_t de h_0 dans $\mathrm{Max}(T(M), p^*E)$ et un élément f de $\mathrm{Trans}_{\mathcal{F}}(M, E)$ tels que $h_1 = \Delta(f)$. Les noyaux σ_t de h_t définissent alors une homotopie de σ au champ σ_1 des $(m-q)$-plans tangents aux feuilles du feuilletage $f^*\mathcal{F}$. C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1.- Sur une variété ouverte de dimension m tout champ de $(m-1)$-plans tangents est homotope à un champ intégrable.

COROLLAIRE 2.- Toute variété ouverte possède un feuilletage de codimension 1.

En effet sur une variété ouverte il existe un champ de vecteurs sans zéro.

Pour les variétés ouvertes et en codimension 1 les réponses aux problèmes 1 et 2 sont donc positives.

4. Feuilletages des variétés fermées de dimension 3.

THÉORÈME 3.- Toute variété fermée (i.e. compacte sans bord) de dimension 3 possède un feuilletage de codimension 1.

Ce résultat est dû indépendamment à Lickorish [9], et à Novikov et Zieschang (non publié) dans le cas orientable, à Wood [15] dans le cas non orientable.

Sa démonstration utilise le théorème de structure suivant des variétés fermées de dimension 3, dans lequel E désigne le produit $S^1 \times S^2$ et E' le fibré non trivial de fibre S^2 sur S^1 obtenu en identifiant les point $(0, x)$ et $(1, -x)$ dans le produit $I \times S^2$ [7], [8], [14].

THÉORÈME 4.- Soit M une variété fermée de dimension 3 orientable (resp. non orientable). Il existe

- une famille $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ de plongements deux à deux disjoints du tore plein $S^1 \times D^2$ dans M,
- une famille $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$ de plongements deux à deux disjoints du tore plein $S^1 \times D^2$ dans E (resp. E'),

telles que les sous-variétés à bords $\overline{M - \cup \varphi_i(S^1 \times D^2)}$ et $\overline{E - \cup \psi_i(S^1 \times D^2)}$ (resp. $\overline{E' - \cup \psi_i(S^1 \times D^2)}$) soient difféomorphes.

On peut montrer de plus [15] :

Complément au théorème 4.- Les plongements ψ_i peuvent être choisis de façon que leurs restrictions à $S^1 \times \{0\}$ soient transverses au feuilletage de E (resp. E') défini par la projection sur S^1.

Dans ces conditions le tourbillonnement de ce feuilletage le long de ces transversales (§ 2, f)) détermine un feuilletage de la variété à bord $\overline{M - \cup \varphi_i(S^1 \times D^2)}$; et on peut prolonger ce feuilletage à M en le recollant aux feuilletages des tores pleins $\varphi_i(S^1 \times D^2)$ obtenus grâce à la proposition 1.

Remarque 4.- Dans [15] Wood montre de plus que sur une variété fermée de dimension 3 tout champ de plans transversalement orientable (i.e. possédant un champ de vecteurs supplémentaire ; ou encore, pouvant être défini par une forme de Pfaff sans zéro) est homotope à un champ intégrable (cf. problème 2).

5. L'obstruction à l'intégrabilité de Bott ([1]).

Soit σ un champ de $(m-q)$-plans tangents à une variété différentiable M, et soit E le fibré de dimension q sur M quotient de $T(M)$ par le sous-fibré correspondant à σ.

On désigne par $\mathrm{Pont}^k(E)$ la partie homogène de degré k de la sous-algèbre de $H^*(M, \mathbb{R})$ engendrée par les classes de Pontrjagin $p_i(E)$, $0 \leq i \leq [\frac{q}{2}]$, de E. En particulier si q est pair le carré de la classe d'Euler $\chi(E)$ de E est dans $\mathrm{Pont}^{2q}(E)$.

Si σ est le champ de plans défini par une submersion f de M sur une variété différentiable N de dimension q, le fibré E est isomorphe au fibré $f^*(T(N))$; et on a évidemment $\mathrm{Pont}^k(E) = 0$ pour $k > q$. Plus généralement Bott a obtenu le résultat suivant, qui pour la première fois donne une obstruction homologique à l'intégrabilité d'un champ de plans :

THÉORÈME 5.- *Si* σ *est un champ intégrable de* $(m-q)$-*plans on a* $\mathrm{Pont}^k(E) = 0$ *pour* $k > 2q$

COROLLAIRE 3.- *Si* σ *est homotope à un champ intégrable on a* $\mathrm{Pont}^k(E) = 0$ *pour* $k > 2q$.

COROLLAIRE 4.- *Si* q *est pair, et si* σ *est homotope à un champ intégrable, on a* $\chi(E)^4 = 0$.

La démonstration du théorème 5, qui utilise la construction de Chern et Weil des classes de Chern, fera l'objet des deux paragraphes suivants.

PROPOSITION 1.- *Il existe sur l'espace projectif complexe* $\mathbb{P}\mathbb{C}_{2n+1}$ *des champs de* $4n$-*plans tangents ; mais pour* $n > 2$ *aucun de ces champs n'est intégrable.*

Démonstration. L'espace projectif complexe $\mathbb{P}\mathbb{C}_{2n+1}$ est fibré en sphères S^2 sur l'espace projectif quaternionnien $\mathbb{P}\mathbb{H}_n$. Il existe donc sur $\mathbb{P}\mathbb{C}_{2n+1}$ des champs de 4n-plans tangents.

Mais si E est un fibré quotient de dimension 2 de $T(\mathbb{P}\mathbb{C}_{2n+1})$ la classe d'Euler $\chi(E) \in H^2(\mathbb{P}\mathbb{C}_{2n+1}, \mathbb{R})$ de E est non nulle (si E' est le noyau de la projection de $T(\mathbb{P}\mathbb{C}_{2n+1})$ sur E on a $\chi(E)\chi(E') = 2n+2$) ; et par suite, si n est au moins égal à 3, $\chi(E)^4$ est aussi non nulle. C.Q.F.D.

Remarque 5.- On peut développer, à la façon du paragraphe 1, une notion de feuilletage holomorphe d'une variété analytique complexe M_m. Pour un champ de plans holomorphe (de dimension complexe $m-q$) σ sur M le théorème 5 devient alors :

si σ est intégrable on a $\mathrm{Chern}^k(E) = 0$ pour $k > 2q$ (où $\mathrm{Chern}^k(E)$ désigne la partie homogène de degré k de la sous-algèbre de $H^*(M, \mathbb{C})$ engendrée par les classes de Chern $c_i(E)$, $0 \leq i \leq q$, de E).

En particulier si M possède un champ de vecteurs holomorphe sans zéro tous les nombres de Chern de M sont nuls [1].

6. Classes de Chern et connexions ([2]).

Soit E un fibré vectoriel complexe de dimension q sur M. Pour tout ouvert U de M on désigne par $\Lambda^p(U, \mathbb{C})$ le module des formes différentielles de degré p à valeurs complexes sur U, et par $\Gamma(U)$ le module des sections de E au-dessus de U.

Une connexion sur E est déterminée par une application $\mathbb{C}$-linéaire $D : \Gamma(E) \to \Lambda^1(M, \mathbb{C}) \otimes_{\Lambda^0(M, \mathbb{C})} \Gamma(E)$ telle que $D(fs) = (df)s + fD(s)$ (on omet ici de noter le signe $\otimes$).

Soit U (resp. V) un ouvert de M sur lequel il existe des sections $s_1^U, \dots, s_q^U$ (resp. $s_1^V, \dots, s_q^V$) de E définissant une trivialisation de $E|_U$ (resp. $E|_V$). On peut écrire $D(s_i^U) = \sum_j \theta_{ij}^U s_j^U$, $\theta_{ij}^U \in \Lambda^1(U, \mathbf{C})$ (resp. $D(s_i^V) = \sum_j \theta_{ij}^V s_j^V$, $\theta_{ij}^V \in \Lambda^1(V, \mathbf{C})$).

Si $U \cap V$ est non vide il existe une application différentiable $\gamma^{VU} = (\gamma_{ij}^{VU})$ de $U \cap V$ dans $G\ell(q, \mathbf{C})$ telle que $s_i^V = \sum_j \gamma_{ij}^{VU} s_j^U$. On en déduit

$$\sum_j \theta_{ij}^V \gamma_{jk}^{VU} = d\gamma_{ik}^{VU} + \sum_j \gamma_{ij}^{VU} \theta_{jk}^U .$$

Soit $\Omega_{ij}^U = d\theta_{ij}^U - \sum_k \theta_{ik}^U \wedge \theta_{kj}^U$ (resp. $\Omega_{ij}^V = d\theta_{ij}^V - \sum_k \theta_{ik}^V \wedge \theta_{kj}^V$). Sur $U \cap V$ on a $\sum_j \Omega_{ij}^V \gamma_{jk}^{VU} = \sum_j \gamma_{ij}^{VU} \Omega_{jk}^U$. Ou encore en termes de matrices $q \times q$ sur l'algèbre <u>commutative</u> $\sum_{p \geq 0} \Lambda^{2p}(U \cap V, \mathbf{C})$, $\Omega^V \gamma^{VU} = \gamma^{VU} \Omega^U$; et par conséquent

$$\det\left(1 + \frac{i}{2\pi}\Omega^U\right) = \det\left(1 + \frac{i}{2\pi}\Omega^V\right) \qquad \text{sur } U \cap V .$$

Au moyen d'un atlas de E on peut donc construire une forme différentielle $c(E, D) \in \sum_{p \geq 0} \Lambda^{2p}(M, \mathbf{C})$ qui, avec les notations précédentes, est égale à $\det\left(1 + \frac{i}{2\pi} \Omega^U\right)$ sur l'ouvert U. On a alors :

THÉORÈME 6.- <u>La forme différentielle</u> $c(E, D)$ <u>est fermée</u> ; <u>et sa classe de cohomologie</u> $c(E)$ <u>dans</u> $H^*(M, \mathbf{C})$ <u>est indépendante de la connexion</u> D .

THÉORÈME 7.- <u>La classe de cohomologie</u> $c(E)$ <u>est la classe totale de Chern du fibré</u> E .

7. Démonstration du théorème 5.

Si le champ σ est intégrable le feuilletage $\mathcal{F}$ correspondant peut être défini par une famille d'applications distinguées $k^U : U \to \mathbf{R}^q$ et de fonctions de transition $g^{VU} : k^U(U \cap V) \to k^V(U \cap V)$ vérifiant $k^V = g^{VU} \circ k^U$ (§ 1).

Le fibré quotient E est alors caractérisé par le cocycle $\gamma^{VU} : x \mapsto (g^{VU})^T_{k^U(x)}$. Par conséquent, pour tout ouvert W de M, l'idéal $A(W)$ de $\Lambda(W, \mathbf{C}) = \sum\limits_{p \geq 0} \Lambda^p(W, \mathbf{C})$ engendré par les formes de Pfaff qui proviennent d'une section sur W du fibré dual E^* de E possède la propriété suivante :

quelles que soient les $q+1$ formes $\alpha_1, \dots, \alpha_{q+1}$ dans $A(W)$, on a $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{q+1} = 0$ (pour un ouvert distingué U l'idéal $A(U)$ est engendré par les formes de Pfaff $(k^U)^*(dx_i)$, $i = 1, \dots, q$).

Soit (λ^U) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de M par les ouverts distingués de $\mathcal{F}$. Si E^C est le fibré complexifié de E, on désigne par D^U la connexion sur $E^C|_U$, image inverse par k^U de la connexion triviale sur $\mathbf{R}^q$, et par D la connexion $\sum\limits_U \lambda^U D^U$ sur E^C.

Si on désigne par $s_1^U, \dots, s_q^U$ les sections de E^C au-dessus de l'ouvert distingué U associées (par k^U) à la trivialisation canonique de $T(\mathbf{R}^q)$, on a :

$$\begin{aligned} D(s_i^U) &= \sum_V \lambda^V D^V(s_i^U) = \sum_{V,j} \lambda^V D^V(\gamma_{ij}^{UV} s_j^V) \\ &= \sum_{V,j} \lambda^V (d\gamma_{ij}^{UV}) s_j^V \\ &= \sum_{V,jk} \lambda^V (d\gamma_{ij}^{UV}) \gamma_{jk}^{VU} s_k^U . \end{aligned}$$

Les formes différentielles $\theta_{ij}^U = \sum_{V,k} \lambda^V (d\gamma_{ik}^{UV}) \gamma_{kj}^{VU}$ et $\Omega_{ij}^U = d\theta_{ij}^U - \sum_k \theta_{ik}^U \wedge \theta_{kj}^U$ sont donc dans $A(U)$. On en déduit $\mathrm{Pont}^k(E) = \mathrm{Chern}^k(E^C) = 0$ pour $k > 2q$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BOTT - On a topological obstruction to integrability, Proc. Symp. Pure Math., Vol. XVI, p. 127-132.

[2] R. BOTT and S. S. CHERN - Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections, Acta Math., 114 (1965), p. 71-112.

[3] C. EHRESMANN - Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, Colloque de Topologie de Bruxelles, C.B.R.M., 1950, p. 29-55.

[4] M. L. GROMOV - Izv. Akad. Nauk C.C.C.P., 33, 1969, p. 707-734.

[5] A. HAEFLIGER - Variétés feuilletées, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 16 (1964), p. 367-397.

[6] H. B. LAWSON Jr. - Codimension one foliations of spheres, à paraître.

[7] W. B. R. LICKORISH - A representation of orientable combinatorial 3-manifolds, Ann. of Math., 76 (1962), p. 531-540.

[8] W. B. R. LICKORISH - Homeomorphisms of non orientable two manifolds, Proc. Cambr. Phil. Soc., 59 (1963), p. 307-317.

[9] W. B. R. LICKORISH - A foliation for 3-manifolds, Ann. of Math., 82 (1965), p. 414-420.

[10] A. PHILLIPS - Smooth maps transverse to a foliation, à paraître.

[11] G. REEB - Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Act. Sc. et Ind., Hermann, Paris, 1952.

[12] H. ROSENBERG - Feuilletages sur des sphères [d'après H. Lawson], Sém. Bourbaki, exposé n° 393, février 1971.

[13] D. TISCHLER - On fibering certain foliated manifolds over S^1, Topology, 9(1970), p. 153-154.

[14] A. H. WALLACE - Modifications and cobounding manifolds, Can. J. Math., 12 (1960), p. 503-528.

[15] J. W. WOOD - Foliations on 3-manifolds, Ann. of Math., 89 (1969), p. 336-358.