

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-PIERRE SCHREIBER

Nombres de Pisot et travaux d'Yves Meyer

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 379, p. 269-279

http://www.numdam.org/item?id=SB_1969-1970__12__269_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOMBRES DE PISOT ET TRAVAUX D'YVES MEYER

par Jean-Pierre SCHREIBER

Pour tout réel θ supérieur à 2, l'ensemble E_θ des sommes $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \theta^{-k}$,

où ε_k prend les valeurs 0 ou 1, est un compact du type ensemble de Cantor.

Ces ensembles ont été très étudiés en analyse de Fourier (cf. [1]), et on sait que la nature algébrique du nombre θ joue un rôle important dans certains problèmes : par exemple R. Salem et A. Zygmund ([9]) ont achevé de montrer, en 1955, qu'une condition nécessaire et suffisante pour que E_θ ne porte aucune mesure dont la transformée de Fourier s'annule à l'infini est que θ soit un nombre de Pisot (voir [1], chap. V et VI et [9]).

En 1956, Carl Herz a montré que, si $\theta = 3$, E_θ est un ensemble de synthèse spectrale, (cf. [10], p. 166). Le même résultat est vrai si θ est un nombre de Pisot. Pour le montrer, Yves Meyer a récemment introduit un type d'ensembles sur $\mathbb{R}$, les modèles, que nous allons décrire succinctement.

§ 0. Quelques définitions et notations.

- Un nombre de Pisot (resp. de Pisot ou de Salem) est un entier algébrique réel, de module strictement supérieur à 1 et dont les conjugués sur $\mathbb{Q}$ sont de module strictement inférieur à 1 (resp. inférieur ou égal à 1).

- On désigne par $A(\mathbb{R})$ l'algèbre des transformées de Fourier des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, et on pose $\|f\|_{A(\mathbb{R})} = \|\hat{f}\|_{(L^1(\mathbb{R}))}$, où $\hat{f}$ désigne, comme toujours

dans la suite, la transformée de Fourier de f . Pour un fermé E de $\mathbb{R}$, $A(E)$ est l'algèbre des restrictions à E des fonctions de $A(\mathbb{R})$, munie de la norme quotient.

- Une pseudo-mesure S est une distribution dont la transformée de Fourier $\hat{S}$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$. On note $PM(E)$ l'espace des pseudo-mesures portées par le fermé E et $PM_0(E)$ l'espace des pseudo-mesures à support compact dans E . Selon un usage commode, on notera $\int f(t) dS(t)$ la valeur de la pseudo-mesure S appliquée à la fonction f de $A(\mathbb{R})$.

§ 1. La notion de modèle dans $\mathbb{R}$.

Soit n un entier supérieur à 1 et, dans le produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, soit D un sous-groupe fermé isomorphe à $\mathbb{Z}^n$, dont la projection sur $\mathbb{R}$, $\pi(D)$, est dense dans $\mathbb{R}$ et dont la projection sur $\mathbb{R}^{n-1}$, $\pi'(D)$, est dense dans $\mathbb{R}^{n-1}$.

DÉFINITION.- Pour tout ensemble K relativement compact de $\mathbb{R}^{n-1}$, on désigne par Λ^K l'ensemble des projections $\pi(d)$, sur $\mathbb{R}$, des points d de D dont la projection $\pi'(d)$, sur $\mathbb{R}^{n-1}$, appartient à K .

Un ensemble tel que Λ^K , (défini par la donnée de n , D et K), s'appelle un modèle.

PROPOSITION 1 (simple exercice de topologie générale).- a) On a

$$\delta = \inf \{ |\lambda - \lambda'| ; \lambda \in \Lambda^K, \lambda' \in \Lambda^K, \lambda \neq \lambda' \} > 0.$$

On dira que δ est le pas du modèle Λ^K .

b) Si K est d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^{n-1}$, il existe un réel $\ell > 0$, tel que $\Lambda^K + [0, \ell] = \mathbb{R}$. C'est-à-dire que Λ^K est alors relativement dense dans $\mathbb{R}$, au sens de Bohr.

Exemple.— Posons $\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\tilde{\theta} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, et soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$. L'ensemble des réels de la forme $m + n\theta$, où m et n sont des entiers relatifs assujétis à la condition $m + n\tilde{\theta} \in I$ est un modèle.

Généralisons un peu cet exemple :

§ 2. Nombres de Pisot et modèles.

Soit θ un entier algébrique réel de degré n , soient $\theta_2, \dots, \theta_r$ ses conjugués réels et $\theta_{r+1}, \bar{\theta}_{r+1}, \dots, \theta_{r+s}, \bar{\theta}_{r+s}$, ses conjugués complexes, deux à deux complexes conjugués ($n = r + 2s$). Pour tout entier $k \geq 0$, considérons les éléments δ_k de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$

$$\delta_k = (\theta^k, (\theta_2^k, \dots, \theta_r^k, \operatorname{Re} \theta_{r+1}^k, \operatorname{Im} \theta_{r+1}^k, \dots, \operatorname{Re} \theta_{r+s}^k, \operatorname{Im} \theta_{r+s}^k)).$$

($\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$ désignent les parties réelles et imaginaires de z .)

Les éléments $\delta_0, \dots, \delta_{n-1}$, forment un système de n vecteurs indépendants dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ et donc engendrent un groupe libre D isomorphe à $\mathbb{Z}^n$. On vérifie que les projections de D sur $\mathbb{R}$, $\pi(D)$, et de D sur $\mathbb{R}^{n-1}$, $\pi'(D)$, sont denses.

THÉOREME 1.— a) Si θ est un nombre de Pisot ou de Salem ($|\theta| > 1$ et $|\theta_j| \leq 1$ pour $2 \leq j \leq r + s$), l'ensemble $\{\theta^k\}_{k \geq 0}$ est un modèle.

b) Si θ est un nombre de Pisot ($|\theta| > 1$ et $|\theta_j| < 1$ pour $2 \leq j \leq r + s$), l'ensemble des sommes finies $\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^k$, où ε_k vaut 0 ou 1, est un modèle.

Pour a), du fait que pour tout j , $2 \leq j \leq r + s$, les suites $\{\theta_j^k\}_{k \geq 0}$ satisfont la même relation de récurrence linéaire à coefficients entiers que la suite $\{\theta^k\}_{k \geq 0}$, on déduit que θ^k est la projection sur $\mathbb{R}$ du point δ_k . Or, la projection de δ_k sur $\mathbb{R}^{n-1}$ a toutes ses coordonnées inférieures ou égales à 1 en module, et donc est dans un compact fixe.

De même pour b), puisque si θ est de Pisot $|\sum_{k \geq 0} \epsilon_k \theta_j^k| \leq \frac{1}{1 - |\theta_j|}$.

§ 3. Une formule de Poisson avec reste et quelques conséquences.

La formule de Poisson dit que la mesure portée par $\mathbb{Z}$ et donnant la masse 1 à tout point de $\mathbb{Z}$ (mesure de Haar de $\mathbb{Z}$) a pour transformée de Fourier une mesure, qui lui est d'ailleurs proportionnelle. Nous allons voir que si Λ^K est un modèle et si m est la mesure portée par Λ^K et donnant à chaque point de Λ^K la masse 1, on peut trouver (proposition 2) des mesures α petites en un certain sens (proposition 3), telles que $m + \alpha$ soit portée par un modèle et ait pour transformée de Fourier, (au sens des distributions tempérées), une mesure.

Soit V un voisinage compact de l'adhérence de K dans $\mathbb{R}^{n-1}$. Soit φ une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{n-1}$, à support dans V , valant 1 sur K . Soit enfin μ la mesure portée par $\pi(D)$ et définie par

$$\mu(\pi(d)) = \varphi(\pi'(d)), \quad \text{pour tout } d \text{ dans } D.$$

PROPOSITION 2 ([6], théorème 7, p. 29).- La transformée de Fourier de μ est une mesure $\hat{\mu}$, qui vérifie la condition :

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} d|\hat{\mu}|(t) < \infty.$$

Remarquons d'abord que, dans le groupe $\hat{R} \times \widehat{R^{n-1}}$, dual de $R \times R^{n-1}$ (et isomorphe à $R \times R^{n-1}$), l'orthogonal de D ([9], déf. 2.2.1), $D^\perp$ vérifie les mêmes propriétés que D : isomorphe à $\mathbb{Z}^n$ et de projections denses. On sait, d'autre part, que la transformée de Fourier de la mesure de Haar, ν , de D est (à un facteur de normalisation près) la mesure de Haar de $D^\perp$; (si on veut, c'est la formule de Poisson pour D).

Désignant alors par $\tilde{\varphi}$ la fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ par $\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi(y)$, pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout y de $\mathbb{R}^{n-1}$, on calcule aisément $\hat{\mu}$ à partir de la transformée de Fourier de $\tilde{\varphi} \cdot \nu$. C'est la décroissance rapide de $\hat{\varphi}$ qui donne la propriété $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} d|\hat{\mu}|(t) < \infty$.

En écrivant $\mu = m + \alpha$, on peut préciser en quel sens la mesure α peut être, en certains cas, considérée comme petite :

PROPOSITION 3.- Si K est un compact dont la frontière est de mesure nulle (pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^{n-1}$), à tout ε positif, on peut associer un voisinage V de K et une fonction φ (notations de la proposition 2) de manière que

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T d|\alpha|(t) < \varepsilon.$$

Ce raffinement résulte de ce qu'on peut majorer la densité supérieure d'un modèle Λ^U par une constante fois la mesure de Lebesgue de l'adhérence de U ([6], lemme, p. 31) :

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{\text{card}\{[-T, T] \cap \Lambda^U\}}{T} \leq C \text{ mes } U.$$

On peut déduire de cette proposition des résultats concernant la répartition uniforme modulo a de certaines suites d'entiers ([6], [7]), dont nous ne citerons que le plus spectaculaire. :

THÉORÈME 2 ([6], théorème 9, p. 35).- Si K est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, contenu dans $\mathbb{R}$, de dimension finie ou dénombrable sur $\mathbb{Q}$, il existe une suite d'entiers $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ telle que pour tout x réel les deux conditions suivantes soient équivalentes :

- a) $(x\lambda_k)_{k \geq 1}$ est une suite équi-répartie modulo 1 .
- b) x n'appartient pas à K .

Voyons plutôt une application de la proposition 1 à l'analyse de Fourier.

DÉFINITION.- On appellera pas intérieur du modèle Λ^K , la borne supérieure des pas des modèles Λ^V , prise sur l'ensemble des voisinages compacts V de $\bar{K}$.

THÉOREME 3.- Si Λ^K est un modèle et ℓ un nombre positif strictement inférieur au pas intérieur de Λ^K , il existe une constante C et une constante C' telles que si S est une pseudo-mesure à support compact dans $\Lambda^K + [0, \ell]$, la mesure T , portée par Λ^K et définie par $T(\{\lambda\}) = \int_{\lambda + [0, \ell]} dS(t)$ vérifie

- 1) $\|\hat{T}\|_{\infty} \leq C \|\hat{S}\|_{\infty}$;
- 2) $\forall \xi \in \mathbb{R}, |\hat{T}(\xi) - \hat{S}(\xi)| \leq C |\xi| \|\hat{S}\|_{\infty}$.

En effet, soit V un voisinage compact de l'adhérence de K tel que le pas de Λ^V soit strictement supérieur à ℓ : soit $\ell + 2a$ ce pas. Comme pour la proposition 2, on peut alors construire une mesure μ portée par Λ^V et donnant la masse 1 à chaque point de Λ^K . Soit aussi h une fonction indéfiniment dérivable réelle, à support dans $]-a, a + \ell[$, et valant 1 sur un voisinage de $[0, \ell]$.

On peut alors écrire $S = (h * \mu).S$, puisque $h * \mu$ vaut 1 sur un voisinage du support de S . Mais on peut aussi écrire, par définition de T :

$$T = (\check{h} * S) \cdot \mu, \quad \text{avec } \check{h}(x) = h(-x).$$

On a donc, d'une part

$$\hat{T}(\xi) = \int (\check{h} \cdot \hat{S})(\xi - t) d\hat{\mu}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} (\check{h} \cdot \hat{S})(\xi - t) d\hat{\mu}(t),$$

d'où

$$|\hat{T}(\xi)| \leq \|\hat{S}\|_{\infty} \left(\sup_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} d|\hat{\mu}|(t) \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sup_{\xi - (n+1) \leq t \leq \xi - n} |\hat{h}(t)|,$$

donc $|\hat{T}(\xi)| \leq C \|\hat{S}\|_{\infty}$ puisque $\hat{h}$ est à décroissance rapide.

D'autre part,

$$\hat{T}(\xi) - \hat{S}(\xi) = \int \hat{S}(\xi - t)(\tilde{h}(\xi - t) - \hat{h}(t)) d\hat{\mu}(t),$$

soit

$$|\hat{T}(\xi) - \hat{S}(\xi)| \leq \|\hat{S}\|_{\infty} \left(\sup_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} d|\hat{\mu}|(t) \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sup_{n \leq t \leq n+1} |\hat{h}(t - \xi) - \hat{h}(t)|;$$

ce qui, du fait que $\hat{h}$ a une dérivée à décroissance rapide, est majoré par $C'|\xi| \|\hat{S}\|_{\infty}$.

Un énoncé dual du théorème 3 est le suivant :

THÉORÈME 4.- Λ^K , ℓ et C étant définis comme au théorème 3, à toute fonction f de $A(\mathbb{R})$, on peut associer une fonction $\tilde{f}$ de $A(\mathbb{R})$ telle que

1) si $\lambda \in \Lambda^K$ et $0 \leq x \leq \ell$, on ait $\tilde{f}(\lambda + x) = f(\lambda)$.

2) $\|\tilde{f}\|_{A(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{A(\mathbb{R})}$.

Cela peut se démontrer directement en posant $\tilde{f} = h * (f \cdot \mu)$.

§ 4. Application à la synthèse spectrale.

THÉORÈME 5.- Soient θ un nombre de Pisot supérieur à 2 et E_{θ} l'ensemble des sommes infinies $\sum_{k \geq 1} \epsilon_k \theta^{-k}$ ($\epsilon_k = 0$ ou 1). Il existe une suite $(T_p)_{p \geq 1}$

d'endomorphismes de $PM(E_{\theta})$, et une constante C telles que

1) $\forall S \in PM(E_{\theta})$, $T_p(S)$ est une mesure à support fini.

2) $\|\widehat{T_p(S)}\|_{\infty} \leq C\|\hat{S}\|_{\infty}$.

3) $\widehat{T_p(S)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \hat{S}$, uniformément sur tout compact.

Ce théorème donne pour E_{θ} une forme forte de la propriété de synthèse spectrale (voir les définitions dans [1], chap. IX).

Soient, pour tout $p \geq 1$, Λ_p l'ensemble des sommes $\sum_{k=0}^{p-1} \epsilon_k \theta^k$ et Λ la

réunion des Λ_p . On a, pour tout p , $\theta^p E = \Lambda_p + E_\theta$. Le théorème 5 sera une conséquence du suivant :

THÉORÈME 6.— Soit $PM_O(\Lambda + E_\theta)$ l'espace des pseudo-mesures à support compact dans $\Lambda + E_\theta$. Il existe un ensemble fini F dans E_θ , des constantes C et C' et un endomorphisme T de $PM_O(\Lambda + E_\theta)$ tels que :

- 1) Si $S \in PM_O(\Lambda + E_\theta)$, $T(S)$ est une mesure portée par $\Lambda + F$; ($\lambda \in \Lambda$).
- 2) $\|\widehat{T(S)}\|_\infty \leq C \|\widehat{S}\|_\infty$.
- 3) $|\widehat{T(S)}(\xi) - \widehat{S}(\xi)| \leq C' \|\widehat{S}\|_\infty |\xi|$.

Pour déduire le théorème 5 du théorème 6, appelons $\tau_p(S)$ l'image de la pseudo-mesure S par l'homothétie sur R de rapport θ^p ; autrement dit

$\tau_p S(x) = S(\theta^{-p}x)$. Partant de l'endomorphisme T donné par le théorème 6 et posant $T_p = \tau_p^{-1} \circ T \circ \tau_p$, on vérifie (grâce à la condition 1) du théorème 6) que T_p est un endomorphisme de $PM(E_\theta)$. Les conditions 1), 2), 3) du théorème 5 sont alors des conséquences immédiates des conditions 1), 2), 3) du théorème 6.

Le théorème 6 utilise seulement le fait que si θ est un nombre de Pisot, Λ est un modèle. On peut d'ailleurs l'énoncer, tel quel, avec pour Λ un modèle quelconque et pour E_θ un compact quelconque de R .

Donnons le schéma de la démonstration ([7]).

a) Dans le cas où le pas intérieur δ de Λ est strictement supérieur au diamètre ℓ de E_θ , on peut prendre pour F l'ensemble réduit à 0 et définir, pour tout S de $PM_O(\Lambda + E_\theta)$, $T(S)$ comme la mesure portée par Λ et définie par $T(S)(\{\lambda\}) = \int_{\Lambda + E_\theta} dS(t)$. Le théorème 6 se réduit alors au théorème 3.

b) Dans le cas général, on se ramène au cas précédent en remplaçant le modèle Λ par des modèles Λ_i dont la réunion contient Λ et tels que chaque Λ_i ait un pas

intérieur supérieur à ℓ . La technique de cette décomposition est assez délicate : il s'avère nécessaire de découper aussi E_0 en morceaux et d'introduire un ensemble fini F pour faire porter la mesure $\underline{T}(S)$ par $\Lambda + F$.

§ 5. Modèles et ensembles harmonieux.

Si G est un groupe localement compact abélien, on appelle caractère faible sur G un homomorphisme non nécessairement continu de G dans le groupe T des nombres complexes de module 1. Pour bien distinguer, on appellera caractères forts les caractères continus.

DÉFINITION.- Un ensemble Λ de G est dit harmonieux si tout caractère faible de G est limite uniforme sur Λ de caractères forts ([5], chap. I).

On a alors le théorème :

THÉORÈME 7.- Tout modèle Λ^K de R est un ensemble harmonieux de R .

La restriction à Λ^K d'un caractère faible sur R est déterminée par la donnée d'un caractère sur le groupe discret D , c'est-à-dire par un élément de $\hat{R} \times \hat{R}^{n-1}/D^\perp$ (voir notations au § 2). Le plongement canonique de $\hat{R}^{n-1}$ dans $\hat{R} \times \hat{R}^{n-1}/D^\perp$ associe donc à tout élément de $\hat{R}^{n-1}$ un caractère sur D . Soient $\varepsilon > 0$ et V_ε un voisinage de l'origine dans $\hat{R}^{n-1}$ tel que si $\chi \in V_\varepsilon$ et si $y \in K$, on ait $|\langle \chi, y \rangle - 1| < \varepsilon$; ($\langle \chi, y \rangle$ est la valeur au point y du caractère χ sur R^{n-1}). Comme $\hat{R} \times V_\varepsilon$ recouvre $\hat{R} \times \hat{R}^{n-1}$ modulo $D^\perp$, tout élément de $\hat{R} \times \hat{R}^{n-1}$ est somme d'un élément de V_ε et d'un élément de $\hat{R}$, modulo $D^\perp$. Donc tout caractère faible sur R est, sur Λ^K , somme d'un caractère fort et d'un caractère différent de l'unité de moins de ε sur Λ^K .

COROLLAIRE.- Si θ est un nombre de Pisot ou de Salem, l'ensemble des puissances $\{\theta^k\}_{k \geq 0}$ est un ensemble harmonieux.

Par une démonstration directe, on démontre la réciproque de ce corollaire.

THÉOREME 8 ([2]).- Si θ est un réel non nul, une condition nécessaire et suffisante pour que $\{\theta^k\}_{k \geq 0}$ soit harmonieux est que θ soit de Pisot ou de Salem.

Pour plus de propriétés des ensembles harmonieux nous renvoyons à [5] et [6].

Citons seulement, pour conclure un résultat bien remarquable :

THÉOREME 9.- Tout ensemble harmonieux et relativement dense de $\mathbb{R}$ (au sens de Bohr, cf. prop. 1, b)) est contenu dans un modèle ou dans un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$ (voir [5], chap. I, ou [6]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-P. KAHANE et R. SALEM - Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Hermann, Paris.
- [2] Y. MEYER - Une caractérisation des nombres de Pisot, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 266, p. 63-64, 8 janvier 1968.
- [3] Y. MEYER - Problème de l'unicité et de la synthèse en analyse harmonique, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 266, p. 275-276, 29 janvier 1968.
- [4] Y. MEYER - Nombres de Pisot et analyse harmonique, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 267, p. 196-198.
- [5] Y. MEYER - Les nombres de Pisot et l'analyse harmonique, Studia Mathematica, XXXIV, 1970, p. 127-147.
- [6] Y. MEYER - Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique, Cours Peccot 1969, Lecture Notes in Mathematics n° 117, Springer-Verlag, 1970.
- [7] Y. MEYER - Nombres algébriques et analyse harmonique, Annales Sci. de l'E.N.S., t. 3 (1970), fasc.1, p. 75-110 ; fasc. 2, p. 235-246.
- [8] R. SALEM - Algebraic numbers and Fourier analysis, Heath, 1963.
- [9] R. SALEM et A. ZYGMUND - Sur un théorème de Piatetĉki-Shapiro, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 240 (1955), p. 2040-2042 ; et Sur les ensembles parfaits dissymétriques à rapport constant, loc. cit., p. 2281-2283.
- [10] W. RUDIN - Fourier analysis on groups, Interscience publishers, New York-London, 1962.