

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

MICHEL RAYNAUD

Travaux récents de M. Artin

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 363, p. 279-295

http://www.numdam.org/item?id=SB_1968-1969__11__279_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TRAVAUX RÉCENTS DE M. ARTIN

par Michel RAYNAUD

En géométrie algébrique locale, comparée à la géométrie analytique locale, on manque d'un théorème des fonctions implicites et d'un théorème de passage au quotient par une "jolie" relation d'équivalence. Ces difficultés s'estompent si, au lieu de la topologie de Zariski, on accepte de travailler avec la topologie étale des schémas introduite par M. Artin et A. Grothendieck [6]. On est alors amené à agrandir la catégorie des schémas et à introduire des objets qui sont seulement localement représentables pour la topologie étale ; on obtient ainsi les espaces algébriques. Une justification supplémentaire de l'introduction de ces espaces est fournie par le critère de représentabilité démontré par M. Artin. Ce dernier caractérise en effet, par des propriétés élémentaires (c'est-à-dire accessibles au calcul dans la pratique) les foncteurs sur la catégorie des schémas qui sont représentables par des espaces algébriques satisfaisant à des conditions de finitude raisonnables, alors qu'aucun critère général analogue n'existe pour les foncteurs représentables au sens usuel, c'est-à-dire représentables par des schémas. Ce résultat, qui éclaire singulièrement les problèmes de représentabilité en géométrie algébrique, repose sur des théorèmes d'approximation non triviaux que nous allons maintenant examiner.

I. Approximation des solutions formelles d'équations algébriques et analytiques.

1. Cas des équations analytiques.

THÉORÈME 1 [1].- Soit k un corps valué (non nécessairement complet), de caractéristique 0 et considérons un système d'équations analytiques

$$(1) \quad f(x,y) = 0 \quad \text{avec} \quad f(x,y) = (f_1(x,y), \dots, f_m(x,y))$$

où les $f_i(x, y)$ sont des séries convergentes (c'est-à-dire de rayon de convergence non nul) à coefficients dans k , et où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_N)$. Soient c un entier ≥ 0 et $\bar{y}(x) = (\bar{y}_1(x), \dots, \bar{y}_N(x))$ des séries formelles à coefficients dans k , sans terme constant, telles que $f(x, \bar{y}(x)) = 0$. Alors il existe des séries convergentes à coefficients dans k

$$y(x) = (y_1(x), \dots, y_N(x))$$

telles que $f(x, y(x)) = 0$ et telles que les coefficients de $y(x)$ et de $\bar{y}(x)$, de degré $\leq c$, coïncident.

La dernière condition signifie encore que $y(x) \equiv \bar{y}(x)$ modulo $\hat{m}^c$ où $\hat{m}$ est l'idéal maximal de l'anneau local des séries formelles $k[[x]]$.

Autrement dit, pour tout entier $c \geq 0$ et toute solution formelle $\bar{y}(x)$ de (1), il existe une solution convergente $y(x)$ de (1) telle que $y(x) \equiv \bar{y}(x) \pmod{\hat{m}^c}$.

2. Cas des équations algébriques.

Considérons maintenant un corps k quelconque et un système d'équations polynômiales

$$(2) \quad f(x, y) = 0$$

où $f(x, y) = (f_1(x, y), \dots, f_m(x, y))$, $f_i(x, y) \in k[x, y]$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_N)$. Et supposons avoir trouvé une solution formelle de (2)

$$\bar{y}(x) = (\bar{y}_1(x), \dots, \bar{y}_N(x)), \quad \bar{y}_i(x) \in k[[x]].$$

Il n'est plus question bien sûr, d'espérer approcher $\bar{y}(x)$ par une solution polynômiale $y(x)$ de (2). Mais le théorème d'approximation de M. Artin nous dit, dans ce cas, que l'on peut trouver une solution formelle $\tilde{y}(x)$ de (2), arbitrairement proche de $\bar{y}(x)$, qui soit entière sur le corps des fractions $k(x)$ de $k[x]$. Il revient ici au même de dire que $y(x)$ est dans l'hensélisé $k[\tilde{x}]$ de $k[x]$ à l'origine.

Rappelons qu'un anneau local R est dit hensélien si toute R -algèbre finie S est le produit d'anneaux locaux. Si maintenant A est un anneau local quelconque, il existe un morphisme local de A dans un anneau local hensélien $\tilde{A}$, universel pour les morphismes locaux de A dans les anneaux locaux henséliens. L'anneau $\tilde{A}$, caractérisé à un A -isomorphisme unique près par cette propriété est un hensélisé de A [E.G.A., IV, § 18]. On peut donner de $\tilde{A}$ la description précise suivante (loc. cit.). Considérons les A -algèbres A' qui sont des localisés, en un idéal premier, de A -algèbres étales et telles que le morphisme $A \rightarrow A'$ soit local à extension résiduelle triviale. Les algèbres A' forment une famille filtrante pour la relation de domination et la limite inductive de ces algèbres, suivant un ensemble cofinal, est un hensélisé de A . Cette description est à l'origine de l'importance prise par la notion d'hensélisé en topologie étale des schémas.

Ceci étant, nous pouvons poser un problème général d'approximation des solutions formelles d'équations polynômiales.

DÉFINITION 1.- Soient A un anneau local noethérien hensélien, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, $\hat{A}$ le complété de A pour la topologie $\mathfrak{m}$ -adique.

(i) Nous dirons que A satisfait à la propriété d'approximation si pour tout système d'équations polynômiales à coefficients dans A

(3) $f(Y) = 0$ où $f(Y) = (f_1(Y), \dots, f_m(Y))$, $f_i(Y) \in A[Y]$, $Y = (Y_1, \dots, Y_N)$, pour toute solution $\bar{y} \in \hat{A}$ de (3) et tout entier $c \geq 0$, il existe une solution y de (3) dans A telle que $y \equiv \bar{y} \pmod{\hat{\mathfrak{m}}^c}$.

(ii) Nous dirons que A satisfait à la propriété d'approximation forte, si tout système d'équations polynômiales $f(Y) = 0$, comme dans (i), a une solution

dans A , dès qu'il a une solution modulo $\mathfrak{m}^r$, pour tout entier $r \geq 0$.

Il est immédiat que la condition énoncée dans (ii) est plus forte que la condition énoncée dans (i). D'autre part, des considérations élémentaires montrent que si l'on veut que l'anneau A et toutes les A -algèbres locales finies vérifient la propriété d'approximation, il est nécessaire de supposer que A soit universellement japonais [E.G.A., IV, § 7]. Il se peut que cette condition soit suffisante. Pour l'instant on dispose seulement du théorème fondamental suivant dû à M. Artin [2] :

THÉOREME 2.- Soit R un anneau de valuation discrète excellent (i.e. le corps des fractions $\hat{K}$ du complété $\hat{R}$ de R est une extension séparable du corps des fractions K de R) et soit A l'hensélisé d'un localisé en un idéal premier d'une R -algèbre de type fini. Alors A satisfait à la propriété d'approximation
 (définition 2 (i)).

Par ailleurs, Greenberg a montré que tout anneau de valuation discrète hensélien excellent satisfait à la condition d'approximation forte [5]. L'hensélisé à l'origine de l'anneau de polynômes $k[X_1, \dots, X_n]$ sur un corps k satisfait également à la propriété d'approximation forte comme il résulte facilement d'un résultat plus précis de M. Artin [2] que nous allons maintenant énoncer. Par degré d'une famille de polynômes à coefficients dans k : $f = (f_1, \dots, f_m)$, on désigne la somme des degrés des f_i ; par degré d'un idéal J de $k[Z_1, \dots, Z_r]$, on désigne le degré d'une famille de générateurs de J , de degré minimum.

THÉOREME 3.- Soit k un corps. Il existe une fonction à valeurs entières

$\beta = \beta(n, N, d, \alpha)$ telle que si $f = (f_1, \dots, f_m)$ sont des polynômes de $k[X, Y]$, $X = (X_1, \dots, X_n)$, $Y = (Y_1, \dots, Y_N)$, avec $\text{degré}(f) \leq d$ et si $\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_N)$

sont des polynômes de $k[X]$, tels que $f(X, \bar{y}) \equiv 0 \pmod{(X)^B}$, alors il existe $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N)$ dans l'hensélisé $k[\tilde{X}]$ de $k[X]$ à l'origine, tels que $f(X, \tilde{y}) = 0$ et $\tilde{y} \equiv \bar{y} \pmod{(\tilde{X})^\alpha}$.

La démonstration du théorème 3 est analogue à celle du théorème 2 dans le cas où $A = k[\tilde{X}]$, mais on doit prendre soin, à chaque étape de la démonstration, de borner les degrés des idéaux qui interviennent et pour cela on utilise des résultats inédits de Stolzenberg qui permettent de borner les degrés des idéaux d'une décomposition primaire d'un idéal J en fonction du degré de J et du nombre de variables.

Remarque.— Reprenons les notations de la définition 1 (i) et supposons que A vérifie la condition d'approximation. Soit I un idéal de A , distinct de A , et supposons avoir trouvé une solution $\bar{y} \in \hat{A}$ du système d'équation (2), tel qu'il existe $y' \in A$ avec $y' \equiv \bar{y} \pmod{I \hat{A}}$ (par exemple, ce sera le cas si $\bar{y}$ est déjà dans le complété de A pour la topologie I -adique). Alors il existe une solution y de (2), $y \in A$, telle que $y \equiv \bar{y} \pmod{I \hat{A}}$.

En effet, si $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont des générateurs de I , il existe des éléments $\bar{u}_{ij}$ dans $\hat{A}$ tels que $\bar{y}_i = y'_i + \sum_{j=1}^r \alpha_j \bar{u}_{ij}$ ($i = 1, \dots, N$) et il suffit d'appliquer la propriété d'approximation au système d'équations

$$f(Y) = 0 \quad \text{et} \quad Y_i = y'_i + \sum_{j=1}^r \alpha_j U_{ij} \quad (i = 1, \dots, N)$$

par rapport aux indéterminées (Y_i, U_{ij}) .

II. Indications sur la démonstration des théorèmes d'approximation.

Les théorèmes 1 et 2 se démontrent essentiellement de la même façon. Nous ne parlerons que du cas algébrique et nous nous restreindrons au cas où A est l'hensélisé à l'origine de l'anneau de polynômes $k[X_1, \dots, X_n]$ sur un corps k (pour traiter le cas général où k est remplacé par un anneau de valuation discrète excellent R , M. Artin utilise en plus une technique de "lissification" imaginée par Néron dans sa construction des modèles minimaux des variétés abéliennes).

1. Une réduction élémentaire permet de se ramener au cas où les polynômes $f = (f_1, \dots, f_m)$ sont à coefficients dans $k[X]$, donc appartiennent à $k[X, Y]$. Posons $B = k[X, Y]/(f)$. La donnée d'une solution $\bar{y}$ de $(f) = 0$ dans $\hat{A} = k[[X]]$ définit un $k[X]$ -homomorphisme $\bar{u} : B \rightarrow \hat{A}$. Quitte à augmenter l'idéal (f) , on peut supposer $\bar{u}$ injectif. Par ailleurs $k[X]$ est excellent, de sorte que le corps des fractions de $\hat{A}$ est une extension séparable de $k(X)$ [E.G.A., IV, § 7] ; a fortiori, le corps des fractions de l'anneau intègre B est séparable sur $k(X)$. Autrement dit, $Z = \text{Spec}(B)$ est lisse sur $S = \text{Spec } k[X]$ en son point générique η . Si r est la dimension relative de Z sur S en η , il résulte du critère jacobien de lissité, qu'il existe un mineur d'ordre $N - r$, soit $\delta(X, Y)$, extrait de la matrice $(\partial f_i / \partial Y_j)$ qui est inversible en η . Donc $\delta = \delta(X, \bar{y})$ est un élément non nul de $\hat{A}$. On peut supposer que $\delta(X, Y) = |\partial f_i / \partial Y_j|$ $(i, j) = 1, \dots, N - r$. Soit Z' le spectre de l'anneau $k[X, Y]/(f_1, \dots, f_{N-r})$. Alors $Z' = Z \cup Z''$ où Z'' est un sous-schéma fermé de Z' ne contenant pas η . Il existe donc $g \in k[X, Y]$, nul sur Z'' , tel que $g(X, \bar{y}) \neq 0$. Soit alors $y = (y_1, \dots, y_N)$ une solution dans A du sys-

tème partiel d'équations $(f_1, \dots, f_{N-r}) = 0$. Si $y \equiv \bar{y}$ modulo une puissance suffisamment grande de l'idéal maximal de $\hat{A}$, on aura également $g(X, y) \neq 0$, ce qui, vu le choix de g , entraîne que y est solution de $(f) = 0$. Bref, il suffit de traiter le cas où $f = (f_1, \dots, f_m)$ et où le mineur

$$\delta = |(\partial f_i / \partial y_j)(X, \bar{y})| \quad (1 \leq (i, j) \leq m) \quad \text{est non nul dans } \hat{A}.$$

2. On peut alors aborder le pas essentiel de la démonstration qui repose sur le théorème de préparation de Weierstrass et sur le lemme élémentaire suivant (cf. Bourbaki, Alg. Com., chap. III, § 4, cor. 1 au th. 2).

LEMME 1.- Soient A un anneau local hensélien, $f = (f_1, \dots, f_m)$ des éléments de $A[Y_1, \dots, Y_N]$, $\delta(Y)$ le déterminant de la matrice $(\partial f_i / \partial Y_j)$ $1 \leq i, j \leq m$ et soient $y^0 = (y_1^0, \dots, y_N^0)$ des éléments de A tels que $f(y^0) \equiv 0 \pmod{\delta^2(y^0)}$. Alors il existe des éléments $y = (y_1, \dots, y_N)$ de A tels que $f(y) = 0$ et $y \equiv y^0 \pmod{\delta(y^0)}$.

Le théorème 2 résulte alors du lemme suivant appliqué avec $g = \delta^2$.

LEMME 2.- Supposons le théorème 2 démontré lorsque $k[X]$ a moins de n variables et soient $(g, f_1, \dots, f_m)$ des éléments de $k[X, Y]$ et $\bar{y} \in \hat{A}^N$ tels que $g(X, \bar{y}) \neq 0$ et $f_i(X, \bar{y}) \equiv 0 \pmod{g(X, \bar{y})}$ pour $i = 1, \dots, m$, enfin soit c un entier ≥ 0 . Alors il existe $y \in A^N$ tel que

$$f_i(X, y) \equiv 0 \pmod{g(X, y)} \quad \text{pour } i = 1, \dots, m \quad \text{et } y \equiv \bar{y} \pmod{\hat{m}^c}.$$

Si $g(X, \bar{y})$ est inversible, le lemme est trivial et cette remarque achève la démonstration lorsque $n = 0$. On suppose désormais $n > 0$. Commençons par appliquer le théorème de préparation à $g(X, \bar{y}) \neq 0$. Quitte à faire un automorphisme de $k[X]$, on peut supposer que l'on a

$$(*) \quad g(X, \bar{y}) = \bar{a}(X_n) \bar{h}$$

où $\bar{h}$ est un élément inversible de $\hat{A}$ et

$$\bar{a}(X_n) = X_n^r + \bar{a}_{r-1} X_n^{r-1} + \dots + \bar{a}_1 X_n + \bar{a}_0$$

est un polynôme unitaire en X_n , de degré r , dont les coefficients $\bar{a}_i$ sont dans l'idéal maximal de $k[[X_1, X_{n-1}]]$.

On peut alors diviser les composantes $\bar{y}_v$ de $\bar{y}$ par $\bar{a}(X_n)$.

$$\bar{y}_v = \bar{a}(X_n) \bar{z}_v + \sum_{j=0}^{r-1} \bar{y}_{vj} X_n^j \quad v = 1, \dots, N$$

où $\bar{z}_v \in \hat{A}$ et $\bar{y}_{vj} \in k[[X_1, \dots, X_{n-1}]]$.

Posons $\bar{y}_v^* = \sum_{j=0}^{r-1} \bar{y}_{vj} X_n^j$, de sorte que l'on a $\bar{y}_v \equiv \bar{y}_v^* \pmod{\bar{a}(X_n)}$. On en déduit :

$$g(X, \bar{y}^*) \equiv g(X, \bar{y}) \quad \text{et} \quad f_i(X, \bar{y}^*) \equiv f_i(X, \bar{y}) \pmod{\bar{a}(X_n)}.$$

Compte tenu de (*) et de l'hypothèse faite sur les $f_i(X, \bar{y})$, on a alors :

$$(**) \quad g(X, \bar{y}^*) \equiv 0 \quad \text{et} \quad f_i(X, \bar{y}^*) \equiv 0 \pmod{\bar{a}(X_n)}.$$

Introduisons de nouvelles variables Y_{vj} ($v = 1, \dots, N$ et $j = 0, \dots, r-1$).

Effectuons dans les polynômes $(g, f_1, \dots, f_m)$ la substitution

$$Y_v \mapsto Y_v^* = \sum_{j=1}^r Y_{vj} X_n^j$$

et divisons les polynômes obtenus par le polynôme unitaire

$$A(X_n) = X_n^r + A_{r-1} X_n^{r-1} + \dots + A_1 X_n + A_0$$

où les A_i sont de nouvelles indéterminées. On obtient

$$g(X, Y^*) = A(X_n) Q + \sum_{j=1}^{r-1} G_j X_n^j$$

$$\text{et} \quad f_i(X, Y^*) = A(X_n) Q_i + \sum_{j=1}^{r-1} F_{ij} X_n^j$$

où Q, Q_i, G_j, F_{ij} sont des polynômes par rapport aux variables X_i, Y_{vj} , A_μ , à coefficients dans k , tels que la variable X_n ne figure pas dans G_j et F_{ij} .

Si on substitue $\bar{y}_{vj}$ et $\bar{a}_\mu$ à la place de Y_{vj} et A_μ dans les relations précédentes, on obtient compte tenu de (**)

$$\begin{aligned}
 & G_j(X_1, \dots, X_{n-1}, \bar{y}_{\nu_j}, \bar{a}_\mu) = 0 \\
 (***) \quad & F_{ij}(X_1, \dots, X_{n-1}, \bar{y}_{\nu_j}, \bar{a}_\mu) = 0.
 \end{aligned}$$

Vu l'hypothèse de récurrence, le système d'équations $G_j = F_{ij} = 0$ admet une solution (y_{ν_j}, a_μ) dans l'hensélisé $k[X_1, \dots, X_{n-1}]$ de $k[X_1, X_{n-1}]$, telle que

$$y_{\nu_j} \equiv \bar{y}_{\nu_j} \quad \text{et} \quad a_\mu \equiv \bar{a}_\mu \pmod{(X_1, \dots, X_{n-1})^c}.$$

Posons

$$\begin{aligned}
 a(X_n) &= X_n^r + a_{r-1} X_n^{r-1} + \dots + a_1 X_n + a_0 \\
 y_\nu^* &= \sum_{j=0}^{r-1} y_{\nu_j} X_n^j \\
 y_\nu &= a(X_n) z_\nu + y_\nu^* \quad \text{où } z_\nu \in A \text{ et } z_\nu \equiv \bar{z}_\nu \pmod{\hat{m}^c}.
 \end{aligned}$$

On a alors $y_\nu \equiv \bar{y}_\nu \pmod{\hat{m}^c}$, $g(X, y^*) \equiv 0$ et $f_i(X, y^*) \equiv 0 \pmod{a(X_n)}$ d'où par la formule de Taylor, $g(X, y) \equiv 0$ et $f_i(X, y) \equiv 0 \pmod{a(X_n)}$.

D'autre part, pour c assez grand, le plus petit entier α tel que le coefficient de X_n^α dans $g(X, y) \in k[[X_1, \dots, X_n]]$ soit non nul sera le même que celui relatif à $g(X, \bar{y})$ c'est-à-dire r et on aura alors $g(X, y) = \bar{b}(X_n) \bar{h}'$ où $\bar{h}'$ est inversible dans $\hat{A}$ et $\bar{b}(X_n)$ est un polynôme unitaire en X_n , de degré r , à coefficients dans $k[[X_1, \dots, X_{n-1}]]$. Comme $a(X_n)$ divise $g(X, y)$, il va diviser $\bar{b}(X_n)$, donc lui est égal et finalement on a bien $f_i(X, y) \equiv 0 \pmod{g(X, y)}$.

III. Application aux foncteurs localement de présentation finie.

Pour pouvoir appliquer le théorème 2, nous prendrons comme schéma de base, dans la suite de cet exposé, un schéma S de type fini sur un anneau de Dedekind excellent. Dans la pratique, cette restriction n'est pas très sérieuse car nombre de problèmes de géométrie algébrique relatifs à un schéma de base quelconque S' , se ramènent par des techniques de passage à la limite au cas où la base est le

spectre d'une algèbre de type fini sur $\underline{\mathbb{Z}}$.

Considérons alors un foncteur contravariant F défini sur la catégorie des S -schémas, à valeurs dans la catégorie des ensembles. Si X est un S -schéma affine d'anneau A , on note $F(A)$ pour $F(X)$.

DÉFINITION 2.- Nous dirons que F est localement de présentation finie si F commute aux limites inductives filtrantes d'anneaux :

$$\lim_{\rightarrow} F(A_i) \cong F(\lim_{\rightarrow} A_i) .$$

Cette terminologie est justifiée par le fait que si F est représentable par un S -schéma X , F est localement de présentation finie, si et seulement si X est un S -schéma localement de présentation finie [E.G.A., IV, § 8].

Soient S un schéma, s un point de S . Nous appellerons voisinage étale élémentaire de S en s , un schéma S' , étale sur S , muni d'un point s' au-dessus de s ayant même corps résiduel que s .

THÉOREME 4.- Soient s un point du schéma S , $\hat{S}$ le spectre du complété de $O_{S,s}$ pour la topologie définie par l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $O_{S,s}$. Soient $F : (\text{Sch}/S)^0 \rightarrow \text{Ens}$ un foncteur localement de présentation finie, $\bar{\xi} \in F(\hat{S})$ et c un entier ≥ 0 . Alors il existe un voisinage étale élémentaire S' de S en s et un point ξ' de $F(S')$ tel que $\xi' \equiv \bar{\xi} \pmod{\hat{\mathfrak{m}}^c}$.

Démonstration.

Soient $A = O_{S,s}$, $\tilde{A}$ l'hensélisé de A et $\hat{A}$ son complété et considérons $\hat{A}$ comme limite inductive filtrante de A -algèbres de présentation finie A_i , $i \in I$. Comme F est localement de présentation finie, il existe $i \in I$, tel que $\bar{\xi} \in F(\hat{A})$ provienne d'un élément $\xi_i \in F(A_i)$. Plus précisément, si $A_i = A[Y_1, \dots, Y_N]/(f)$ où $f = (f_1, \dots, f_m)$, le morphisme canonique $\bar{u} : A_i \rightarrow \hat{A}$

est défini par une solution $\bar{y} \in \hat{A}$ de $f(Y) = 0$. Soit $\tilde{y} \in \tilde{A}$ une solution de $f(Y) = 0$ telle que $\tilde{y} \equiv \bar{y} \pmod{\hat{m}^C}$ (théorème 2). Alors $\tilde{y}$ définit un A -morphisme $\tilde{u} : A_i \rightarrow \tilde{A}$. Soit $\tilde{\xi} \in F(\tilde{A})$ l'image de ξ_i par $\tilde{u}$, on a donc $\tilde{\xi} \equiv \bar{\xi} \pmod{\hat{m}^C}$. Comme F est localement de présentation finie, $\tilde{\xi}$ provient d'un élément ξ' de $F(S')$ où S' est un voisinage étale élémentaire de S en s convenable. On a alors $\xi' \equiv \bar{\xi} \pmod{\hat{m}^C}$.

Exemple.— Soient X et Y deux schémas de type fini sur S , x un point de X , $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $O_{X,x}$, $\bar{u}$ un S -morphisme de $\text{Spec}(\widehat{O_{X,x}})$ dans Y . Alors il existe un voisinage étale élémentaire X' de X en x et un S -morphisme $u : X' \rightarrow Y$ tel que $u \equiv \bar{u} \pmod{\hat{m}^C}$. En effet, il suffit d'appliquer le théorème 4 au foncteur localement de présentation finie

$$F : (\text{Sch}/X)^{\circ} \rightarrow \text{Ens}$$

$$X' \mapsto \text{Hom}_S(X', Y).$$

IV. Espaces algébriques et critère de représentabilité.

On connaît l'importance prise par la notion de foncteur et celle de foncteur représentable en théorie des schémas. Dès lors, on a cherché à développer des critères de représentabilité. Par exemple, on a pu dresser une liste de conditions nécessaires et suffisantes, chacune de nature très élémentaire, que doit vérifier un foncteur $F : (\text{Sch}/S)^{\circ} \rightarrow \text{Ens}$, pour être représentable par un S -schéma non ramifié et séparé [12]. Mais, il semble exclu de pouvoir caractériser de manière analogue les foncteurs représentables par des schémas disons localement de présentation finie sur S . Nous allons voir maintenant comment, en agrandissant convenablement la catégorie des schémas, M. Artin a obtenu un critère satisfaisant de représentabilité dans ce cadre élargi.

Commençons par énoncer quelques propriétés des foncteurs représentables.

Soient X un S -schéma localement de présentation finie et $F : (\text{Sch}/S)^{\circ} \rightarrow \text{Ens}$ le S -foncteur représenté par X . On a donc pour tout S -schéma T

$$F(T) = X(T) = \text{Hom}_S(T, X) .$$

Alors le foncteur F vérifie les cinq conditions suivantes :

[F₀] Le foncteur F est un faisceau pour la topologie étale sur Sch/S .

C'est-à-dire, pour tout S -schéma T et tout S -morphisme $T' \rightarrow T$ étale surjectif, on a la suite exacte d'ensembles :

$$F(T) \rightarrow F(T') \rightrightarrows F(T' \times_T T') .$$

[F₁] Le foncteur F est localement de présentation finie sur S (définition 2).

[F₂] Le foncteur F est effectivement pro-représentable, c'est-à-dire que pour tout point s de S ,

(i) la restriction de F à la catégorie des $O_{S,s}$ -algèbres de longueur finie est pro-représentable ([10], n° 195) ;

(ii) si $\hat{A}$ est une $O_{S,s}$ -algèbre locale noethérienne complète, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ tel que $\hat{A}/\mathfrak{m}$ soit fini sur $k(s)$, alors on a :

$$F(\hat{A}) \simeq \varprojlim_n F(A/\mathfrak{m}^n)$$

(intuitivement la condition [F₂] permet, pour tout point x de X , fermé dans sa fibre, de déterminer l'anneau local complété $\hat{O}_{X,x}$ et le morphisme canonique $\text{Spec}(\hat{O}_{X,x}) \rightarrow F$).

[F₃] Le foncteur F est relativement représentable, c'est-à-dire que, quel que soit le S -schéma T et les éléments (ξ, η) de $F(T)$, le sous-foncteur W de T des coïncidences de ξ et η est un sous-schéma de T (W est en effet l'image réciproque de la diagonale de $X \times_S X$ par le morphisme $T \rightarrow X \times_S X$ de composantes ξ et η).

[F₄] Pour tout S-schéma T de type fini et tout $\xi \in F(T)$, si ξ est formellement étale en $t \in T$, ξ est formellement étale en tout point d'un voisinage de t . Rappelons que ξ est formellement étale en t si pour tout carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 Z_0 & \xrightarrow{f_0} & T \\
 \downarrow i & \nearrow f & \downarrow \xi \\
 Z & \xrightarrow{h} & F
 \end{array}$$

où Z est un S-schéma local artinien, $Z_0 \xrightarrow{i} Z$ une immersion fermée définie par un idéal nilpotent et f_0 un morphisme d'image ensembliste $\{t\}$, alors il existe une unique flèche $f : Z \rightarrow T$ qui rend les triangles commutatifs.

En fait, les conditions [F_i], $i = 0, \dots, 4$, sont de nature locale pour la topologie étale. Plus précisément, soient X un S-schéma localement de présentation finie, R un sous-schéma de $X \times_S X$ qui est le graphe d'une S-relation d'équivalence sur X et supposons que cette relation d'équivalence soit étale, c'est-à-dire que les projections canoniques $R \rightrightarrows X$ soient étales. Alors le faisceau F , quotient de X par R pour la topologie étale vérifie encore les cinq conditions [F_i], mais il ne sera pas en général représentable.

Il est commode dans ce qui suit de considérer la catégorie des S-schémas, comme sous-catégorie pleine de la catégorie Faisc/S des faisceaux sur Sch/S , munie de la topologie étale.

DÉFINITION 3.- Un S-espace algébrique est un faisceau sur Sch/S pour la topologie étale, isomorphe au quotient d'un S-schéma X localement de présentation finie par une relation d'équivalence étale. On note E/S la sous-catégorie pleine

de Faisc/S dont les objets sont les espaces algébriques.

Nous pouvons alors énoncer le critère de représentabilité de M. Artin [4].

THÉORÈME 5.- (Soit S un schéma localement de type fini sur un anneau de Dedekind excellent). Un foncteur $F : (\text{Sch}/S)^0 \rightarrow \text{Ens}$ est un espace algébrique sur S si et seulement si F vérifie les conditions $F_0, \dots, F_4$ énoncées ci-dessus.

Ce résultat nous semble fournir, indépendamment des motivations cohomologiques et arithmétiques, une parfaite justification de l'introduction de la topologie étale. Il est naturel dès lors, de travailler systématiquement avec les espaces algébriques, les schémas n'étant plus que des modèles locaux pour la topologie étale. Bien sûr les notions de nature locale pour la topologie étale (platitude, lissité, faisceaux cohérents, ...) s'étendent ipso facto des schémas aux espaces algébriques, mais il est intéressant de noter que certaines propriétés de nature globale comme la séparation ou la propreté valent également pour les espaces algébriques. Les théorèmes fondamentaux sur les morphismes propres : finitude de la cohomologie des faisceaux cohérents, théorèmes de comparaison [E.G.A., III] ont été étendus aux espaces algébriques par Knutson [11].

Quant à la démonstration du théorème 5, elle repose sur le théorème 4. Soient en effet $s \in S$ et A une $O_{S,s}$ -algèbre locale noethérienne complète de corps résiduel k fini sur $k(s)$, qui pro-représente F en un point $\xi^0 \in F(k)$ et soit $\bar{\xi} \in F(A)$ l'élément universel correspondant à A (cf. [F₂]). Le pas essentiel consiste à "algébriser le foncteur F " en $\bar{\xi}$, c'est-à-dire à trouver une S -algèbre de type fini Z , un point z de Z au-dessus de s , un S -morphisme local $u : O_{Z,z} \rightarrow A$ et un élément $\xi \in F(Z)$ tels que

- 1) $\bar{\xi}$ soit l'image de ξ par u ;
- 2) u induit un S -isomorphisme $\hat{O}_{Z,z} \xrightarrow{\sim} A$.

Lorsque l'on sait déjà que A est le complété d'un localisé d'une S -algèbre de type fini, l'algébrisation est facile à partir du théorème 4 ; dans le cas général, M. Artin applique le théorème 4 à un foncteur auxiliaire et réussit à approximer simultanément le foncteur F et l'anneau A .

V. Applications.

1. Le foncteur de Picard.

Soit $f : X \rightarrow S$ un S -espace algébrique et soit $\underline{\text{Pic}}_{X/S}$ le foncteur de Picard relatif de X sur S , c'est-à-dire (cf. [10], n° 232) le faisceau pour la topologie fidèlement plate de présentation finie, associé au préfaisceau

$$T \mapsto (\text{classes de faisceaux inversibles sur } X \times_S T).$$

THÉORÈME 6.- Si $f : X \rightarrow S$ est propre plat et tel que la formation $f_*(\mathcal{O}_X)$ commute à tout changement de base $S' \rightarrow S$, alors $\underline{\text{Pic}}_{X/S}$ est un S -espace algébrique en groupes. Si de plus S est le spectre d'un corps k , $\underline{\text{Pic}}_{X/k}$ est un schéma en groupes localement de type fini.

On montre en effet que le foncteur $\underline{\text{Pic}}_{X/S}$ vérifie les axiomes $[F_i]$. La dernière assertion résulte, en utilisant les opérations de translation, du fait qu'il existe toujours un ouvert dense d'un espace algébrique qui est un schéma. Jusque là on disposait d'un théorème de représentabilité de $\underline{\text{Pic}}_{X/S}$ (au sens classique) moyennant des hypothèses de projectivité sur X et des conditions très strictes sur les fibres de X/S ([10], n° 232) ; la représentabilité lorsque S est le spectre d'un corps avait été prouvée par Murre, mais la démonstration nécessitait quelques déviations, dont l'utilisation du lemme de Chow. Au contraire, on dispose maintenant d'une méthode générale et directe pour aborder les questions

de représentabilité, indépendante des techniques projectives.

2. Espaces analytiques compacts ayant suffisamment de fonctions méromorphes.

Le foncteur introduit dans "gaga" qui a un schéma X localement de type fini sur le corps des complexes, associe un espace analytique X_{an} s'étend à la catégorie des espaces algébriques sur $\mathbb{C}$. Si X est un espace algébrique propre, X_{an} est compact ; de plus, X_{an} possède suffisamment de fonctions méromorphes dans le sens que toute composante irréductible réduite X_i de X_{an} a un corps de fonctions méromorphes dont le degré de transcendance est égal à la dimension de X_i (cf. [8]).

THÉOREME 7.- Le foncteur $X \mapsto X_{\text{an}}$ est une équivalence entre la catégorie des espaces algébriques propres sur $\mathbb{C}$ et la catégorie des espaces analytiques compacts ayant suffisamment de fonctions méromorphes.

Ce résultat très frappant a été obtenu par M. Artin comme corollaire de théorèmes généraux sur la comparaison des contractions et dilatations du point de vue formel et du point de vue algébrique ([5]) ; il a été pressenti également par Mořezon qui semble avoir été amené de son côté à introduire l'équivalent des espaces algébriques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ARTIN - On the solutions of analytic equations, Inventiones Math., 5 (1968), 277-291.
- [2] M. ARTIN - Algebraic approximations of structures over complete local rings, Pub. Math. I.H.E.S., to appear.
- [3] M. ARTIN - The implicit function theorem in algebraic geometry, International Colloquium of Algebraic Geometry, Tata Institute of Fund. Research, Bombay, 1968.
- [4] M. ARTIN - Algebraization of formal moduli I, Publication de l'Univ. de Princeton, à paraître.
- [5] M. ARTIN - Algebraization of formal moduli II, à paraître aux Annals of Maths.
- [6] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK et J.-L. VERDIER - Cohomologie étale des schémas, Séminaire de Géométrie algébrique 1963/64, I.H.E.S.
- [7] J. DIEUDONNÉ et A. GROTHENDIECK - Eléments de géométrie algébrique (cité E.G.A.), Pub. Math. I.H.E.S., n° 4, 8, ...
- [8] A. DOUADY - Espaces analytiques sous-algébriques (d'après B. G. Moïšezon), Sém. Bourbaki, 1967/68, n° 344.
- [9] M. GREENBERG - Rational points in henselian discrete valuation rings, Pub. Math. I.H.E.S., n° 23, 1964.
- [10] A. GROTHENDIECK - Fondements de la géométrie algébrique, extraits du Sém. Bourbaki, 1957/1962.
- [11] D. KNUTSON - Algebraic spaces, thesis, M.I.T., 1968, to appear.
- [12] B. G. MOÏŠEZON - On n-dimensional compact varieties with n algebraically independant meromorphic functions, I, II, III, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 30 (1966).
- [13] J.-P. MURRE - Representations of unramified functors. Applications, Sém. Bourbaki, 1964/65, n° 294.